Modélisation de forces optiques

Olivier Moine

July 11, 2005

Contents

1	Intr	Introduction générale 4					
	1.1	Quelq	ues applications célèbres des forces optiques	4			
	1.2		ines d'activités liés aux forces optiques	5			
	1.3	Modél	lisation des forces optiques et diffusion de la lumière	6			
	1.4	Objec	tifs de cette thèse	7			
		1.4.1	Etablissement d'une formule dans le cas résonnant pour un faisceau arbitraire	8			
		1.4.2	Etude des forces induites	8			
		1.4.3	Etude de la force optique sur des sphères enrobées	8			
		1.4.4	Modélisation de pincettes optiques	8			
	1.5	Plan o	le ce mémoire.	8			
	1.6	Comn	nent lire ce mémoire	9			
2	App	oroxim	ations et calcul exact	10			
	2.1	Introd	luction	10			
	2.2		roximation de Rayleigh	10			
		2.2.1	Méthode utilisée pour exprimer la force optique dans le cadre de l'approximation				
			dipolaire	11			
		2.2.2	Expression de la densité de charge ρ_p et de courant \mathbf{j}_p en fonction de la densité de				
			polarisation P	12			
		2.2.3	Utilisation de l'approximation dipolaire:	12			
		2.2.4	Expression du moment dipolaire \mathbf{p} et du champ magnétique excitateur \mathbf{B}_e en fonc-				
			tion du champ électrique excitateur \mathbf{E}_e	13			
		2.2.5	La force de gradient	17			
		2.2.6	Pression de radiation et force corrective	17			
		2.2.7	Relation entre irradiance et force dipolaire	19			
		2.2.8	Resultats numériques	19			
		2.2.9	Conclusion	25			
	2.3		roximation de l'optique géométrique	26			
		2.3.1	Description du système à un seul pinceau lumineux	26			
		2.3.2	Etablissement du bilan d'impulsion	27			
		2.3.3	Extension à un ensemble de pinceaux lumineux	29			
		2.3.4	Les coefficents de Fresnel: notations générales	30			
		2.3.5	Coefficients de Fresnel pour une onde TE	31			
		2.3.6	Coefficients de Fresnel pour une onde TM	34			
		2.3.7	Intégration de la force	38			
		2.3.8	Conclusion	40			
	2.4	Calcu		41			
		2.4.1	Solution de l'équation d'Helmholtz en géométrie sphérique	41			
		2.4.2	Expression des différents champs présents	42			
		2.4.3	Méthode utilisée	43			
		2.4.4	Calcul de la matrice de transfert d'une sphère diélectrique	43			
		2.4.5	Relation de conservation de la force- Données du problème	46			
		2.4.6	Quantité de mouvement délivrée par la source et transmise à l'objet	47			

		1 1	51						
			52						
			54						
			8						
		2.4.13 Comparaison entre le calcul exact et les différentes approximations- Cas d'une onde	59 : E						
		2.4.14 Piégeage dans un système interférentiel à 3 ondes:	55 56 77						
		2.4.15 Conclusion	'						
3	For	s induites 7	8						
	3.1		78						
	3.2	1 1	78						
		1	30						
			33						
		*	35						
		1 1	35						
	3.3		39						
	3.4	·	92						
		·)2						
	2 5	·	8						
	3.5	Conclusion	JU						
4	Sph	res enrobées 10	2						
_	4.1	ntroduction							
	4.2	Cas de 2 sphères)2						
		4.2.1 Ecriture des différents champs présents							
		1.2.2 Expression de la continuité tangentielle des champs)4						
	4.3	Cas à plusieurs sphères)8						
		4.3.1 Expression du champ électrique présent dans le milieu l							
		4.3.2 Expression des relations de continuité tangentielle							
		4.3.3 Matrice de transfert reliant f_l à e_l							
	4.4	Applications numériques							
	4.5	Conclusion	.4						
5	Modélisation d'un faisceau laser 115								
Ð	5.1	introduction							
	5.2	Formulation théorique							
	0.2	5.2.1 Lien entre E et le vecteur de Poynting							
		5.2.2 Lien entre le vecteur de Poynting et la puissance du faisceau incident							
		$5.2.3$ Expression du facteur de normalisation φ - Modèle gaussien							
		$6.2.4$ Expression du facteur de normalisation φ - Modèle de Davis							
	5.3	Applications numériques							
	5.4	Conclusion	30						
6		lusion et perspectives 13							
	6.1	Objectifs fixés et résultats obtenus	_						
	6.2	Perspectives	32						
\mathbf{A}	Thé	rème de translation addition	8						
В	Lee	ecteurs harmoniques sphériques.	1						
D		Equation d'Helmholtz: cas scalaire							
	ט.ז	B.1.1 Laplacien angulaire							
		B.1.2 Cas du laplacien radial:							
	B.2	Equation d'Helmholtz: cas vectoriel							
			-						

\mathbf{C}	Décomposition d'une onde plane en harmoniques sphériques						
D	modélisation d'un faisceau laser selon l'approximation de Davis.						
	D.1 Généralités sur les faisceaux lasers	153					
	D.2 Calcul des coefficients de la décomposition	153					
\mathbf{E}	Polarisabilité d'un dipôle	159					

1 Introduction générale

Le fait que la lumière transporte de la quantité de mouvement et peut en conséquence la transmettre est souvent inconnu du grand public: en effet, nous constatons que les rayons du Soleil transportent de l'énergie, à travers la chaleur et la lumière qui nous parvient de l'astre du jour. Mais quand notre Soleil brille, nous ne percevons pas les forces microscopiques qu'il exerce sur nous (forces de l'ordre du μN par m^2). Il en est autrement pour les objets petits, comme les organites biologiques, où légers, comme les voiliers solaires qui se meuvent dans le vide spatial.

1.1 Quelques applications célèbres des forces optiques.

Le 21 juin 2005 fut lancé dans l'espace Cosmos 1 [1]. Longtemps sujet faisant rêver des physiciens comme Newton où Kepler, ce voilier solaire composé de 8 voiles triangulaires pour une surface totale de 600 $\rm m^2$ doit subir une accélération constante de $5.10^{-5}m.s^{-2}$, ce qui fait, pour une vitesse initiale nulle, une vitesse de 15 km/h au bout d'une journée, mais de 6000km/h après 1 an: les voiliers solaires apparaissent ainsi comme les moyens les plus rapides et économiques du transport spatial à longue distance. Son but est donc de démontrer qu'il est possible de se déplacer grâce à la lumière de notre étoile. En effet, cette lumière contient non seulement une énergie, mais aussi une impulsion. La relation qui unit ces deux quantités pour un photon de vitesse c est d'ailleurs donnée par la célèbre équation:

$$E = pc$$

où E est l'énergie du photon, et p sa quantité de mouvement. Les photons de la lumière du Soleil arrivent

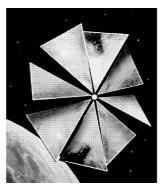


Figure 1: Le voilier solaire Cosmos 1 (vue d'artiste; source: associated press).

donc sur le film plastique ultrafin qui constitue la voilure de Cosmos 1 et exercent ainsi sur celle-ci une force 100 fois supérieure à celle du vent solaire (jets de particules trop lents pour donner une impulsion): le voilier bouge.

Un autre exemple où interviennent les forces optiques est le radiomètre [2, 3, 4]. Ce moulin à lumière, par analogie au moulin à vent, est constitué de pâles présentants deux faces: une face réfléchissante, et une face noire. La face réfléchissante réfléchit plus de lumière que la face noire. Ainsi, il y a une différence de pression de radiation, c'est à dire de force exercée sur chaque face de la pâle. Cette différence crée un couple, qui permet d'actionner le radiomètre si la force est assez forte. Dans la pratique, on remarque l'apparition de forces thermiques dues à la nature absorbante de l'air restant (le vide n'étant jamais parfait). C'est à cause de ces forces thermiques nous utiliserons dans ce mémoire des matériaux non absorbants.

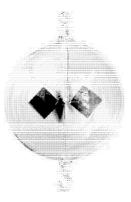


Figure 2: Le radiomètre de Crookes, constitué d'une sphère en verre dans laquelle on a fait un vide partiel et d'un croisillon monté sur un axe. Ce croisillon est ici composé de 4 ailettes en mica, avec une face naturelle réflèchissante et une face noircie absorbante (source: http://www.outilssolaires.com/boutique/prin-boutique3.htm).

Enfin, l'histoire de l'étude de forces optiques a déja été marquée par l'obtention d'un prix Nobel. Steven Chu (prix Nobel 1997, [5]) et ses collègues de l'université de Stanford ont utilisés la force présente dans la lumière pour ralentir des atomes, premier pas vers le refroidissement laser qui permet de former de nos jours des condensats de matière.

1.2 Domaines d'activités liés aux forces optiques.

Typiquement, la force optique créée par un faisceau laser émettant dans le visible sur un objet micromètrique est de l'ordre du pN par mW de puissance éclairant l'objet. Arthur Ashkin, des laboratoires AT&T Bell, décrivit en 1970 dans un article qui fait aujourd'hui référence les premières expériences de piégeage optique sur des particules micrométriques [17]. L'année 1970 n'est pas un hasard: le développement des lasers dans les années 60 a permis d'obtenir des ondes lumineuses suffisamment cohérentes et puissantes pour piéger des particules. Au milieu des années 80, le même Ashkin découvrit qu'un faisceau laser de faible puissance (moins de 1W) piégeait les bactéries, apportant du même coup un nouvel outil de recherche aux biologistes [18]. A l'aide d'un laser au néodyme Yag, il arriva à mouvoir des cellules ou leurs organites.

De nos jours, ce sont avant tout les biologistes qui utilisent les forces optiques. Cette utilisation se fait sous la forme de ciseaux optiques, et sous celle de pincettes optiques.

Les ciseaux optiques sont en réalité de brèves impulsions laser. Grâce à ces ciseaux, les biologistes creusent par exemple des trous dans la membrane cellulaire; ces trous leurs permettent ainsi d'introduire des molécules étrangères dans la cellule. Cette technique, l'optoporation, c'est à dire l'ouverture de pores par voie optique, est sans danger pour la membrane cellulaire, qui se reconstitue en une fraction de seconde. Mais pendant cette courte période, les biologistes peuvent insérer à travers ce trou de dimension micromètrique des gènes dans des cellules de riz par exemple. Ensuite, la cellule génétiquement modifiée se multiplie par division cellulaire; elle donne alors une plante entière capable par exemple de créer une protéine codée par le gène introduit. D'autres applications des ciseaux optiques ont des répercussions sur la reproduction humaine [7]. En italie, l'équipe du professeur Severino Antinori a utilisé des ciseaux optiques afin de procéder à des essais cliniques de procréation médicalement assistée [9, 12]. La zone pellucide est une partie de la membrane qui protège les ovocytes fécondés in vitro. A cause d'elle, de

nombreuses implantations d'embryons dans l'utérus de femmes échouent provoquant alors des fausses couches. Avant l'utilisation de ciseaux optiques, on avait l'habitude d'utiliser des substances chimiques pour amincir la zone pellucide. Ce traitement chimique, non seulement plus dangereux, est également moins efficace que l'utilisation de ciseaux optiques dont le taux de réussite dépasse de 50% celui de l'ancienne technique. Ces essais cliniques ont amené de grands espoirs dans le domaine de la procréation médicalement assistée, et engendré des essais du même type, mais à grande échelle cette fois ci, aux Etats-Unis, en Australie, où encore en Israël. Un dernier exemple parmi tant d'autres des applications des ciseaux optiques est l'analyse des molécules constitutives d'une cellule: lorsque que l'on focalise un faisceau laser sur une lame de verre sur laquelle est déposée une cellule, on observe l'apparition d'un micro plasma, minuscule nuage de gaz ionisé [8]. En installant un capilaire au dessus de la cellule, on recueille les constituants ainsi évaporés.

Les pincettes optiques sont elles constituées de faisceaux lasers continus. Elles permettent de saisir des organites biologiques qui dans le cas idéal doivent être tansparentes, non absorbantes, non productrices de chaleur et non déclenchatrices de réactions chimiques indésirables. Pour saisir un organite, un seul faisceau laser est nécessaire. Les applications de ces pincettes optiques sont également nombreuses. On peut par exemple se livrer à l'étude de réactions immunitaires [10]. Celles-ci sont complexes, mais leurs compréhension est primordial dans la lutte contre les maladies. Un exemple parmi tant d'autres: on s'est rendu compte du fonctionnement conjoint de certains globules blancs, les lymphocytes à l'aide des pincettes optiques: en saississant un lymphocyte B, et en le plaçant à l'arrière d'un lymphocyte T, rien ne se passe. Si l'on pratique la manipulation inverse, c'est à dire si l'on place un lymphocyte T derrière un lymphocyte B, la concentration du milieu environnant en ion calcium augmente, augmentation annociatrice de réactions immunitaires. Les pincettes optiques permettent par conséquent de comprendre le mécanisme enclenchant une réaction immunitaire. Elles arrivent également à quantifier la vitesse des spermatozoïdes d'un sujet: si l'on piège un spermatozoïde, et que l'on diminue progressivement l'énergie de piégeage, on peut évaluer la vitesse du spermatozoïde lorsqu'il quitte le piège. La fertilité masculine est intimement liée à cette vitesse, et l'on voit tout l'intéret des pincettes optiques dans l'étude de la stérilité [6, 11]. Il faut rappeler pour conclure avec les pincettes optiques que leur utilisation reste très délicate, du fait de la chaleur qu'elles transmettent à la cible piégée.

Mais les forces optiques ne sont pas un domaine uniquement réservé aux biologistes: les physiciens s'y intéressent également. Les structures cristallines constituées de sphères diélectriques représentent actuellement un thème de recherche très prisé dans la communauté scientifique. En 1991, E Yablonovitch a créé une structure capable de réfléchir intégralement un rayonnement électromagnétique pour certaines fréquences [13, 14]. Cette structure diélectrique périodique nommée cristal photonique, peut être réalisée par un ensemble de sphères diélectriques assemblées de manière périodique. Les domaines de fréquences réflèchies par les cristaux photoniques sont appelées bandes d'énergies interdites, par analogie avec la physique des semi-conducteurs. Les applications possibles de tels cristaux sont très larges: on peut s'en servir pour démultiplexer un signal, puisque si certaines fréquences sont interdites, d'autres peuvent être guidées par un cristal photonique. On peut également les utiliser pour annihiler l'émission spontanée d'un laser, et ainsi améliorer son rendement [14, 15]. Mais une des applications possibles la plus spectaculaire reste le télescope en matière optique, imaginé par Antoine Labevrie [16]. En effet, un cristal photonique réféchit complètement la lumière dans sa bande interdite, jouant ainsi le même role qu'un miroir ordinaire. Le principal intéret d'utiliser un cristal photonique plutôt qu'un miroir réside dans le poids des objets considérés: un ensemble de sphères espacées sera moins lourd qu'un miroir solide. La contrainte pondérale est l'une des plus exigentes dans le domaine du lancement spatial: un objet plus lourd demande plus de carburant pour être mis en orbite. Ainsi, les télescopes en matière optique permettraient de limiter les coûts des agences spatiales. Le rôle des forces optiques dans le cas des cristaux photoniques provient tout simplement de l'assemblage et de la stabilité de ces derniers: on imagine très bien un faisceau laser qui placerait une par une les sphères de façon à construire le cristal. Etudier les forces optiques est également important pour déduire l'impact des forces induites dans la stabilité du cristal: ces forces induites, c'est à dire les forces créées par la multidiffusion de plusieurs sphères proches, peuvent améliorer le piégeage. Ou le dégrader...

1.3 Modélisation des forces optiques et diffusion de la lumière.

Le traitement du problème de l'intéraction lumière-matière dont la modélisation des forces optiques n'est qu'un aspect est intimement lié à la diffusion de la lumière. En effet, pour connaître la force appliquée

par une onde lumineuse sur un objet, il faut non seulement connaître l'onde incidente sur l'objet, mais aussi l'onde diffusée.

On peut délimiter trois grands régimes de diffusion: lorsque la longueur d'onde du faisceau incident est nettement supérieure aux dimensions caractéristiques de l'objet diélectrique, on parle de diffusion de Rayleigh, où encore d'approximation dipolaire, puisque la diffusion de Rayleigh consiste à considérer l'objet diffusant comme un dipôle [47]. Lorsque c'est la dimension caractéristique de l'objet qui est nettement supérieure à la longueur d'onde de l'onde incidente, on utilise l'approximation de l'optique géométrique; les phénomènes ondulatoires sont en principe négligés. Lorsque la longueur d'onde du faisceau incident est du même ordre de grandeur que les dimensions de l'objet, on fait intervenir la théorie de Lorenz-Mie, capable de traiter la diffusion dans le cas résonnant [23]. Le ciel nous donne des exemples pour chaque régime de diffusion.

En 1873, John William Strut Lord Rayleigh (1842-1919) démontra qu'un dipôle électrique excité par un rayonnement incident de longueur d'onde λ émet une onde diffusée dont la puissance obéit à la relation simplifiée, dans le cas d'une polarisation rectiligne:

$$P = \frac{a}{\lambda^4} \cos^2 \theta$$

où a est une constante et θ l'angle entre la direction incidente et le détecteur. Cette diffusion permet par exemple d'expliquer pourquoi le coucher de soleil est rouge, où encore pourquoi le ciel est bleu. D'apès la formule de la puissance rayonnée, on se rend en effet compte que la lumière bleue (longueur d'onde courte) sera plus diffusée que la lumière rouge (longueur d'onde longue). Lorsque l'on regarde le ciel ailleurs que dans l'axe du Soleil, seuls les photons diffusés nous parviennent. Ainsi, les photons bleus diffusés majoritairement explique la couleur bleue du ciel. Mais lorsque l'on observe un coucher de soleil, ce sont les photons majoritairement non diffusés (donc rouges) qui nous parviennent, et donne ainsi cette couleur rouge-orangée au coucher de Soleil.

Le modèle de l'optique géométrique fut utilisé dès le 17^{eme} siècle par Isaac Newton afin de décomposer la lumière à l'aide d'un prisme en verre, et ainsi d'expliquer le phénomène de l'arc-en-ciel. Ce phénomène bien connu n'arrive ni par temps clair, ni par temps couvert: il nécessite la présence d'un rideau de pluie éclairée par le Soleil (où, moins connu, par la Lune). Les gouttes d'eau sont généralement de l'ordre du millimètre et agissent alors comme un prisme à lumière; cette dernière peut par conséquent être modélisée sous forme de rayons. L'arc-en-ciel est dû à la réfraction et à la réflexion des rayons solaires par chacune des gouttes d'eau, décomposant la lumière blanche du Soleil selon les couleurs du spectre. La grosseur des gouttes a beaucoup d'importance pour l'intensité des couleurs et la largeur de l'arc. Ainsi, les arcs-en-ciel dus à la bruine (dont les gouttes mesurent 0,05 mm, à comparer avec les longeurs d'ondes du visible, entre 400 et 800 nm) sont pâles et blafards.

On parle de diffusion de Lorenz-Mie lorsque les particules sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du rayonnement. Ce type de diffusion est souvent produite par la poussière, le pollen, la fumée et l'eau. Elle se produit autour des couches inférieures de l'atmosphère et domine quand le ciel est ennuagé. C'est ce qui explique par exemple la couleur opaque des nuages, qui contiennent des gouttes d'eau plus petites que celles produisant un arc-en-ciel.

De ces 3 modélisations que nous venons de voir pour la diffusion de la lumière, on déduit donc 3 modélisations différentes pour les forces optiques. La première, pour des objets petits, consiste à considérer la force de Lorentz exercée par une onde sur un dipôle électrique. La seconde, pour des gros objets, nécessite la réalisation d'un bilan d'impulsion des rayons lumineux incidents et diffusés pour calculer l'impulsion transmise à l'objet. La troisième modélisation demande l'introduction du tenseur des contraintes, où tenseur de Maxwell, dans un bilan d'impulsion électromagnétique entre l'onde incidente et l'objet.

1.4 Objectifs de cette thèse.

Nous n'avons considéré que des objets sphériques diélectriques. Ce choix a été fait afin de simplifier l'analyse en évitant les problèmes de rotation. Nous nous sommes fixés 4 axes de recherche.

1.4.1 Etablissement d'une formule dans le cas résonnant pour un faisceau arbitraire.

Nous avons cherché à établir l'expression des forces optiques exercées par un faisceau arbitraire sur une sphère diéléectrique dans le cas résonnant. Cette formule exacte doit servir par la suite à modéliser des pincettes optiques par exemple, où encore explorer les domaines de validité de l'approximation dipolaire et de l'approximation de l'optique géométrique. De plus, sa validité doit être générale: ce ne sera pas une approximation.

1.4.2 Etude des forces induites

L'étude des forces induites est fondamentale si l'on veut utiliser les forces optiques pour réaliser des cristaux photoniques. Une fois la force optique connue dans le cas résonnant pour un faisceau arbitraire, il nous suffit juste de déterminer l'onde incidente sur une sphère lorsqu'elle fait partie d'un système de N sphères. En effet, des algorithmes très compétitifs ont été récemment mis sur pied afin de régler le problème de la multidiffusion [34]. Ces algorithmes permettent de déterminer la perturbation apportée par la multidiffusion et ainsi de déterminer l'onde incidente sur une sphère lorsqu'elle fait partie d'un système de N sphères.

1.4.3 Etude de la force optique sur des sphères enrobées.

Par sphères enrobées, nous considérons une sphère diélectrique sur laquelle repose plusieurs couches sphériques de diélectriques. En effet, les objets manipulés ne sont pas toujours des sphères homogènes. Par exemple, une cellule peut grossièrement être vue comme une sphère enrobée: la membrane cellulaire est une couche diélectrique entourant une autre sphère diélectrique. Des codes numériques existent pour traiter les cas des multicouches [40]. De plus, nous nous sommes intéressé à l'effet de l'enrobage sur le piégeage: le piégeage est il amélioré? Dégradé? Quels sont les paramètres pertinents: la taille de l'enrobage? Les indices des couches enrobées?

1.4.4 Modélisation de pincettes optiques

Le principal problème pour modéliser des pincettes optiques est d'obtenir un faisceau incident suffisamment pincé. Une bonne approximation est donnée par l'approximation de Davis [54]. Une fois la modélisation désirée obtenue, il nous suffit d'utiliser la formule exacte que nous aurons préalablement développée.

1.5 Plan de ce mémoire.

A chaque objectif correspond une section de ce mémoire. Chaque section comprend une partie théorique, puis des applications numériques.

Dans la section 2, nous nous sommes attachés tout d'abord à définir mathématiquement l'approximation dipolaire et celle de l'optique géométrique. Ces deux approximations permettent d'aborder le problème des forces optiques de manière pédagogique. Nous établissons ensuite la formule exacte, c'est à dire la modélisation des forces optiques dans le cas résonnant. Numériquement, nous avons délimité pour une onde plane les domaines de validité des deux approximations utilisées à l'aide du calcul exact. Puis nous avons modéliser le piégeage d'une sphère dans un système interférentiel à 3 ondes planes.

La section 3 est entièrement consacrée aux forces induites. Nous avons ainsi exposé la méthode que nous utilisons pour déterminer les ondes présentes dans un système à N sphères. Puis nous avons dans la partie numérique de cette section étudié les forces induites apparaissant dans un système à 2 sphères soumises à une onde plane incidente où une onde stationnaire.

C'est dans la section 4 que se trouve l'étude relative aux sphères enrobées. Nous n'avons pas eu le temps pour modéliser correctement des cellules sous l'effet de forces optiques. Cependant, nous avons donné l'algorithme que nous utilisons pour calculer les ondes présentes dans un système multicouche. Puis nous avons étudié les effets sur le piégeage de l'enrobage.

Enfin, la section 5 présente nos principaux résultats, qui ont donné lieu à une publication [24], concernant la modélisation de pincettes optiques. Nous y exposons la manière dont nous avons modélisé

l'onde laser. En application, nous nous sommes intéressés aux forces axiales et radiales exercées dans un faisceau laser, et à l'étude de la disymétrie des forces radiales dans un plan perpendiculaire à l'axe de propagation.

1.6 Comment lire ce mémoire.

Ce mémoire est très dense au niveau des formules. C'est pourquoi nous conseillons au lecteur désireux de le comprendre une double lecture: une première permet d'avoir une vue d'ensemble du travail effectué. Elle ne concerne que les parties de texte qui ne sont pas décalées par une marge. Puis une seconde lecture permet au lecteur de rentrer dans les détails des dérivations des formules. Tout le texte de ce mémoire est alors à prendre en compte.

2 Approximations et calcul exact

2.1 Introduction

La modélisation théorique des forces optiques est intervenue dès le début des années 70. Pour mener à bien cette modélisation, il est obligatoire de prendre en compte à la fois la longueur d'onde du faisceau incident et le rayon de la sphère étudié. En effet, la modélisation de la diffusion d'une onde par une sphère ne sera pas la même pour différentes longueurs d'ondes données, et le calcul de forces optiques doit prendre en compte ces différents régimes de diffusion.

Trois cas se distinguent alors:

- Le rayon de la sphère est petit devant la longueur d'onde du rayonnement: nous nous placerons alors dans le régime de Rayleigh, et utiliserons les lois de l'électromagnétisme (section 2.2).
- La longueur d'onde est petite devant le rayon de la sphère. Il est alors légitime de traiter le faisceau incident dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique (section 2.3).
- La longueur d'onde et le rayon de l'objet sont du même ordre de grandeur; la théorie de Lorenz-Mie nous aidera à expliciter les champs de l'onde diffractée en fonction de ceux de l'onde incidente (section 2.4).

Pour chaque cas, nous donnerons une méthode pour calculer les forces optiques. Bien sûr, le régime résonnant sera plus largement traité. Nous verrons dans ce dernier cas que l'on peut considérer les champs loin de la source afin de simplifier les calculs.

2.2 L'approximation de Rayleigh

L'approximation de Rayleigh intervient lorsque le rayon de la sphère est nettement inférieur à la longueur d'onde du faisceau incident. Par nettement inférieur, on entend généralement un ordre de grandeur en dessous. Cette approximation a l'avantage de proposer un modèle simple afin de comprendre le fonctionnement des pinces optiques [20, 21, 22]. En séparant la force optique en deux parties, l'une qui présente un effet analogue à la force de réaction d'un ressort (la force de gradient \mathbf{F}_G), et l'autre un effet analogue à celui d'une pression (force de radiation, où plus simplement pression de radiation \mathbf{F}_R), l'approximation de Rayleigh donne une vision pédagogique du problème.

Dans une première partie, nous proposerons une méthode afin de dériver les différents termes de la force optique à partir de la formule de la force de Lorentz. Nous montrerons à cette occasion qu'un troisième terme, que nous nommerons force corrective, apparait. Ce terme nous permettra de démontrer que la séparation en deux termes de la force optique est inexacte. Cette démonstartion se fera par l'intermédiaire de quelques exemples d'ondes incidentes, et nous indiquerons ce que prévoit l'approximation de Rayleigh quant à la nature des forces optiques associées à ces ondes.

2.2.1 Méthode utilisée pour exprimer la force optique dans le cadre de l'approximation dipolaire

Dans le cas des sphères dont le rayon a est nettement inférieur à la longueur d'onde λ du faisceau incident, un objet soumis à une onde incidente se comporte comme un dipôle et acquiert ainsi une polarisation. Nous supposerons la sphère plongée dans un milieu incident définit par:

- * son indice optique n_m .
- * sa permittivité électrique relative ϵ_m .
- * sa perméabilité magnétique relative μ_m .

Si on nomme $\rho_p(\mathbf{r},t)$ et $\mathbf{j}_p(\mathbf{r},t)$ les densités de charge et de courant de la sphère, celle-ci subit la force de Lorentz de la part de l'onde incidente de champ électrique $\mathbf{E}_e(\mathbf{r},t)$ et de champ magnétique $\mathbf{B}_e(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \int_{\mathcal{V}} \left(\rho_p(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}_e(\mathbf{r}, t) \right) d\mathcal{V}$$
(1)

Le volume \mathcal{V} contient entièrement l'objet.

Ce que nous allons faire, c'est exprimer la force de Lorentz en fonction du champ excitateur \mathbf{E}_e pour retrouver une formule du type:

$$\boxed{\mathbf{F} = a. \left\| \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}} \right\|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} + b \nabla \left\| \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}} \right\|^2}$$
(2)

où \mathbf{k} est le vecteur d'onde de l'onde incidente, a et b des constantes à déterminer et $\underline{\mathbf{E}}_e$ l'amplitude complexe du champ électrique excitateur vérifiant la relation:

$$\mathbf{E}_{e}\left(\mathbf{r},t\right) = Re\left\{\mathbf{E}_{e}\left(\mathbf{r},t\right)\right\}$$

La formule que nous recherchons est celle que l'on trouve le plus fréquemment pour exprimer les forces optiques dans le cadre de l'approximation dipolaire. La force optique est alors vu comme la somme:

- d'un terme de **pression de radiation** dirigé suivant le vecteur d'onde: $a \cdot \left\| \mathbf{\underline{E}}_{e} \right\|^{2} \frac{\mathbf{k}}{k}$.
- d'un terme de force de gradient: $b\nabla \|\underline{\mathbf{E}}_e\|^2$.

Nous verrons par la suite plus en détail la signification physique de ces 2 termes. Nous verrons de plus qu'un troisième terme apparait. La formule (2) est celle que l'on retrouve le plus souvent dans la modélisation des forces optiques pour de petits objets.

Nous devons alors passer de la relation (1) à la relation (2). Il nous faut donc exprimer \mathbf{B}_e , ρ_p et \mathbf{j}_p en fonction du champ excitateur. Pour \mathbf{B}_e , nous utiliserons l'équation de Maxwell:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t}$$

Par contre, pour exprimer les densités de charge et de courant ρ_p et \mathbf{j}_p en fonction du champ excitateur, nous passerons par deux grandeurs physiques intermédiaires:

- 1) La densité de polarisation de la sphère P.
- 2) Le moment dipolaire de la sphère **p.** Pour utiliser ce dernier, nous ferons l'approximation dipolaire: la sphère sera considérée comme un dipôle.

Puis nous relierons \mathbf{p} et \mathbf{E}_e , et la formule (1) ne dépendra plus que du champ électrique excitateur, ce qui nous permettra d'obtenir une formule du type: (2).

 $[\]overline{}$ l'indice e désigne les champs excitateurs, c'est à dire qui seraient présents si il n'y avait pas d'objet. Nous réservons la lettre i pour les champs internes à l'objet.

2.2.2Expression de la densité de charge ρ_p et de courant j_p en fonction de la densité de polarisation P.

L'intéraction entre l'onde incident et l'objet est caractérisée par la densité de polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$. Par la suite afin de ne pas surcharger l'écriture, nous abandonnerons la dépendance en (\mathbf{r},t) . Cette densité de polarisation est reliée aux densités de charge et de courant de la sphère par les relations:

$$\rho_p = -div \mathbf{P}$$
$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

La force de Lorentz devient ainsi, en éliminant les densités de charge et de courant au profit de la densité de polarisation:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \left(-div \, \mathbf{P} \right) \mathbf{E}_e \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_e \, d\mathcal{V}$$

Nous allons à présent expliciter le premier terme:

$$\mathbf{F}_p = -\int_{\mathcal{V}} (div \, \mathbf{P}) \, \mathbf{E}_e \, d\mathcal{V}$$

à l'aide de la relation vectorielle

$$div(f\mathbf{a}) = fdiv\,\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\,f)$$
$$fdiv\,\mathbf{a} = div(f\mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\,f)$$

Si on étudie la composante suivant un axe \mathbf{x} de \mathbf{F}_p , c'est à dire $(\mathbf{F}_p)_x = -\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E}_e)_x \, div \, \mathbf{P} \, d\mathcal{V}$, on se rend compte que \mathbf{P} joue le rôle de \mathbf{a} dans la relation ci dessus, et $(\mathbf{E}_e)_x$ celui de f. Ainsi,

$$\left(\mathbf{F}_{p}\right)_{x}=-\int_{\mathcal{V}}\left(\mathbf{E}_{e}\right)_{x}div\,\mathbf{P}\,d\mathcal{V}=-\int_{\mathcal{V}}div\left(\left(\mathbf{E}_{e}\right)_{x}\mathbf{P}\right)\,d\mathcal{V}+\int_{\mathcal{V}}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{grad}\right)\left(\mathbf{E}_{e}\right)_{x}\,d\mathcal{V}$$
 Le théorème de Green Ostrogradsky implique que, si S est une surface fermée délimitant le

volume $\mathcal V$ et $\widehat{\mathbf n}$ un vecteur unitaire normal à cette surface:

$$-\int_{\mathcal{V}} div \left(\left(\mathbf{E}_{e} \right)_{x} \mathbf{P} \right) d\mathcal{V} = \oint_{S} \left(\left(\mathbf{E}_{e} \right)_{x} \mathbf{P} \right) \cdot \widehat{\mathbf{n}} ds$$

 $-\int_{\mathcal{V}} div \left(\left(\mathbf{E}_{e} \right)_{x} \mathbf{P} \right) d\mathcal{V} = \oint_{S} \left(\left(\mathbf{E}_{e} \right)_{x} \mathbf{P} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$ Or, puisque \mathcal{V} contient l'objet et que le vecteur densité de polarisation \mathbf{P} est nul en déhors de l'objet, on en déduit que ce vecteur est nul en tous points de S. On a donc:

$$\oint_{S} ((\mathbf{E}_e)_x \, \mathbf{P}) \cdot \widehat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

et par conséquent:

$$\mathbf{F}_p = \int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}
ight) \, \mathbf{E}_e \, d\mathcal{V}$$

soit

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad} \right) \mathbf{E}_e \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_e \, d\mathcal{V}$$

La force de Lorentz se réécrit grâce au calcul précédent:

$$\boxed{\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad} \right) \mathbf{E}_e \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \wedge \mathbf{B}_e \, d\mathcal{V}}$$
(3)

Cette relation se retrouve généralement dans la littérature, notamment dans [20, 21, 22].

Utilisation de l'approximation dipolaire:

C'est à ce moment de notre calcul que nous allons faire intervenir le fait que nous sommes dans l'approximation de Rayleigh.

approximation dipolaire: les champs excitateurs et leurs dérivées peuvent être considérées $\overline{\text{comme des grandeurs}}$ physiques constantes sur le volume \mathcal{V} .

Cette hypothèse s'applique ici à \mathbf{B}_e et $\mathbf{grad}\mathbf{E}_e$. Ainsi, l'expression de la force devient:

$$\mathbf{F}_{dip} {\simeq} \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \, d\mathcal{V}
ight)$$
 , $\mathbf{grad} \, \mathbf{E}_e + \left(\int_{\mathcal{V}} rac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \, d\mathcal{V}
ight) \wedge \mathbf{B}_e$

expression que nous nommerons "force dipolaire", où \mathbf{F}_{dip} par la suite. Remarquons dès maintenant que $\mathbf{grad}\,\mathbf{E}_e$ est un tenseur d'ordre 2, ce qui permet au produit scalaire $(\int_{\mathcal{V}}\mathbf{P}\,d\mathcal{V})$. $\mathbf{grad}\,\mathbf{E}_e$ d'être un vecteur. En définissant le moment dipolaire \mathbf{p} comme étant l'intégrale sur un volume contenant l'objet de la densité de polarisation:

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \, d\mathcal{V} \tag{4}$$

la force dipolaire se réécrit:

$$\mathbf{F}_{dip} = \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \, d\mathcal{V} \right) \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{E}_{e} + \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \, d\mathcal{V} \right) \wedge \mathbf{B}_{e}$$

$$\mathbf{F}_{dip} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{E}_{e} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \wedge \mathbf{B}_{e}$$
(5)

Ce résultat est exact dans le cas idéalisé d'un point dipôle, mais simplement approché pour notre sphère

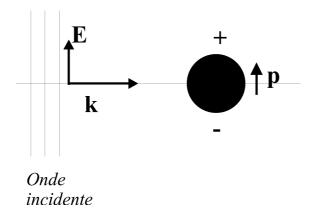


Figure 3: Sous l'effet d'un champ électrique incident E, un diélectrique acquiert un moment dipolaire p.

du fait de l'approximation. Comme nous travaillons aux fréquences optiques élevées, il nous faut faire une moyenne temporelle de cette expression:

$$\mathbf{F}_{dip} = rac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{E}_e + rac{d\mathbf{p}}{dt} \wedge \mathbf{B}_e
ight]$$

Nous allons à présent exprimer \mathbf{p} et \mathbf{B}_e en fonction de \mathbf{E}_e .

2.2.4 Expression du moment dipolaire p et du champ magnétique excitateur \mathbf{B}_e en fonction du champ électrique excitateur \mathbf{E}_e

Nous allons introduire ici les amplitudes complexes des champs excitateurs. Celles-ci vont nous permettre d'exprimer le moment dipolaire \mathbf{p} et le champ magnétique excitateur \mathbf{B}_e en fonction du champ électrique excitateur \mathbf{E}_e .

a) Définition des amplitudes complexes

Dans un premier temps, définissons les champs excitateurs comme étant de la forme:

$$\mathbf{E}_{e}(\mathbf{r},t) = Re\left\{\underline{\mathbf{E}}_{e}(\mathbf{r},t)\right\}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{e}(\mathbf{r},t) = \overrightarrow{\mathcal{E}}_{e}(\mathbf{r},\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{B}_{e}(\mathbf{r},t) = Re\left\{\underline{\mathbf{B}}_{e}(\mathbf{r},t)\right\}$$

$$\mathbf{B}_{e}(\mathbf{r},t) = \overrightarrow{\mathcal{B}}_{e}(\mathbf{r},\omega) e^{-i\omega t}$$

et le moment dipolaire:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)\right\}$$
$$\underline{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = \overrightarrow{p}(\mathbf{r},\omega) e^{-i\omega t}$$

Pour une sphère localisée en \mathbf{r} de rayon nettement inférieure à la longueur d'onde du faisceau incident, on considère que le moment dipolaire est proportionnel au champ électrique appliqué:

$$\overrightarrow{p}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon_0 \epsilon_m \alpha(\omega) \overrightarrow{\mathcal{E}_e}(\mathbf{r},\omega) \tag{6}$$

où $\alpha\left(\omega\right)$ est la polarisabilité électrique, fonction de la pulsation ω du rayonnement incident, ϵ_0 la permittivité électrique du vide et ϵ_m la permittivité électrique relative du milieu incident. De plus, il découle de ces nouvelles notations les relations évidentes:

$$\mathbf{E}_{e} = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{E}}_{e} + \underline{\mathbf{E}}_{e}^{*} \right)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^{*} \right)$$

$$(7)$$

Nous avons à ce moment du calcul la formule (5) en fonction des grandeurs (\mathbf{E}_e, \mathbf{p}). Les formules (7) vont nous permettre d'exprimer la force dipolaire en fonction des grandeurs complexes ($\underline{\mathbf{E}}_e, \underline{\mathbf{p}}$). Puis nous exprimerons cette force en fonction des grandeurs ($\overrightarrow{\mathcal{E}}_e, \overrightarrow{p}$): cela nous permettra d'utiliser la relation (6). Ainsi, nous aurons exprimer le moment dipolaire en fonction du champ électrique excitateur.

b) Introduction des amplitudes complexes dans la formule dipolaire

La moyenne temporelle de la force devient alors, en faisant la substitution $(\mathbf{E}_e, \mathbf{p}) \to (\mathbf{E}_e, \mathbf{p})$:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^* \right) \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}_e} + \underline{\mathbf{E}_e^*} \right) + \left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\underline{\mathbf{p}}}^* \right) \wedge \left(\underline{\mathbf{B}_e} + \underline{\mathbf{B}_e^*} \right) \right]$$

Le premier terme à intégrer est:

$$\begin{split} \left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^*\right) \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}_e} + \underline{\mathbf{E}_e^*}\right) &= \underline{\mathbf{p}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{E}_e} + \underline{\mathbf{p}}^* \cdot \nabla \underline{\mathbf{E}_e} + \underline{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}_e}\right)^* + \underline{\mathbf{p}}^* \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}_e}\right)^* \\ &= \overrightarrow{p} \, e^{-i\omega t} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e} e^{-i\omega t} + \overrightarrow{p}^* e^{i\omega t} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e} e^{-i\omega t} + \overrightarrow{p} \, e^{-i\omega t} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} e^{i\omega t} + \overrightarrow{p}^* e^{i\omega t} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} e^{i\omega t} \\ \left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^*\right) \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}_e} + \underline{\mathbf{E}_e^*}\right) &= \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e} e^{-i2\omega t} + \overrightarrow{p}^* \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e} + \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} + \overrightarrow{p}^* \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} e^{i2\omega t} \end{split}$$

Seuls les termes constants dans le temps donneront un résultat non nul lorsque l'on prendra leurs moyennes temporelles:

$$\begin{split} \frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^* \right) \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}} + \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}^* \right) \right] &= \frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}} e^{-i2\omega t} + \overrightarrow{p}^* \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* + \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* + \overrightarrow{p}^* \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* e^{i2\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\overrightarrow{p}^* \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* + \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* \right] \\ \frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\left(\underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}^* \right) \cdot \nabla \left(\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}} + \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}^* \right) \right] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}}_{\underline{e}}^* \right\} \end{split}$$

On démontre de manière analogue que:

$$\frac{1}{4T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\left(\underline{\underline{\mathbf{p}}} + \underline{\underline{\mathbf{p}}}^* \right) \wedge \left(\underline{\mathbf{B}}_{\underline{e}} + \underline{\mathbf{B}}_{\underline{e}}^* \right) \right] = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ i \omega \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{\mathcal{B}}_{\underline{e}}^* \right\}$$

ce qui donne ainsi:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \overrightarrow{p} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}} - i\omega \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{\mathcal{B}}_{e}^{*} \right\}$$

c) Expression de \overrightarrow{p} et $\overrightarrow{\mathcal{B}}_e$ en fonction de $\overrightarrow{\mathcal{E}_e}$

Pour avoir une expression uniquement liée au champ électrique, et comme nous travaillons avec les amplitudes complexes, nous pouvons à présent utiliser la relation de Maxwell:

$$i\omega \overrightarrow{\mathcal{B}}_{e} = \nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}$$

et l'expression du moment dipolaire en fonction du champ électrique

$$\overrightarrow{p}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon_0 \epsilon_m \alpha(\omega) \overrightarrow{\mathcal{E}_e}(\mathbf{r},\omega)$$

si bien que l'on obtient:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(\omega \right) \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}} + \alpha \left(\omega \right) \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}} \right) \right\}$$
(8)

où nous avons utlisé le fait que ϵ_m est un réel constant. Rappelons que $\nabla \overline{\mathcal{E}_e^*}$ est un tenseur d'ordre 2 dont le produit scalaire avec un vecteur donne un vecteur. Ceci est une expression de la force dipolaire en fonction du terme $\overrightarrow{\mathcal{E}_e}$. Cette étape est nécessaire dans le but d'obtenir une formule de force du type (2):

$$\mathbf{F} = a. \left\| \underline{\mathbf{E}_e} \right\|^2 \frac{\mathbf{k}}{k} + b \nabla \left\| \underline{\mathbf{E}_e} \right\|^2$$

Déterminons un repère cartésien (Oxyz) centré sur la sphère. Nous déterminerons plus précisément les axes de ce repère par la suite. Nous utilisons ce repère pour pouvoir travailler avec les composantes de \mathbf{F}_{dip} .

La composante suivant x de la formule vectorielle (8) s'écrit:

$$\left(\mathbf{F}_{dip}\right)_{x}=\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\operatorname{Re}\left\{\alpha\left(\omega\right)\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\cdot\nabla\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x}+\alpha\left(\omega\right)\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\wedge\left(\nabla\wedge\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{*}\right\}$$

Dans un premier temps, regardons ce que donne la composante de $\overrightarrow{\mathcal{E}_e} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*}$ suivant \mathbf{x} . Ecrivons le tenseur d'ordre 2 $\nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*}$ sous forme matricielle:

$$\nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{x} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{y} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{x} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{y} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{x} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{y} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)_{z} \end{pmatrix}$$

Le premier terme de $\langle \mathbf{F}_{dip} \rangle_x$ est par conséquent

$$\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x} = \left(\left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}_{e})_{x} & (\mathcal{E}_{e})_{y} & (\mathcal{E}_{e})_{z} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} \\ \left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x} = \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} + \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} + \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} \\ \end{array}\right) \right)_{x}$$

Développons le second terme de $\langle \mathbf{F}_{dip} \rangle_{x}$:

$$\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} = \left(\left(\begin{array}{c} (\mathcal{E}_{e})_{x} \\ (\mathcal{E}_{e})_{y} \\ (\mathcal{E}_{e})_{z} \end{array}\right) \wedge \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} \end{array}\right)\right)_{x} \\
\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} = \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}\right) - \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z}\right)\right) \\
\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} = \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}\right) - \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z}\right)\right) \\
\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} = \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}\right) - \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z}\right)\right) \\
\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} = \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}\right) - \left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} + \frac{\partial}{\partial z} \left$$

En sommant ces deux termes, nous avons:

$$\begin{split} &\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\cdot\nabla\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x}+\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\wedge\left(\nabla\wedge\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} \\ &=\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}+\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}+\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x} \\ &+\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}\right)-\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z}\right) \\ &\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\cdot\nabla\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x}+\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\wedge\left(\nabla\wedge\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x} \\ &=\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{x}+\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{y}+\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)_{z} \end{split}$$

soit le résultat:

$$\overline{ \left(\overrightarrow{\mathcal{E}_e} \cdot \nabla \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} \right)_x + \left(\overrightarrow{\mathcal{E}_e} \wedge \left(\nabla \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}_e^*} \right) \right)_x = \left(\mathcal{E}_e \right)_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_e^* \right)_x + \left(\mathcal{E}_e \right)_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_e^* \right)_y + \left(\mathcal{E}_e \right)_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E}_e^* \right)_z }$$

Si l'on utilise la notation tensorielle:

$$(\mathcal{E}_e)_x \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_e^*)_x + (\mathcal{E}_e)_y \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_e^*)_y + (\mathcal{E}_e)_z \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_e^*)_z = (\mathcal{E}_e)_j \partial^x (\mathcal{E}_e^*)^j$$

on démontre grâce au calcul précédent le résultat

$$\boxed{\alpha\left(\omega\right)\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\cdot\nabla\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)_{x}+\alpha\left(\omega\right)\left(\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}}\wedge\left(\nabla\wedge\overrightarrow{\mathcal{E}_{e}^{*}}\right)\right)_{x}=\alpha\left(\omega\right)\left(\mathcal{E}_{e}\right)_{j}\partial^{x}\left(\mathcal{E}_{e}^{*}\right)^{j}}$$

et par conséquent, l'expression de la composante suivant x de la formule (8) devient:

$$(\mathbf{F}_{dip})_{x} = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2} \operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(\omega \right) \left(\mathcal{E}_{e} \right)_{j} \partial^{x} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)^{j} \right\}$$

Généralisons ce résultat: pour la *i*-eme coordonnée (i = x, y, z), on a donc dans cette direction une force $(\mathbf{F}_{dip})_i$ égale à:

$$(\mathbf{F}_{dip})_{i} = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2} \operatorname{Re} \left[\alpha. \left(\mathcal{E}_{e} \right)_{j} \partial^{i} \left(\mathcal{E}_{e}^{*} \right)^{j} \right]$$
(9)

La polarisabilité d'un dipôle est dans le cas général un nombre complexe: $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1$. La partie réelle de la polarisabilité est celle que l'on retrouve dans le cas statique, et qui est donnée par la formule:

$$\alpha_0 = 4\pi a^3 \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 2}$$

où ρ est un paramètre que nous retrouverons énormément par la suite. Il s'agit du contraste d'indice, définit comme le rapport entre l'indice optique de la sphère n_s et celui du milieu extérieur n_m :

$$\rho = \frac{n_s}{n_m}$$

Le terme α_1 est quant à lui lié au rayonnement. Il vaut (cf annexe E):

$$\alpha_1 = \frac{k^3}{6\pi} \alpha_0^2$$

Utilisons le terme $\underline{E_e}$, qui désigne le module de l'amplitude complexe du champ électrique $\underline{\mathbf{E}_e}$. Puisque l'on peut écrire également:

$$\begin{split} \left(\underline{E_e}\right)_j &= \left(\mathcal{E}_e\right)_j e^{-i\omega t} \\ \text{et donc } \left(\mathcal{E}_e\right)_j \partial^i \left(\mathcal{E}_e^*\right)^j &= \left(\underline{E_e}\right)_j \partial^i \left(\underline{E_e^*}\right)^j \end{split}$$

la force se réécrit: :

$$\boxed{ (\mathbf{F}_{dip})_i = \underbrace{\frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \alpha_0 \operatorname{Re} \left[\left(\underline{E_e} \right)_j \partial^i \left(\underline{E_e^*} \right)^j \right] - \underbrace{\frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \alpha_1 \operatorname{Im} \left[\left(\underline{E_e} \right)_j \partial^i \left(\underline{E_e^*} \right)^j \right]}_{\boxed{1}} } }$$
(10)

2.2.5 La force de gradient

On définit l'expression $\boxed{1}$ de la formule (10) comme étant $(F_g)_i$. C'est la composante suivant la direction i de \mathbf{F}_g , la force de gradient. Voyons pourquoi elle porte ce nom:

$$(F_g)_i \equiv \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \alpha_0 \operatorname{Re} \left[\left(\underline{E_e} \right)_j \partial^i \left(\underline{E_e^*} \right)^j \right]$$
$$(F_g)_i = \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{4} \alpha_0 \partial^i \left| \underline{\mathbf{E}_e} \right|^2$$

expression où on a utilisé le fait que Re $\left[\left(\underline{E_e}\right)_j\partial^i\left(\underline{E_e^*}\right)^j\right]=\partial^i\left|\underline{\mathbf{E}_e}\right|^2$. En généralisant à toutes les composantes, on obtient:

 $\mathbf{F}_{g}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{4}\alpha_{0}\nabla\left|\underline{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r}\right)\right|^{2}$

où on a réintroduit le terme de dépendance spatiale (\mathbf{r}). Cette force de gradient aura tendance à ramener la sphère dans la zone où $|E_i(\mathbf{r})|^2$ est maximale, à la manière d'un ressort, puisque les zones où $|E_i(\mathbf{r})|^2$ est maximale correspondent à des puits de potentiel. De plus, elle agit dans toutes les directions.

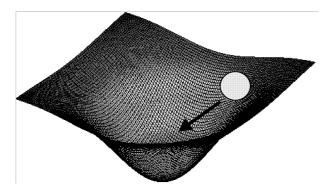


Figure 4: Force de gradient: l'onde incidente crée un puits de potentiel qui attire la sphère. Celle-ci réagit au gradient du module au carré du champ électrique.

Elle est donc sensible au gradient du module au carré de l'amplitude complexe du champ électrique excitateur.

2.2.6 Pression de radiation et force corrective

Le terme $\boxed{2}$ de l'expression (10) ne peut s'expliciter aussi directement. En effet, $(\underline{E_e})_j \partial^i \left(\underline{E_e^*}\right)^j$ est à priori complexe, et c'est sa partie réelle qui est égale à $|\underline{\mathbf{E}_e}(\mathbf{r})|^2$; par conséquent, $\mathrm{Im}\left[\left(\underline{E_e}\right)_j \partial^i \left(\underline{E_e^*}\right)^j\right]$ est non nulle. Pour continuer notre calcul, nous allons considérer que le faisceau incident se propage selon une direction particulière. Nous allons identifier cette direction avec celle d'un axe z (en fait, cette direction est définie par le vecteur d'onde \mathbf{k}). Ainsi nous allons exprimer le champ électrique complexe incident sous la forme:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}_{e}}(\mathbf{r}) = \widetilde{\underline{\mathbf{E}}_{e}}(\mathbf{r}) e^{ikz}$$

$$\widetilde{\underline{\mathbf{E}}_{e}}(\mathbf{r}) = \underline{\underline{\mathbf{E}}_{e}}(\mathbf{r}) e^{-ikz}$$

Le terme $\widetilde{\mathbf{E}}_e$, de module \widetilde{E}_e , est donc égal à l'amplitude complexe du champ électrique $\underline{\mathbf{E}}_e$ privée du terme propagatif e^{ikz} . On sent bien à cette étape que la direction z jouera un rôle particulier par rapport à x et y, qui elles seront équivalentes. C'est pour cette raison en fait que l'on introduit la notation supplémentaire $\widetilde{\mathbf{E}}_e$.

Cette expression du champ électrique va en effet nous permettre de retrouver à partir de la dérivation du terme 2 la pression de radiation \mathbf{F}_s et ce que nous appelerons force corrective \mathbf{F}_c . Le terme 2

s'explicite alors, en ce qui concerne ce que nous appelerons la **force radiale** (dans une direction orthogonale à celle de propagation z):

$$-\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1}\operatorname{Im}\left[\left(\underline{E_{e}}\right)_{j}\partial^{x}\left(\underline{E_{e}^{*}}\right)^{j}\right] = -\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1}\operatorname{Im}\left[\left(\widetilde{E_{e}}\right)_{j}e^{ikz}\partial^{x}\left(\left(\widetilde{E_{e}}e^{ikz}\right)^{j}\right)^{*}\right]$$
$$= -\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1}\operatorname{Im}\left[\left(\widetilde{E_{e}}\right)_{j}\partial^{x}\left(\widetilde{E_{e}^{*}}\right)^{j}\right]$$

tandis que pour la force axiale (dans la direction de l'axe de propagation du faisceau z), comme:

$$\partial_z \underline{\mathbf{E}_e^*} = \partial_z \left(\widetilde{\mathbf{E}_e^*} e^{-ikz} \right)$$
$$\partial_z \underline{\mathbf{E}_e^*} = -ike^{-ikz} \widetilde{\mathbf{E}_e^*} + e^{-ikz} \partial_z \widetilde{\mathbf{E}_e^*}$$

on en déduit :

$$-\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1}\operatorname{Im}\left[\left(\underline{E_{e}}\right)_{j}\partial^{z}\left(\underline{E_{e}^{*}}\right)^{j}\right] = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}k\alpha_{1}\left|\widetilde{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r}\right)\right|^{2} - \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1}\operatorname{Im}\left[\left(\widetilde{E_{e}}\right)_{j}\partial^{z}\left(\widetilde{E_{e}^{*}}\right)^{j}\right]$$

Il est à noter que nous avons l'égalité:

$$\left(\widetilde{E_e}\right)_i \partial^i \left(\widetilde{E_e^*}\right)^j = \left(\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*}\right)_i$$

l'indice i désignant x, y ou z. Par conséquent, le terme 2 de (10) est la composante suivant d'un vecteur égal à la somme de la pression de radiation \mathbf{F}_s et de la force corrective \mathbf{F}_c , définis par:

$$\boxed{ \mathbf{F}_{s} = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}k\alpha_{1} \left| \widetilde{\mathbf{E}_{e}} \left(\mathbf{r} \right) \right|^{2} \widehat{\mathbf{z}} }$$

$$\boxed{ \mathbf{F}_{c} = -\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\alpha_{1} \operatorname{Im} \left[\widetilde{E}_{e} \nabla \widetilde{E}_{e}^{*} \right] }$$

Dans ces dernières formules, nous avons introduit le terme $\hat{\mathbf{z}}$: il désigne le vecteur unitaire suivant la direction z. Par la suite, tous les vecteurs unitaires auront un "chapeau", pour les différencier des vecteurs ordinaires. Le terme \mathbf{F}_s est un terme intervenant uniquement dans la direction de propagation, et proportionnel au module au carré du champ électrique complexe $\left|\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r})\right|^2$: c'est ce que l'on appelle la pression de radiation.

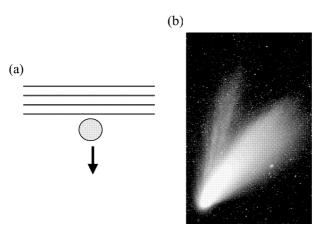


Figure 5: La pression de radiation: l'onde incidente pousse la sphère dans sa direction de propagation (a). Dans la nature on retrouve ce phénomène avec les comètes (b) comète Hale-Bopp: la lumière du soleil pousse les particules situées sur le noyau de la comète. Ces particules forment alors la queue de la comète.

Le troisième terme est une force corrective \mathbf{F}_c ; ce terme nous permettra par la suite de démontrer que les forces optiques ne peuvent clairement se décomposer en force de gradient et pression de radiation,

même dans le cas de l'approximation dipolaire. Nous lui avons donné le nom de corrective car les deux autres forces (de gradient et de radiation), sont généralement dérivée en ignorant la diffusion (dérivation de \mathbf{F}_g), où en ignorant la forme du faisceau (dérivation de \mathbf{F}_s). La force corrective vient donc de la prise en compte à la fois de la diffusion de la sphère et des variations spatiales du champ.

On obtient l'expression de la force optique appliquée par un faisceau sur une sphère dans le cadre de l'approximation de Rayleigh:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{4} \alpha_0 \nabla \left| \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}} \left(\mathbf{r} \right) \right|^2 + \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} k \alpha_1 \left| \widetilde{\mathbf{E}}_{\underline{e}} \left(\mathbf{r} \right) \right|^2 \widehat{\mathbf{z}} - \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \alpha_1 \operatorname{Im} \left[\widetilde{E}_{\underline{e}} \nabla \widetilde{E}_{\underline{e}}^* \right]$$

$$\mathbf{F}_{dip} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c$$
(11)

Nous avons ainsi retrouver l'expression que nous recherchions:

(2)
$$\mathbf{F} = a. \left\| \underline{\mathbf{E}}_{e} \right\|^{2} \frac{\mathbf{k}}{k} + b \nabla \left\| \underline{\mathbf{E}}_{e} \right\|^{2}$$

2.2.7 Relation entre irradiance et force dipolaire

L'un des problèmes qui se posent à nous afin de corroborer à la pratique nos résultats théoriques est que généralement, ce n'est pas $\left|\underline{\mathbf{E}}_{e}(\mathbf{r})\right|^{2}$ qui est mesuré, mais plutot l'irradiance du faisceau $I(\mathbf{r})$. Ce problème est traditionnellement résolu en faisant intervenir l'approximation:

$$\epsilon_{m}\epsilon_{0}\left|\underline{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r}\right)\right|^{2}\simeq\frac{2I\left(\mathbf{r}\right)}{v_{m}}=\frac{2n_{m}I\left(\mathbf{r}\right)}{c}$$

où v_m est la vitesse de l'onde dans le milieu et c sa vitesse dans le vide. Bien que cette approximation soit régulièrement faite en théorie de la diffusion, elle n'est strictement vraie que dans le cas d'une onde plane, mais est bonne dans le cas par exemple de faisceaux lasers ayant un faible angle d'ouverture. Elle n'est absolument pas justifiée dans le cas général pour une onde incidente quelconque.

La force dipolaire s'écrit en utilisant cette approximation:

$$\mathbf{F}_{dip} \simeq \frac{n_m}{2c} \alpha_0 \nabla I(\mathbf{r}) + \frac{n_m}{c} k \alpha_1 I(\mathbf{r}) \widehat{\mathbf{z}} - \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \alpha_1 \operatorname{Im} \left[\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*} \right]$$
(12)

Rappelons que les deux premiers termes sont ceux usuellement dérivés dans la théorie des forces optiques dans le cadre de l'approximation dipolaire.

2.2.8 Resultats numériques

Nous allons utiliser plusieurs types de champs incidents afin de mettre en évidence les forces de pression et de gradient auxquelles on associe usuellement les forces optiques. Le premier sera une simple onde plane; nous verrons au cours de cette exemple l'expression de la pression de radiation correspondante. Ensuite, nous utiliserons une onde stationnaire, constituée de deux ondes planes contre-propagatives, afin de mettre en évidence les forces de gradient. Enfin, nous utiliserons un faisceau gaussien dans le but de démontrer que dans le cas général, il est impossible de séparer clairement la force optique en une force de radiation d'une part, et une force de gradient d'autre part. Nous verrons que cette impossibilité provient de la nature même de la force corrective, dont nous nous attacherons à décrire le comportement dans chacun des 3 exemples, et dont nous démontrerons l'ordre de grandeur non négligeable dans certains cas. Les deux premiers exemples nous permettront de donner des définitions simples de notions essentielles comme la section efficace de diffusion, la section efficace de piégeage, le potentiel de piégeage et les notions d'équilibres stables et instables.

cas d'une onde plane: Soit une onde plane se dirigeant suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$, et dont le champ électrique associé s'écrit suivant les notation adoptées au paragraphe précédent::

$$\mathbf{E}_{e}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r},t)\right\}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r},t) = e^{i(kz-\omega t)}\widehat{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r}) e^{i(kz-\omega t)}\widehat{\mathbf{y}}$$
soit $\widetilde{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r}) = 1$

La formule

$$\epsilon_m \epsilon_0 \left| \underline{\mathbf{E_e}} \left(\mathbf{r} \right) \right|^2 \simeq \frac{2I \left(\mathbf{r} \right)}{v_m}$$

nous indique la valeur de l'intensité lumineuse constante caractéristique d'une onde plane:

$$\begin{split} I &= \frac{v_m \epsilon_m \epsilon_0}{2} = \frac{c}{n_m} \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_0 \mu_0 \mu_m}} \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \\ I &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_0}{\mu_0 \mu_m}} \end{split}$$

Appliquons à cette onde plane la formule (12):

$$\mathbf{F}_{dip} \simeq \frac{n_m}{2c} \operatorname{Re}\left[\alpha\right] \nabla I\left(\mathbf{r}\right) + \frac{n_m}{c} \sigma_s I\left(\mathbf{r}\right) \widehat{\mathbf{z}} - \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \frac{\sigma_s}{k} \operatorname{Im}\left[\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*}\right]$$

Nous avons introduit la section efficace de diffusion σ_s dans la formule ci dessus. Cette section efficace à la dimension d'une surface, et est intimemement liée au rayonnement. Elle est définit comme le rapport de la quantité d'énergie prélevée par la diffusion:

$$\sigma_s = \frac{\text{\'energie rayonn\'ee}}{\text{\'energie incidente}}$$
$$\sigma_s = \frac{\lim_{r \to \infty} \int r^2 \widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_s(\mathbf{r}) d\Omega}{\lim_{r \to \infty} \int r^2 \widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_e(\mathbf{r}) d\Omega}$$

où \mathbf{S}_s et \mathbf{S}_e désignent respectivement les vecteurs de Poynting des ondes diffusées et incidente. Dans le cas d'un dipôle électrique, $\sigma_s = k\alpha_1$ [47].

Le fait que I et $\widetilde{E_e}$ soient constants implique une formule de force très simple:

$$\mathbf{F}_{dip} = I \frac{n_m}{c} \sigma_s \widehat{\mathbf{z}}$$

Généralement, on définit la section efficace de piégeage σ_p par la relation:

$$\mathbf{F}_{dip} = I \frac{n_m}{c} \sigma_p \hat{\mathbf{z}}$$

On voit que dans notre exemple, $\sigma_p = \sigma_s$, égalité caractéristique d'une onde plane. Les sections efficaces sont introduites par analogie avec la mécanique des fluides, où la force est égale au produit d'une pression (ici $I\frac{n_m}{c}$) par une surface (ici σ_p). Par la suite, nous démontrerons que dimensionnellement, les sections efficaces ont bien les dimensions d'une surface.

Revenons à notre force optique dipolaire dans le cas où l'onde incidente est plane: la force de gradient et la force corrective ont disparues; elles sont en effet directement liées aux gradients du champ incident et de l'intensité lumineuse du faisceau incident, inexistant dans le cas d'une onde plane. La force corrective n'est donc pas une pression de radiation.

Utilisons l'expression littérale de la section efficace d'extinction:

$$\mathbf{F}_{dip} = I \frac{n_m}{c} \widehat{\mathbf{z}} \left(\pi a^2 \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \frac{8}{3} \pi \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 2} \right)^2 \right)$$

Nous plaçons cette formule ici uniquement à titre indicatif en ce qui concerne cet exemple. En effet, un paramètre d'étude plus approprié est l'efficacité de piégeage Q_p , définit comme le rapport entre la section efficace de piégeage et l'aire d'un disque ayant même rayon que l'objet (c'est à dire la section géométrique de l'objet):

$$Q_p = \frac{\sigma_p}{\pi a^2} = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \frac{8}{3}\pi \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 2}\right)^2 = \chi^4.C(\rho)$$

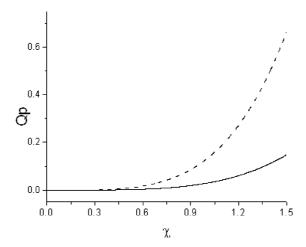


Figure 6: Efficacité pour une onde plane incidente: $\rho = 1.09$ (courbe solide) et $\rho = 1.19$ (courbe pointillée).

La quantité Q_p permet de quantifier l'effet de la diffusion sur la section efficace indépendamment de la taille de l'objet. De plus, elle permet de désolidariser notre étude de l'intensité I de l'onde incidente. L'expression $\chi = \frac{2\pi a}{\lambda}$ est le paramètre de taille du système: si la longueur d'onde λ reste constante, il augmente avec la taille de la sphère de rayon a. Pour une même longueur d'onde incidente, l'efficacité de piégeage Q_p augmente donc comme la puissance 4 du rayon de la sphère.

Le fait que Q_p tende vers l'infini lorsque le rayon de la sphère augmente correspond bien sûr aux limites de l'approximation dipolaire. Lorsque nous aurons exprimé le calcul exact, nous discuterons de la validité de cette approximation dans le cas d'une onde plane.

Cas d'une onde stationnaire Considérons à présent une onde stationnaire constituée de deux ondes planes contre-propagatives, la première qui se propage dans le sens des z positifs, la seconde dans celui des z négatifs, et dont le champ électrique s'écrit:

$$\mathbf{E}_{e}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r},t)\right\}$$

$$\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left(e^{i(kz-\omega t)} + e^{i(-kz-\omega t)}\right)\widehat{\mathbf{y}} = \cos(kz)e^{-i\omega t}\widehat{\mathbf{y}}$$

$$\left|\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r})\right|^{2} = (\cos(kz))^{2} = \frac{\cos(2kz) + 1}{2}$$

$$\nabla\left|\underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r})\right|^{2} = -k\sin(2kz)\widehat{\mathbf{z}}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_{\underline{e}}(\mathbf{r})e^{-ikz} = \cos(kz)e^{-i\omega t}e^{-ikz}\widehat{\mathbf{y}}$$

On trouve par conséquent:

$$\left[\widetilde{E_e}\nabla\widetilde{E_e^*}\right] = \cos(kz)e^{-ikz}\left(-k\sin(kz)e^{ikz} + ik\cos(kz)e^{ikz}\right)\widehat{\mathbf{z}}$$
$$\operatorname{Im}\left(\widetilde{E_e}\nabla\widetilde{E_e^*}\right) = k\left(\cos(kz)\right)^2\widehat{\mathbf{z}}$$

Nous appliquons la formule (11) qui nous donne la force exercée par cette onde sur un objet:

$$\mathbf{F}_{dip} = \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{4}\alpha_{0}\nabla\left|\underline{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r}\right)\right|^{2} + \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\sigma_{s}\left|\underline{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r}\right)\right|^{2}\widehat{\mathbf{z}} - \frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\frac{\sigma_{s}}{k}\operatorname{Im}\left[\widetilde{E_{e}}\nabla\widetilde{E_{e}^{*}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\epsilon_{m}\epsilon_{0}\alpha_{0}k\sin(2kz)\widehat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2}\epsilon_{m}\epsilon_{0}\sigma_{s}\cos^{2}(kz)\widehat{\mathbf{z}} - \frac{1}{2}\epsilon_{m}\epsilon_{0}\sigma_{s}\cos^{2}(kz)\widehat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F}_{dip} = -\frac{1}{4}\epsilon_{m}\epsilon_{0}\alpha_{0}k\sin(2kz)\widehat{\mathbf{z}}$$

$$(13)$$

Seule la force de gradient subsiste: la force corrective a permis d'éliminer la pression de radiation. Ceci semble tout à fait logique si l'on considère que l'onde stationnaire avec laquelle nous travaillons crée un potentiel d'énergie qui présente une succession de noeuds et de ventres d'énergie suivant la direction z, énergie dont dérive la force appliquée à la sphère. La force corrective est donc, ici, un terme de pression de radiation, tandis que pour une simple onde plane, elle correspondait à un terme de gradient. Ces deux simples exemples démontrent donc qu'il est impossible de séparer disctinctement la force optique en un terme de gradient et un terme de radiation. Remarquons pour finir qu'ici, force corrective et pression de radiation sont donc du même ordre de grandeur puisqu'elles s'annulent: la force corrective n'est donc pas toujours négligeable devant les termes de gradient et de radiation.

La polarisabilité statique α_0 de la sphère est fonction de a^3 : l'expression (13), proportionnelle à α_0 , a donc la même dépendance, et on retrouve à nouveau le fait que l'approximation dipolaire n'est plus vraie dans le cas des grandes sphères.

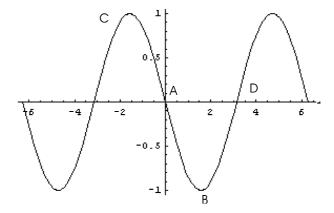


Figure 7: Courbe $f(t) = -\sin(t)$ qui donne l'allure de la force optique d'une onde stationnaire sur une sphère.

Sur la figure 7, nous avons tracé la courbe $f(t) - \sin(t)$ entre -2π et 2π , et avons indiqué 4 points particuliers A, B, C et D. Aux points A et D, la force s'annule: la sphère est alors en équilibre. Si elle est placée en C, la force positive l'amène en A, tandis que si elle est placée en B, la force négative l'entraine à nouveau en A: le point A (obtenu pour t=0) est donc un équilibre stable, et le point D un équilibre instable. Si l'on intègre $-\sin(t)$, on trouve la fonction $\cos(t)$. Or, le potentiel V et la force qu'il crée sont reliés par la relation $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}V$. Le potentiel qui crée la force optique dans le cas d'une onde stationnaire est donc de la forme $-\cos(t)$. En t=0, il est minimal: on retrouve bien le fait que l'équilibre mécanique de la sphère correspond à un minimum de potentiel. La valeur absolue de la différence de potentiel entre deux équilibres successifs est nommée potentiel de piégeage. Dans le cas présent, il est égal à $\|V_A - V_D\|$.

Cas d'une onde gaussienne Nous avons vu à l'aide des deux exemples précédents que la force corrective pouvait être soit une pression de radiation, soit une force de gradient. Nous allons à présent démontrer qu'elle est dans le cas d'un faisceau gaussien incident à la fois une pression de radiation et une force de gradient. Il est usuel de décrire l'intensité lumineuse d'un faisceau laser à l'aide d'une gaussienne de formule:

$$I(r,z) = \left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)$$

Comme nous en avons pris l'habitude, z désigne la direction de propagation de l'onde, r, la coordonnée radiale, est ici définie en coordonnées cylindriques comme étant égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$, w_0 est le rayon de ceinture où encore rayon de pincement du faisceau (waist); c'est la valeur minimum de la fonction w(z). Cette dernière fonction désigne la distance de l'axe z telle que pour z fixé, l'amplitude du champ électrique associée à l'onde diminue d'un facteur 1/e. Sa formule est:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

le nombre $\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ est connu en tant que longueur de Rayleigh z_R . L'origine 0 du repère est prise au point de l'axe z tel que le waist soit minimum (donc égal à w_0). L'intensité du vecteur champ électrique dont cette intensité lumineuse n'est en fait que le carré a pour équation:

$$E(r,z) = \left[\frac{w_0}{w(z)}\right] \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(i\phi(r,z))$$

où le terme de phase $\phi(r,z)$ s'écrit:

$$\phi(r,z) = kz + \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{kr^2}{2R(z)}$$

formule qui fait apparaître R(z), rayon, de courbure, tel que:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$

Cette formule est usuellement établie en utilisant l'approximation paraxiale. Mathématiquement, cette approximation consiste à considérer comme négligeable les variations sur une distance de l'ordre de λ de la dérivée n^{ieme} du champ électrique par rapport à celles de la dérivée $(n-1)^{ième}$ suivant la direction de propagation du faisceau (par exemple, $\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|$ est négligeable devant |E| sur une distance z de l'ordre de λ). Une autre interprétation de cette approximation est la suivante: on ne considère que les rayons lumineux qui restent confinés près de l'axe z. Un rayon lumineux se propage alors de façon quasi parallèle à l'axe z. Cette aproximation est conforme par exemple pour des faisceaux lasers qui possèdent une grande longueur de Rayleigh. En effet, cette particularité, qui se traduit par une divergence très faible, implique que le waist du faisceau w_0 soit très nettement supérieur à la longueur d'onde. En conséquence, la longueur de Rayleigh est elle aussi supérieure à la longueur d'onde. Par contre, l'approximation paraxiale trouve ses limites dans le cas des pinces optiques. Les faisceaux lasers sont alors très fortement pincés (le waist est de l'ordre de la longueur d'onde), et leur angle de divergence peut atteindre des valeurs de 70°. Nous ne traiterons donc pas du cas des pinces optiques dans ce qui suit.

Pour calculer la force optique, nous utilisons l'expression (11) :

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{4} \alpha_0 \nabla \left| \underline{\mathbf{E}_e} \left(\mathbf{r} \right) \right|^2 + \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \sigma_s \left| \underline{\mathbf{E}_e} \left(\mathbf{r} \right) \right|^2 \widehat{\mathbf{z}} - \frac{\epsilon_m \epsilon_0}{2} \frac{\sigma_s}{k} \operatorname{Im} \left[\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*} \right]$$

Nous ne nous intéresserons ici qu'au dernier terme, relatif à la force corrective et proportionnel à $\operatorname{Im}\left[\widetilde{E_e}\nabla\widetilde{E_e^*}\right]$.

Pour ce, nous allons définir, conformément à nos conventions :

$$\widetilde{E}_e(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(i(\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{kr^2}{2R(z)}))$$
$$= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(i\theta(r, z))$$

Il va nous falloir exprimer le gradient de $\overline{E_e^*}$:

$$\begin{split} \nabla \widetilde{E_e^*} &= \nabla \left(\exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp(-i\theta(r,z)) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp(-i\theta(r,z)) \right) \widehat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp(-i\theta(r,z)) \right) \widehat{\mathbf{z}} \\ &= \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \exp(-i\theta(r,z)) \widehat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z} \exp(-i\theta(r,z)) \widehat{\mathbf{z}} \right) \\ &+ \exp(-i\theta(r,z)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \right) \widehat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \right) \widehat{\mathbf{z}} \right) \end{split}$$

On développe ainsi:

$$\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*} = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(i\theta(r,z)) \nabla \left(\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \exp(-i\theta(r,z))\right)$$

$$= \left(\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)\right) \exp(i\theta(r,z)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \exp(-i\theta(r,z)) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z} \exp(-i\theta(r,z)) \hat{\mathbf{z}}\right)$$

$$+ \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)\right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)\right) \hat{\mathbf{z}}\right)$$

On peut avant même le développement de cette expression éliminer une de ses deux parties. En effet, le terme:

$$\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)\right)\widehat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)\right)\widehat{\mathbf{z}}\right)$$

est réel. Puisque l'on prend la partie imaginaire de $\overline{E}_e \nabla \overline{E}_e^*$, il ne contribue aucunement à la force corrective. Voyons ce qu'il en est en ce qui concerne le terme:

$$\left(\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)\right)\exp(i\theta(r,z))\left(\frac{\partial}{\partial r}\exp(-i\theta(r,z))\widehat{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial z}\exp(-i\theta(r,z))\widehat{\mathbf{z}}\right)$$

On a:

$$\theta(r,z) = (\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{kr^2}{2R(z)})$$

Voyons, afin de simplifier le calcul, quel est l'évolution du terme de phase $\theta(r,z)$. Rappelons que les expressions:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$
 et
$$\frac{kr^2}{2R(z)} = \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} = \frac{\pi r}{\lambda} \frac{r}{R(z)}$$

Conformément à l'approximation dipolaire, nous supposons que la dimension caractéristique des déplacements de la sphère est très inférieure à λ . Nous nous plaçons ainsi pour calculer la force optique en des points où la côte z est telle que $z << \lambda$, et des points tels que $r << \lambda$. Par conséquent,

$$\frac{\pi r}{\lambda} << 1$$

Le faisceau étant peu pincé, la coordonnée r des points auxquels nous travaillons est au plus de l'ordre du rayon de courbure et ainsi:

$$\frac{\pi r}{\lambda} \frac{r}{R(z)} << 1$$

De plus, le waist w_0 est, dans le cadre de l'approximation paraxiale, supérieure où égale à la longueur d'onde. On en déduit pour la longueur de Rayleigh:

$$w_0 > \lambda$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} > \pi \lambda > \lambda$$

Par conséquent, $z_R >> z$ et l'on voit que $\arctan(z/z_R)$ varie peu en fonction de z. On en déduit que la fonction $\theta(r,z)$ varie très lentement suivant z; ainsi, on peut approximer:

$$\frac{\partial}{\partial z} \exp(-i\theta(r,z)) \approx -i \exp(-i\theta(r,z))$$

en utilisant à nouveau le théorème des croissances comparées. En ce qui concerne la composante

radiale de la foce corrective, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta(r,z) = -\frac{kr}{R(z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\exp(-i\theta(r,z)) = \exp(-i\theta(r,z))\frac{\partial}{\partial r}(-i\theta(r,z))$$

$$= \frac{ikr}{R(z)}\exp(-i\theta(r,z))$$

Par conséquent, on obtient:

$$\widetilde{E_e} \nabla \widetilde{E_e^*} = \left(\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \right) \exp(i\theta(r,z)) \left(-i \exp(-i\theta(r,z)) \widehat{\mathbf{z}} + \frac{ikr}{R(z)} \exp(-i\theta(r,z)) \widehat{\mathbf{r}} \right)$$

$$\operatorname{Im}\left[\widetilde{E}_{e}\nabla\widetilde{E}_{e}^{*}\right] = \left|\underline{\mathbf{E}}_{e}\left(\mathbf{r},t\right)\right| \left(\frac{kr}{R(z)}\widehat{\mathbf{r}}-\widehat{\mathbf{z}}\right)$$

$$\left[\mathbf{F}_{c}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2}\frac{\sigma_{s}}{k}\left|\underline{\mathbf{E}}_{e}\left(\mathbf{r},t\right)\right| \left(\frac{kr}{R(z)}\widehat{\mathbf{r}}-\widehat{\mathbf{z}}\right)\right]$$

Le calcul précédent nous donne la valeur de la force corrective:

$$\mathbf{F}_{c}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{2} \frac{\sigma_{s}}{k} \left| \underline{\mathbf{E}_{e}}\left(\mathbf{r},t\right) \right| \left(\frac{kr}{R(z)} \widehat{\mathbf{r}} - \widehat{\mathbf{z}} \right)$$

Le terme correctif \mathbf{F}_c ne peut alors pas être simplement classé en force de gradient où pression de radiation comme dans les deux exemples précédents.

En effet, la composante suivant $\hat{\mathbf{r}}$ est une fonction impaire de la coordonnée radiale r. De plus, elle est de signe opposé à r: par exemple, plaçons la sphère en un point A de coordonnées cartésiennes $(0,0,z_0)$. La composante radiale de \mathbf{F}_c est alors nulle. Puis déplaçons là en un point B de coordonnées cartésiennes $(r_0,0,z_0)$, avec $r_0>0$. La composante radiale de \mathbf{F}_c est négative: la force corrective ramène la sphère sur l'axe des z. Nous pouvons établir l'équivalence suivante: une force optique \mathbf{F} telle que sa composante F_i est une fonction impaire de la coordonnée i et de signe opposé à i est une force de gradient suivant la direction i. Ainsi, le terme radial de la force corrective est un terme de gradient.

Par contre, le terme axial de \mathbf{F}_c est toujours positif: c'est un terme de pression de radiation. La force corrective est donc une force de gradient radiale (rappelons que la force de gradient usuelle est radiale ET axiale) et une pression de radiation axiale. Elle empêche donc la dérivation traditionnelle de forces optiques scomme somme de pression de radiation et de force de gradient.

2.2.9 Conclusion.

L'approximation de Rayleigh, très pédagogique pour un premier contact avec les forces optiques, donne cependant une fausse idée quant à leurs véritables natures. Mais il faut mettre à son crédit une formulation simple des forces optiques, sous l'expression d'une somme, avec d'une part la pression de radiation, et d'autre part la force de gradient. Le troisième terme que nous avons explicité, celui de force corrective, est souvent négligé dans la littérature. C'est pourtant ce dernier terme qui prouve que la décomposition usuelle des forces optiques dans le cadre de l'approximation dipolaire est inexacte. L'approximation dipolaire nous a néanmoins permis de définir des notions fondamentales dans l'étude théorique du piégeage par forces optiques comme le potentiel de piégeage, la section efficace de piégeage et l'efficacité de piégeage. Un résultat important de cette partie est que le modèle dipolaire prédit une efficacité de piégeage proportionnelle au rayon de la sphère élevé à la puissance 4. Nous verrons par la suite que si ce résultat est avéré dans le domaine des petits rayons (vis à vis de la longueur d'onde du faisceau incident), il devient inévitablement faux dès que l'on se rapproche du cas résonnant où dimensions de l'objet et longueur d'onde du faisceau incident sont du même ordre de grandeur.

2.3 L'approximation de l'optique géométrique

L'approximation de Rayleigh permet de calculer les forces optiques lorsque les dimensions caractéristiques de l'objet sont petites devant la longueur d'onde du faisceau incident, permettant ainsi d'éviter le calcul exact [18]. Mais une autre approximation peut intervenir lorsque, à contrario, l'objet présente des dimensions supérieures à la longueur d'onde: c'est l'approximation de l'optique géométrique. On peut ainsi développer le calcul analytique des forces optiques qui agissent sur une sphère avant de faire intervenir le numérique. Cette approximation consiste à décomposer le faisceau incident en pinceaux lumineux incohérents; les phénomènes d'interférences et de diffraction sont alors ignorés.

Nous allons considérer une sphère diélectrique d'indice n_s immergée dans un milieu diélectrique d'indice n_m . Dans ce milieu, l'intensité du faisceau incident I et sa quantité de mouvement p sont reliées par l'expression:

$$I = v_m p$$

où v_m est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu extérieur. La force appliquée à la sphère s'écrit:

$$F_{opt} = \sigma_p \frac{I}{v_m}$$

où rappelons-le σ_p est la section efficace de piégeage; elle a les dimensions d'une surface, et amène généralement à confondre F_p avec la pression de radiation dans les calculs de force optique. En effet, σ_p , contrairement à l'aire d'une surface, peut prendre des valeurs négatives. La force optique F_{opt} n'est donc pas forcément positive comme l'est une pression de radiation.

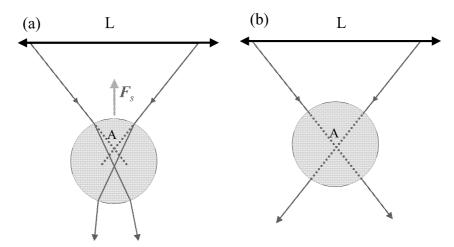


Figure 8: Exemple où la section efficace de piégeage est négative: un faisceau incident focalisé par une lentille (L) arrive sur un objet. Pour plus de clarté, nous n'avons représenté que les deux rayons extérieurs et leurs déviations par l'objet. Le faisceau transmet une quantité de mouvement induisant une force sur la sphère allant de bas en haut (a) c'est à dire dans le sens inverse de la propagation du faisceau. La sphère remonte jusqu'à ce que son centre soit au foyer de la lentille (b). Elle a ainsi "remontée" le faisceau.

Afin de calculer la force optique dans le cas de l'approximation géométrique, nous allons faire un bilan de quantité de mouvement. Ce bilan nous permettra d'obtenir la quantité de mouvement transmise par le faisceau incident à la sphère, quantité de mouvement que nous identifierons à la force optique.

Après avoir étudié la force optique créé par un pinceau lumineux, nous donnerons une méthode pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission en intensité au niveau de l'interface sphère/milieu extérieur. Nous verrons que ces coefficients seront indispensables pour évaluer la force optique. Enfin, nous ferons une application numérique de la formule que nous aurons élaboré en considérant une onde plane incidente.

2.3.1 Description du système à un seul pinceau lumineux

Soit une sphère diélectrique d'indice optique n_s plongée dans un milieu extérieur diélectrique d'indice optique n_m . La figure 9 représente les rayons réfléchis et transmis par cette sphère à partir d'un pinceau

incident d'intensité lumineuse dI, qui arrive sur la sphère sous une incidence θ . La direction du pinceau incident est suivant un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}$. On définit un autre vecteur unitaire $\hat{\mathbf{v}}$ comme étant directement orthogonal à $\hat{\mathbf{u}}$ dans le plan d'incidence. L'origine du repère O est au centre de la sphère. Puisque le transfert de quantité de mouvement entre le pinceau incident et la sphère se fera dans le plan d'incidence, la force optique sera parfaitement définie par les données de ses deux composantes suivant $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$.

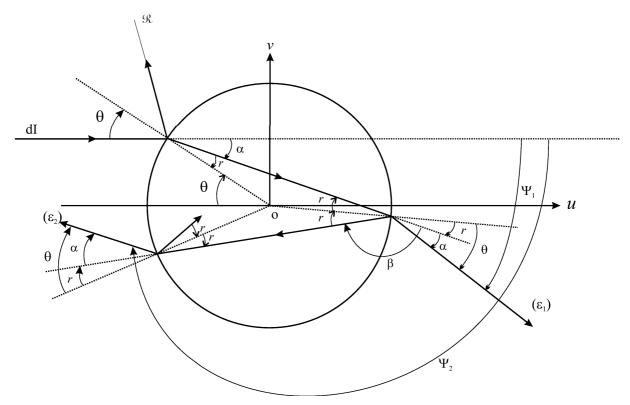


Figure 9: Système étudié

On se propose de calculer dans la suite les forces dFu et dFv exercées respectivement selon les directions des axes (Ou) et (Ov) par le pinceau lumineux d'intensité dI sur la sphère.

Le pinceau lumineux incident donne une infinité de rayons lumineux d'intensités $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ après son passage dans la sphère, plus un rayon réfléchi d'intensité notée \Re . Sur la figure 9, nous avons représenté le rayon réfléchi et les deux premiers rayons transmis par la sphère. Ces intensités sont liées à l'intensité incidente par la relation :

$$\varepsilon_n = T^2 R^{n-1} dI \qquad \qquad \Re = R dI$$

où T et R désignent les coefficients de réflexion et de transmission de la sphère en intensité. Ce sont les quantités de mouvement de ces différents rayons lumineux que nous allons calculer. La quantité de mouvement étant une grandeur vectorielle, il nous faut déterminer la direction des différents rayons lumineux. A l'intérieur de la sphère, les angles α et β de réfraction et de réflexion s'écrivent, avec les données de la figure 9:

$$\alpha = \theta - r$$

$$\beta = \pi - 2r$$

Puisque le rayon d'intensité ε_n subit 2 réfractions et (n-1) réflexions, il est dévié par rapport à l'axe (Ou) de l'angle

$$\Psi_n = 2.(\theta - r) + (n - 1)(\pi - 2r)$$

Le rayon réféchi est quant à lui dévié de l'axe Ou d'un angle 2θ .

2.3.2 Etablissement du bilan d'impulsion

Le bilan de conservation de la quantité de mouvement de l'onde donne :

$$\mathbf{P}_{incident} = \mathbf{P}_{sphère} + \mathbf{P}_{r\'eflexion} + \mathbf{P}_{transmission}$$

avec $\mathbf{P}_{incident}$, quantité de mouvement du pinceau incident, $\mathbf{P}_{sph\grave{e}re}$, quantité de mouvement transmise à la sphère (elle vérifie $\mathbf{P}_{sph\grave{e}re} = dF_{u}.\hat{\mathbf{u}} + dF_{v}.\hat{\mathbf{v}}$) et $\mathbf{P}_{r\acute{e}flexion}$ et $\mathbf{P}_{transmission}$, quantité de mouvement de l'onde réfléchie \Re et des ondes d'intensité $(\varepsilon_n)_{n\in N}$.

De plus, on a la relation, pour la quantité de mouvement \mathbf{P} d'une onde d'intensité dI dirigée selon le vecteur unitaire $\widehat{\mathbf{a}}$:

$$\mathbf{P} = \frac{dI}{c} n_m \hat{\mathbf{a}}$$

ou n_m est l'indice du milieu extérieur dans lequel baigne la sphère. On a ainsi :

$$dF_u \cdot \hat{\mathbf{u}} + dF_v \cdot \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P}_{incident} - \mathbf{P}_{r\acute{e}flexion} - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}_{transmission}(n)$$

avec:

*
$$\mathbf{P}_{incident} = \frac{dI}{c} n_m \hat{\mathbf{u}}$$

*
$$\mathbf{P}_{r\acute{e}flexion} = \frac{dl}{\hat{\mathbf{r}}} R. n_m \hat{\mathbf{r}}$$

*
$$\mathbf{P}_{transmission}(n) = \frac{dI}{c}T^2.n_mR^{n-1}\widehat{\mathbf{e}_n}$$

désignant la quantité de mouvement du rayon transmis par la sphère d'intensité lumineuse ε_n . Comme le lecteur aura pu le remarquer, $\hat{\mathbf{r}}$ désigne la direction du rayon réfléchi et $\widehat{\mathbf{e}_n}$ celle du n-ième rayon transmis. Nous avons les relations en agles orientés:

$$(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{r}}) = \pi + 2\theta$$

 $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{e}_n}) = -\Psi_n$

Les projections sur les axes (Ou) et (Ov) nous donnent les deux relations :

$$dF_{u} = \frac{dI.n_{m}}{c} + (-dI\frac{R}{c}.n_{m}.\cos(\pi + 2\theta)) + (-dI\frac{T^{2}}{c}.n_{m}.\sum_{n=1}^{+\infty}R^{n-1}.\cos(-\Psi_{n}))$$
$$dF_{v} = -dI\frac{R}{c}.n_{m}.\sin(\pi + 2\theta) + (-dI\frac{T^{2}}{c}.n_{m}.\sum_{n=1}^{+\infty}R^{n-1}.\sin(-\Psi_{n}))$$

Construisons, à partir de ces deux expressions, le nombre complexe dF défini par la relation:

$$dF = dF_u + idF_v$$

On aura alors:

$$\begin{split} dF &= dFu + idFv \\ &= \frac{dI.n_m}{c} + (-dI\frac{R}{c}.n_m.\cos(\pi + 2\theta)) + (-dI\frac{T^2}{c}.n_m.\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1}.\cos(-\Psi_n)) \\ &+ i\left(-dI\frac{R}{c}.n_m.\sin(\pi + 2\theta) + (-dI\frac{T^2}{c}.n_m.\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1}.\sin(-\Psi_n))\frac{dI.n_m}{c}\right) \\ &= \frac{dI.n_m}{c} - dI\frac{R}{c}.n_m.\cos(2\theta) - dI\frac{T^2}{c}.n_m.\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1}.\cos(\Psi_n) \\ &+ idI\frac{R}{c}.n_m.\sin(2\theta) - idI\frac{T^2}{c}.n_m.\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1}.\sin(-\Psi_n))\frac{dI.n_m}{c} \\ &\left(1 + R e^{2i\theta} - T^2\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1}.(\cos\Psi_n - i\sin\Psi_n)\right) \end{split}$$

Si l'on remarque que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1} \cdot (\cos \Psi_n - i \sin \Psi_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1} \cdot e^{-i\Psi_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1} \cdot e^{-i(2 \cdot (\theta - r) + (n-1)(\pi - 2r))}$$

$$= e^{-i2 \cdot (\theta - r)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Re^{-i(\pi - 2r)} \right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R^{n-1} \cdot (\cos \Psi_n - i \sin \Psi_n) = e^{-i2 \cdot (\theta - r)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(Re^{-i(\pi - 2r)} \right)^p$$

On reconnait ici la somme des termes d'une suite géométrique de raison $Re^{-i(\pi-2r)}$. Le module de cette raison étant égal à R, et par conséquent inférieur à 1 (sauf dans le cas d'une réflexion totale), on peut appliquer la formule de sommation usuelle:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(Re^{-i(\pi - 2r)} \right)^p = \frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}}$$

et ainsi conclure avec le résultat:

$$dF = \frac{dI.n_m}{c} \left(1 + R e^{2i\theta} - T^2 \frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}} \right)$$
 (14)

Pour passer d'un pinceau lumineux à un faisceau incident modélisé sous la forme d'un ensemble de pinceau lumineux, il nous faut intégrer la formule précédente sur la surface d'intersection entre la sphère et le faisceau incident.

2.3.3 Extension à un ensemble de pinceaux lumineux

Les inconnues dans la formule (14) sont au nombre de trois: l'angle d'incidence du pinceau lumineux θ , et les deux coefficients de transmission et de réflexion en intensité R et T. La première de ces inconnues, l'angle θ , est une variable liée à l'intégration. Les deux dernières par contre peuvent se calculer à partir des formules de Fresnel que nous verrons par la suite. Mais d'ores et déja nous allons introduire l'idée que le champ électrique doit être décomposé en deux: une composante parallèle, dans le plan d'incidence (plan définit par la direction du pinceau incident et la normale à la sphère au point d'incidence, ici le plan de la figure 9), et une composante perpendiculaire à ce plan.

Si la surface sur laquelle nous allons intégrer notre formule est une demi sphère paramètrée par l'angle ϕ qui varie entre 0 et 2π et le nombre ρ qui varie entre 0 et a, a rayon de la sphère, ces composantes sont définies ainsi comme on peut voir sur la figure 10:

$$E_{\parallel} = E_i \cos \phi$$
$$E_{\perp} = E_i \sin \phi$$

Notre élément infinitésimal de force (qui correspond, rappelons le, à une pression surfacique) se décompose par conséquent selon ces deux directions:

$$d\mathbf{F} = \cos^2 \phi \, d\mathbf{F}_{\perp} + \sin^2 \phi \, d\mathbf{F}_{\parallel}$$

où l'on a:

$$d\mathbf{F}_{\perp} \equiv \frac{n_{m}I\rho d\rho}{c} \operatorname{Re} \left\{ C_{\perp} \left(\theta \right) \right\}$$

$$d\mathbf{F}_{\parallel} \equiv \frac{n_{m}I\rho d\rho}{c} \operatorname{Re} \left\{ C_{\parallel} \left(\theta \right) \right\}$$
(15)

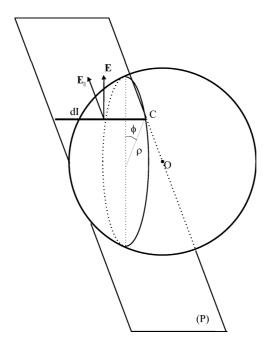


Figure 10: Schéma de l'intégration que nous allons faire. Décomposition en deux parties du champ incident suivant la polarisation. Le plan d'incidence (P) contient le pinceau lumineux dI, le rayon (OC) mais pas la champ électrique, seulement sa composante parallèle.

avec bien sûr:

$$\begin{split} C_{\perp}\left(\theta\right) &= 1 + R_{\perp}e^{2i\theta} - T_{\perp}^{2}\frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}}\\ C_{\parallel}\left(\theta\right) &= 1 + R_{\parallel}e^{2i\theta} - T_{\parallel}^{2}\frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}} \end{split}$$

Les deux fonctions $\operatorname{Re}\{C\left(\theta\right)\}$ sont en fait des coefficients complexes de conversion qui expriment la fraction de quantité de mouvement transférée de l'onde incidente à l'objet. Remarquons au passage que $I\rho d\rho$ a la dimension d'une puissance, et $n_m I\rho d\rho/c$ celle d'une pression. L'introduction des polarisations implique que l'on ne peut traiter entièrement le problème avec l'optique géométrique.

Il nous faut maintenant les valeurs de R et de T. Ces coefficients de réflexion et de transmission en intensité vont être calculés dans la partie suivante.

2.3.4 Les coefficents de Fresnel: notations générales

Pour pouvoir compléter notre calcul, il nous faut les formules donnant les coefficients de réflexions et de transmission en intensité. Nous verrons tout d'abord que le problème se décompose en deux, suivant l'orientation du vecteur champ électrique associé à l'onde incidente, que nous prendrons plane, et avec une dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$. Ainsi, nous aurons les coefficients associés au cas transverse électrique (TE) et ceux associés au cas transverse magnétique (TM). Ces deux cas seront définis par la suite. Mais quel que soit le cas, nous verrons que ces coefficients ne dépendent que de l'angle d'incidence du rayon lumineux, des indices des différents milieux mis en jeu, et de leurs perméabilités magnétiques.

Considérons un système optique constitué d'une surface plane (Π) délimitant deux milieux diélectriques d'indices n_m (superstrat) et n_s (le substrat) (figure 11). Soit une onde plane qui se propage dans le superstrat avec un vecteur d'onde \mathbf{k}_m et arrive sur (Π) sous un angle θ_m . Dans le substrat, notre onde plane a pour vecteur d'onde \mathbf{k}_s , et forme un angle θ_s avec la normale. Le module du vecteur d'onde dans le superstrat \mathbf{k}_m se décompose en deux vecteurs, parallèles et perpendiculaires, k_{\parallel} et k_{\perp} .On a donc les relations:

$$k_{||} \equiv k_m \sin \theta_m$$
$$k_{\perp} \equiv k_m \cos \theta_m$$

Symétriquement, on a pour k_s :

$$k_{||,s} \equiv k_s \sin \theta_s = k_m \sin \theta_m = k_{||}$$

$$k_{\perp,s} \equiv k_s \cos \theta_s$$

Nous allons calculer les coefficients de transmission et de réflexion en intensité liés à cette décomposition.

2.3.5 Coefficients de Fresnel pour une onde TE

Une onde plane TE possède un champ électrique polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. Sur la figure 11, ce plan est le plan (Oxy). La direction perpendiculaire est donc définie par le vecteur $\hat{\mathbf{z}}$.

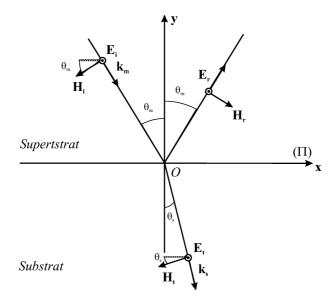


Figure 11: Coefficients de Fresnel dans le cas transverse élèctrique

Le champ électrique est de la forme, avec les conventions de la figure 11, et en enlevant la dépendance temporelle harmonique pour ne pas surcharger l'écriture:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = u(x, y)\hat{\mathbf{z}}$$

Puisque nous avons une onde plane, la dépendance spatiale s'écrit tout naturellement:

$$u(x,y) = Ae^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}$$

avec \mathbf{k}_m vecteur d'onde de l'onde incidente. Ce dernier est parallèle au plan (Oxy), ce qui explique que l'on aie choisit une dépendance spatiale en fonction uniquement de x et y, et non de z. Le nombre A est une simple constante de normalisation.

Afin d'obtenir les coefficients de Fresnel en intensité pour une onde TE, R_{\perp} et T_{\perp} , nous nous proposons de déterminer tout d'abord ceux en amplitude r_{\perp} et t_{\perp} . En effet, nous verrons que l'on peut exprimer les coefficients en intensité en fonction de ceux en amplitude.

Les trois champs électriques avec lesquels nous allons travailler sont les champs incidents, réfléchis et transmis:

$$\begin{split} \mathbf{E_i(r)} &= u_i(x,y) \widehat{\mathbf{z}} = a_m^+ e^{ik_\perp y} e^{ik_\parallel x} \widehat{\mathbf{z}} & \text{champ incident} \\ \mathbf{E_r(r)} &= u_r(x,y) \widehat{\mathbf{z}} = a_m^- e^{-ik_\perp y} e^{ik_\parallel x} \widehat{\mathbf{z}} & \text{champ reflechi} \\ \mathbf{E_t(r)} &= u_t(x,y) \widehat{\mathbf{z}} = a_s^+ e^{ik_\perp,sy} e^{ik_\parallel x} \widehat{\mathbf{z}} & \text{champ transmis} \end{split}$$

Les coefficients de réflexions et de transmissions en amplitude sont définis par les relations:

$$r_{\perp} \equiv \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{y=0} = \frac{a_m^-}{a_m^+} \qquad ; \qquad t_{\perp} \equiv \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{y=0} = \frac{a_s^+}{a_m^+}$$

Nous allons utiliser les continuités des composantes tangentielles au niveau de l'interface du champ électrique **E** et du vecteur excitation magnétique **H**. Grâce aux 2 équations qui découlent de ces relations de continuité, on obtient un système de 2 équations à 2 inconnues:

$$ar_{\perp} + bt_{\perp} = c$$
$$dr_{\perp} + et_{\perp} = f$$

Ce sont les coefficients (a, b, c, d, e, f) qu'il faut déterminer.

La fonction spatiale du champ total dans le superstrat est la somme des champs incidents et réflèchis:

$$u_m(x,y) = u_i(x,y) + u_r(x,y) = a_m^+ e^{ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x} + a_m^- e^{-ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x}$$
$$= a_m^+ \left(e^{ik_{\perp}y} + r_{\perp}e^{-ik_{\perp}y} \right) e^{ik_{||}x}$$

Dans le substrat, nous avons:

$$u_s(x,y) = u_t(x,y) = a_s^+ e^{ik_{\perp,s}y} e^{ik_{||}x} = t_{\perp} a_m^+ e^{ik_{\perp,s}y} e^{ik_{||}x}$$

L'interface entre les deux milieux (Π) a pour équation y=0. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur (Π) s'écrit alors:

$$u_{m}(x,0) = u_{s}(x,0)$$

$$a_{m}^{+} \left(e^{ik_{\perp}y} + r_{\perp}e^{-ik_{\perp}y}\right)e^{ik_{||}x} = a_{m}^{+} \left(t_{\perp}e^{ik_{\perp,s}y}\right)e^{ik_{||}x}, \text{ pris en } y = 0$$
soit $1 + r_{\perp} = t_{\perp}$

Nous avons ainsi une première relation entre les coefficients r_{\perp} et t_{\perp} . Pour en avoir une seconde, nous allons utiliser les champs excitateur magnétique. On obtient leurs expressions à partir de celles des champs électriques correspondant, en tenant compte de la dépendance harmonique des champs et de la relation de Maxwell $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Par exemple:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_{i} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{i}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge a_{m}^{+} e^{ik_{\perp} y} e^{ik_{||} x} \widehat{\mathbf{z}} = i\omega \mathbf{B}_{i}$$

$$-ik_{||} a_{m}^{+} e^{ik_{\perp} y} e^{ik_{||} x} \widehat{\mathbf{y}} + ik_{\perp} a_{m}^{+} e^{ik_{\perp} y} e^{ik_{||} x} \widehat{\mathbf{x}} = i\omega \mu_{0} \mu_{m} \mathbf{H}_{i}$$

et si l'on considère \mathbf{H}_m et \mathbf{H}_s les champs dans le substrat et le superstrat, leurs expressions sont:

$$\mathbf{H}_{m} = \frac{1}{\omega \mu_{m} \mu_{0}} \begin{vmatrix} k_{\perp} \\ -k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} a_{m}^{+} e^{ik_{\perp} y} e^{ik_{||} x} - \frac{1}{\omega \mu_{m} \mu_{0}} \begin{vmatrix} k_{\perp} \\ k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} r_{\perp} a_{m}^{+} e^{-ik_{\perp} y} e^{ik_{||} x}$$

$$\mathbf{H}_{s} = \frac{1}{\omega \mu_{s} \mu_{0}} \begin{vmatrix} k_{\perp, s} \\ -k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} t_{\perp} a_{m}^{+} e^{ik_{\perp, s} y} e^{ik_{||} x}$$

La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} sur (Π) (ici H_x) nous permet d'obtenir une seconde relation:

$$\frac{1}{\mu_m \mu_0} k_{\perp} a_m^+ - \frac{1}{\mu_m \mu_0} k_{\perp} r_{\perp} a_m^+ = \frac{1}{\mu_s \mu_0} k_{\perp,s} t a_s^+$$
$$1 - r_{\perp} = \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} t_{\perp}$$

Les deux relations qui nous intéressent sont donc:

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp}$$

$$1 - r_{\perp} = \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} t_{\perp}$$

La résolution proposée dans le calcul précédent du système de deux équations à deux inconnues:

$$ar_{\perp} + bt_{\perp} = c$$
$$dr_{\perp} + et_{\perp} = f$$

avec:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= -1 \\ d &= 1 \\ e &= \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} \\ f &= 1 \end{aligned}$$

nous conduit aux expressions:

$$t_{\perp} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}}} = \frac{2\mu_s k_{\perp}}{\mu_s k_{\perp} + \mu_m k_{\perp,s}}$$

$$= t_{\perp} \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} \right) = 2 \left(\frac{\mu_s k_{\perp} - \mu_m k_{\perp}}{\mu_s k_{\perp} + \mu_s k_{\perp}} \right)$$

$$2r_{\perp} = t_{\perp} \left(1 - \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} \right) = 2 \left(\frac{\mu_s k_{\perp} - \mu_m k_{\perp,s}}{\mu_s k_{\perp} + \mu_m k_{\perp,s}} \right)$$
$$r_{\perp} = \frac{\mu_s k_{\perp} - \mu_m k_{\perp,s}}{\mu_s k_{\perp} + \mu_m k_{\perp,s}}$$

Pour établir les formules des coefficients de Fresnel en intensité, il nous est nécessaire d'utiliser la conservation de l'énergie au niveau de l'interface (les milieux sont supposés sans absorbtion). Pour ce, nous allons travailler avec les différents flux des vecteurs de Poynting associés aux ondes en présence. Ces flux sont: le flux de l'onde incidente S_i , celui de l'onde diffusée S_r et enfin celui de l'onde transmise S_t .

Le flux du vecteur de Poynting incident à travers un élément de surface ΔS s'écrit avec nos notations:

$$S_i = \|\mathbf{E}_i^* \wedge \mathbf{H}_i\| \Delta S \cos \theta_m = \frac{|a_m^+|^2}{\omega \mu_m \mu_0} k_\perp \Delta S$$

les flux réfléchis et transmis sont:

$$S_r = \|\mathbf{E}_r^* \wedge \mathbf{H}_r\| \Delta S \cos \theta_m = \frac{r_{\perp}^2}{\omega \mu_m \mu_0} \left| a_m^+ \right|^2 k_{\perp} \Delta S$$

$$S_{t} = \left\| \mathbf{E}_{t}^{*} \wedge \mathbf{H}_{t} \right\| \Delta S \cos \theta_{s} = \frac{t_{\perp}^{2}}{\omega \mu_{s} \mu_{0}} \left| a_{m}^{+} \right|^{2} k_{\perp, s} \Delta S$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en intensité se définissent alors à l'aide des rapports entre les flux d'énergie que nous venons de calculer:

$$R_{\perp} \equiv \frac{S_r}{S_i} = r_{\perp}^2 \qquad ; \qquad T_{\perp} \equiv \frac{S_t}{S_i} = \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} t_{\perp}^2$$

On retrouve la conservation de l'énergie au niveau de l'interface:

$$(1+r_{\perp})(1-r_{\perp}) = \frac{\mu_m}{\mu_s} \frac{k_{\perp,s}}{k_{\perp}} t_{\perp}^2$$
$$1-R_{\perp} = T_{\perp}$$

En prenant $\mu_m = \mu_s = 1$, nous avons:

$$r_{\perp} = \frac{k_{\perp} - k_{\perp,s}}{k_{\perp} + k_{\perp,s}}$$
$$t_{\perp} = \frac{2k_{\perp}}{k_{\perp} + k_{\perp,s}}$$

De plus, compte tenu des expressions:

$$k_{\perp} = k_m \cos \theta_m$$
$$k_{\perp,s} = k_s \cos \theta_s$$

on trouve:

$$r_{\perp} = \frac{k_m \cos \theta_m - k_s \cos \theta_s}{k_m \cos \theta_m + k_s \cos \theta_s}$$
$$t_{\perp} = \frac{2k_m \cos \theta_m}{k_m \cos \theta_m + k_s \cos \theta_s}$$

La relation de Snell-Descartes nous permet de conclure:

$$n_s = n_m \frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s}$$

on obtient, en fonction des angles et des indices, les coefficients de réflexions et de transmission de Fresnel en amplitude et en intensité :

$$\begin{split} r_{\perp} &= \frac{n_m \cos \theta_m - n_s \cos \theta_s}{n_m \cos \theta_m + n_s \cos \theta_s} \\ &= \frac{n_m \cos \theta_m - n_m \frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_s}{n_m \cos \theta_m + n_m \frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_s} \\ &= \frac{\sin \theta_s \cos \theta_m - \sin \theta_m \cos \theta_s}{\sin \theta_s \cos \theta_m + \sin \theta_m \cos \theta_s} \\ t_{\perp} &= \frac{\sin (\theta_s - \theta_m)}{\sin (\theta_s + \theta_m)} \\ t_{\perp} &= \frac{2n_m \cos \theta_m}{n_m \cos \theta_m + n_s \cos \theta_s} = \frac{2\cos \theta_m \sin \theta_s}{\sin (\theta_m + \theta_s)} \\ \hline R_{\perp} &= r_{\perp}^2 \qquad ; \qquad T_{\perp} &= \frac{n_s \cos \theta_s}{n_m \cos \theta_m} t_{\perp}^2 \end{split}$$

2.3.6 Coefficients de Fresnel pour une onde TM

Une onde TM possède son champ électrique polarisé dans le plan d'incidence. Le champ excitateur magnétique est par conséquent perpendiculaire à ce plan:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = v(x, y)\widehat{\mathbf{z}}$$

La démarche appliquée est analogue à celle utilisée dans le cas TE, le champ excitateur magnétique jouant le rôle du champ électrique. Nous avons donc:

$$\begin{split} \mathbf{H_i(r)} &= v_i(x,y)\widehat{\mathbf{z}} = b_m^+ e^{ik_\perp y} e^{ik_{||}x}\widehat{\mathbf{z}} & \text{champ incident} \\ \mathbf{H_r(r)} &= v_r(x,y)\widehat{\mathbf{z}} = b_m^- e^{-ik_\perp y} e^{ik_{||}x}\widehat{\mathbf{z}} & \text{champ r\'efl\'echi} \\ \mathbf{H_t(r)} &= v_t(x,y)\widehat{\mathbf{z}} = b_s^+ e^{ik_\perp,s} y e^{ik_{||}x}\widehat{\mathbf{z}} & \text{champ transmis} \end{split}$$

On écrit tout d'abord l'amplitude du champ magnétique total dans le superstrat, somme des champs incident et transmis:

$$v_m(x,y) = v_i(x,y) + v_r(x,y) = b_m^+ e^{ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x} + b_m^- e^{-ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x}$$
$$= b_m^+ \left(e^{ik_{\perp}y} + r_{||} e^{-ik_{\perp}y} \right) e^{ik_{||}x}$$

et dans le substrat:

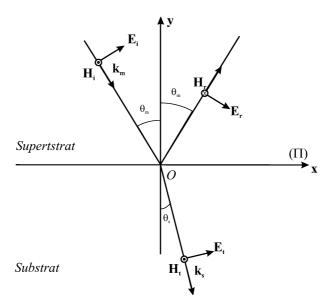


Figure 12: Coefficients de Fresnel dans le cas transverse magnétique

$$v_s(x,y) = b_s^+ e^{ik_{\perp,s}y} e^{ik_{||}x} = t_{||} b_m^+ e^{ik_{\perp,s}y} e^{ik_{||}x}$$

où l'on a défini les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude par les relations:

$$r_\parallel \equiv \left(rac{H_r}{H_i}
ight)_{u=0} = rac{b_m^-}{b_m^+} \qquad ; \qquad t_\parallel \equiv \left(rac{H_t}{H_i}
ight)_{u=0} = rac{b_s^+}{b_m^+}$$

La démarche sera analogue à celle utilisée dans le cas TE: nous utilisons les équations de conservation de la composante tangentielle des champs électriques et excitation magnétique au niveau de l'interface (Π) afin d'obtenir un système de 2 équations à 2 inconnues:

$$ar_{\parallel} + bt_{\parallel} = c$$
$$dr_{\parallel} + et_{\parallel} = f$$

Ce sont les coefficients (a, b, c, d, e, f) qu'il faut à nouveau déterminer.

Avec la continuité de la composante tangentielle du champ excitateur magnétique au niveau de l'interface (Π) , on a une première relation:

$$b_{m}^{+}\left(e^{ik_{\perp}y}+re^{-ik_{\perp}y}\right)e^{ik_{||}x}=b_{s}^{+}e^{ik_{\perp,s}y}e^{ik_{||}x}\\1+r_{||}=t_{||}$$

A partir des équations de Maxwell et des expressions des champ magnétiques, on exprime les champs électriques associés (les perméabilités magnétiques relatives des deux milieux sont ici toutes égales à 1 afin de ne pas surcharger les expressions):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{-i\omega\epsilon\epsilon_0} \nabla \wedge \mathbf{H}$$

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{\omega\epsilon_m\epsilon_0} \begin{vmatrix} -k_{\perp} \\ k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} b_m^+ e^{ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x} + \frac{1}{\omega\epsilon_m\epsilon_0} \begin{vmatrix} k_{\perp} \\ k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} b_m^- e^{-ik_{\perp}y} e^{ik_{||}x}$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{\omega\epsilon_s\epsilon_0} \begin{vmatrix} -k_{\perp,s} \\ k_{||} \\ 0 \end{vmatrix} b_s^+ e^{ik_{\perp,s}y} e^{ik_{||}x}$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique E_x à l'interface va ainsi nous donner une seconde équation reliant les coefficients de Fresnel en amplitude:

$$\begin{split} \frac{-k_{\perp}}{\omega\epsilon_{m}\epsilon_{0}}b_{m}^{+} + \frac{k_{\perp}}{\omega\epsilon_{m}\epsilon_{0}}b_{m}^{-} &= \frac{-k_{\perp,s}}{\omega\epsilon_{s}\epsilon_{0}}b_{s}^{+} \\ r_{\parallel} - 1 &= -\frac{k_{\perp,s}\epsilon_{m}}{k_{\perp}\epsilon_{s}}t_{\parallel} \end{split}$$

La résolution proposée dans le calcul précédent du système de deux équations à deux inconnues:

$$ar_{\parallel} + bt_{\parallel} = c$$
$$dr_{\parallel} + et_{\parallel} = f$$

avec:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -1$$

$$d = 1$$

$$e = \frac{k_{\perp,s}\epsilon_m}{k_{\perp}\epsilon_s}$$

$$f = 1$$

nous permet de déduire les coefficients recherchés:

$$\begin{split} t_{\parallel} &= \frac{2k_{\perp}\epsilon_s}{k_{\perp}\epsilon_s + k_{\perp,2}\epsilon_m} = \frac{2n_s^2n_m\cos\theta_m}{n_s^2n_m\cos\theta_m + n_m^2n_s\cos\theta_s} = \frac{2n_s\cos\theta_m}{n_s\cos\theta_m + n_m\cos\theta_s} \\ r_{\parallel} &= t_{\parallel} \frac{k_{\perp}\epsilon_s - k_{\perp,s}\epsilon_m}{2k_{\perp}\epsilon_s} = \frac{k_{\perp}\epsilon_s - k_{\perp,s}\epsilon_m}{k_{\perp}\epsilon_s + k_{\perp,s}\epsilon_m} = \frac{n_s\cos\theta_m - n_m\cos\theta_s}{n_s\cos\theta_m + n_m\cos\theta_s} \end{split}$$

On peut réécrire ces expressions pour qu'elles soient plus facile à utiliser grâce à la relation de Snell-Descartes, et à des manipulations trigonométriques.

Faisons intervenir la relation de Snell-Descartes:

$$n_s = n_m \frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s}$$

On a maintenant:

$$\begin{split} r_{\parallel} &= \frac{n_s \cos \theta_m - n_m \cos \theta_s}{n_s \cos \theta_m + n_m \cos \theta_s} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_m - \cos \theta_s}{\frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_m + \cos \theta_s} \\ r_{\parallel} &= \frac{\sin \theta_m \cos \theta_m - \sin \theta_s \cos \theta_s}{\sin \theta_m \cos \theta_m + \sin \theta_s \cos \theta_s} \end{split}$$

Partons de l'expression:

$$\tan(\theta_m + \theta_s) = \frac{(\tan\theta_m + \tan\theta_s)}{(1 - \tan\theta_m \tan\theta_s)}$$

qui permet ainsi de développer:

$$\frac{\tan(\theta_m - \theta_s)}{\tan(\theta_m + \theta_s)} = \frac{(\tan\theta_m - \tan\theta_s)}{(1 + \tan\theta_m \tan\theta_s)} \frac{(1 - \tan\theta_m \tan\theta_s)}{(\tan\theta_m + \tan\theta_s)}$$

$$= \frac{(\tan\theta_m - \tan\theta_s - \tan^2\theta_m \tan\theta_s + \tan\theta_m \tan^2\theta_s)}{(\tan\theta_s + \tan\theta_m \tan^2\theta_s)}$$

$$= \frac{(\tan\theta_m - \tan\theta_s - \tan^2\theta_m \tan\theta_s + \tan\theta_m \tan^2\theta_s)}{(\tan\theta_s + \tan\theta_m \tan^2\theta_s)}$$

$$= \frac{(\tan\theta_m (1 + \tan^2\theta_s) - \tan\theta_s (1 + \tan^2\theta_m))}{(\tan\theta_m (1 + \tan^2\theta_s) + \tan\theta_s (1 + \tan^2\theta_m))}$$

$$= \frac{(\frac{\tan\theta_m}{\cos^2\theta_s} - \frac{\tan\theta_s}{\cos^2\theta_m})}{(\frac{\tan\theta_s}{\cos^2\theta_m} + \frac{\tan\theta_m}{\cos^2\theta_s})}$$

$$= \frac{(\tan\theta_m \cos^2\theta_m - \cos^2\theta_s \tan\theta_s)}{(\tan\theta_s \cos^2\theta_s + \cos^2\theta_m \tan\theta_m)}$$

$$\frac{\tan(\theta_m - \theta_s)}{\tan(\theta_m + \theta_s)} = \frac{(\sin\theta_m \cos\theta_m - \sin\theta_s \cos\theta_s)}{(\sin\theta_m \cos\theta_m + \sin\theta_s \cos\theta_s)}$$
There were forwable plus compacts:

et d'obtenir alors une formule plus compacte:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan\left(\theta_{m} - \theta_{s}\right)}{\tan\left(\theta_{m} + \theta_{s}\right)}$$

On peut aussi simplifier l'expression du coefficient de transmission, toujours avec la loi de Snell Descartes:

$$\begin{split} t_{\parallel} &= \frac{2n_s \cos \theta_m}{n_s \cos \theta_m + n_m \cos \theta_s} \\ &= \frac{2\frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_m}{\frac{\sin \theta_m}{\sin \theta_s} \cos \theta_m + \cos \theta_s} \\ t_{\parallel} &= \frac{\sin 2\theta_m}{\sin \theta_m \cos \theta_m + \sin \theta_s \cos \theta_s} \end{split}$$

Le calcul précédent nous permet d'obtenir les expressions simplifiées:

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_m - \theta_s)}{\tan(\theta_m + \theta_s)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_m}{\sin \theta_m \cos \theta_m + \sin \theta_s \cos \theta_s}$$

En ce qui concerne les coefficients de Fresnel en intensité, on utilise les différents flux des vecteurs de Poynting déja vu dans le cas TE.

$$S_{i} = \|\mathbf{E}_{i}^{*} \wedge \mathbf{H}_{i}\| \Delta S \cos \theta_{m} = \frac{|b_{m}^{+}|^{2}}{\omega \epsilon_{m} \epsilon_{0}} k_{\perp} \Delta S$$

$$S_{r} = \|\mathbf{E}_{r}^{*} \wedge \mathbf{H}_{r}\| \Delta S \cos \theta_{m} = \frac{r_{\parallel}^{2}}{\omega \epsilon_{m} \epsilon_{0}} |b_{m}^{+}|^{2} k_{\perp} \Delta S$$

$$S_{t} = \|\mathbf{E}_{t}^{*} \wedge \mathbf{H}_{t}\| \Delta S \cos \theta_{s} = \frac{t_{\parallel}^{2}}{\omega \epsilon_{s} \epsilon_{0}} |b_{m}^{+}|^{2} k_{\perp,s} \Delta S$$

puis on définit les coefficents recherchés:

Le calcul précédent nous permet d'écrire:

$$\boxed{R_{\parallel} \equiv \frac{S_r}{S_i} = r_{\parallel}^2} \quad ; \quad \boxed{T_{\parallel} \equiv \frac{S_t}{S_i} = \frac{k_{\perp,s}\epsilon_m}{k_{\perp}\epsilon_s} t_{\parallel}^2}$$

qui donnent, par simplification:

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 \qquad ; \qquad T_{\parallel} = rac{n_m \cos heta_s}{n_s \cos heta_m} t_{\parallel}^2$$

Nous pouvons à présent utliser la formule (15):

$$\begin{split} d\mathbf{F} &= \cos^2 \phi \, d\mathbf{F}_{\perp} + \sin^2 \phi \, d\mathbf{F}_{\parallel} \\ d\mathbf{F}_{\perp} &\equiv \frac{n_m I \rho d\rho}{c} \operatorname{Re} \left\{ C_{\perp} \left(\theta \right) \right\} \\ d\mathbf{F}_{\parallel} &\equiv \frac{n_m I \rho d\rho}{c} \operatorname{Re} \left\{ C_{\parallel} \left(\theta \right) \right\} \\ C_{\perp} \left(\theta \right) &= 1 + R_{\perp} e^{2i\theta} - T_{\perp}^2 \frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}} \\ C_{\parallel} \left(\theta \right) &= 1 + R_{\parallel} e^{2i\theta} - T_{\parallel}^2 \frac{1}{1 - Re^{-i(\pi - 2r)}} \end{split}$$

Il ne nous reste plus qu'à intégrer cette formule sur la surface de la sphère. Il faut bien noter que cette intégration dépend à la fois de la sphère, mais aussi du faisceau incident, à travers leur surface d'intersection.

2.3.7 Intégration de la force

Notre exemple sera le plus simple: celui d'une onde plane se propageant selon la direction $\widehat{\mathbf{z}}$. Un repère (Oxyz) centré sur la sphère est associé à notre problème, et de pures conditions de symétries nous indiquent que la force sera entièrement dans la direction z. La surface sur laquelle notre formule sera intégrée est celle de la demi-sphère exposée au rayonnement incident, et paramétrée par les deux variables ϕ variant entre 0 et 2π et ρ variant entre 0 et a, rayon de la sphère. La contribution à la force suivant cette direction z s'écrit donc:

$$F_{z} = \frac{n_{m}I}{c} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{a} \rho d\rho \operatorname{Re} \left\{ \cos^{2} \phi C_{\perp} (\theta) + \sin^{2} \phi C_{\parallel} (\theta) \right\}$$

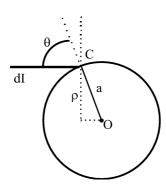


Figure 13: Lien entre ρ et a.

Il nous faut exprimer θ en fonction des paramètres d'intégration. Avec la figure 13, on se rend compte de manière évidente que l'on a les relations:

$$\rho = a \sin \theta$$
$$d\rho = a \cos \theta d\theta$$

De par ce fait, la force s'écrit:

$$F_{z} = \frac{n_{m}I}{c}a^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \operatorname{Re}\left\{\cos^{2}\phi C_{\perp}\left(\theta\right) + \sin^{2}\phi C_{\parallel}\left(\theta\right)\right\}$$

Nous allons à nouveau introduire ici la section efficace de piégeage σ_p et une efficacité de piégeage Q_p

$$F_z \equiv \frac{n_m I}{c} \sigma_p = \frac{n_m I}{c} \pi a^2 Q_p$$
 $Q_p \equiv \frac{\sigma_p}{\pi a^2}$

On en déduit donc:

$$Q_{p} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \operatorname{Re} \left\{ \cos^{2}\phi C_{\perp} (\theta) + \sin^{2}\phi C_{\parallel} (\theta) \right\}$$

Dans cette expression, les seules fonctions qui dépendent de l'angle azimuthal d'intégration ϕ sont $\cos^2 \phi$ et $\sin^2 \phi$. Nous pouvons donc éliminer la variable d'intégration ϕ en pratiquant les intégrales:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \pi$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi = \pi$$

ce qui permet d'avoir:

$$Q_{p} = \int_{0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \operatorname{Re} \left\{ C_{\perp} \left(\theta \right) + C_{\parallel} \left(\theta \right) \right\}$$

Cette intégrale doit alors être faite numériquement. Nous pouvons cependant remarquer avant l'intégration numérique que l'efficacité Q_p est indépendante du rayon de la sphère, et que la section efficace σ_p est alors proportionnelle à πa^2 . Rappelons que dans le cas de Rayleigh, la formule donnant l'efficacité Q_p avec une onde plane incidente est:

$$Q_p = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \frac{8}{3}\pi \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 2}\right)^2$$

où ρ est le contraste d'indice définit par la relation $\rho=\frac{n_s}{n_m}$. Pour l'approximation de Rayleigh, l'efficacité varie donc comme la puissance 4 du rayon de la sphère. La différence entre les deux approximations est alors ici flagrante.

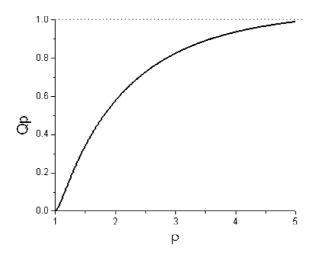


Figure 14: évolution de l'efficacité d'une sphère en fonction de ρ dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique

La figure 14 présente l'évolution de l'efficacité Q_p d'une sphère exposée à une onde plane en fonction de ρ dans le cas de l'approximation de l'optique géométrique. Puisque cette approximation donne une efficacité indépendante du rayon a de la sphère, le seul paramètre pertinent est en effet ρ . L'efficacité, nulle lorsque $\rho = 1$ (ce qui est normal, puisque dans ce cas, la sphère et le milieu extérieur ne peuvent être différenciés) tend vers 1 au fur et à mesure que ρ augmente. En termes de sections efficaces, on a donc une section efficace totale σ_p qui tend vers πa^2 avec ρ . Le tableau ci dessous donne quelques valeurs

d'efficacité calculée pour certains cas que l'on peut trouver dans la pratique:

	milieu extérieur=eau	milieu extérieur=air
	$(n_m = 1.33)$	$(n_m = 1)$
sphère en verre $(n_s = 1.45)$	$4.66.10^{-2}$	0.309
sphère en latex $(n_s = 1.59)$	0.128	0.392

Si le contraste d'indice est élevé, la sphère dévie fortement les rayons. Ainsi, la réflexion par la sphère est très forte, et les rayons déviés ont très peu de chance d'être dans la direction de l'onde plane incidente: la section efficace tend vers la section apparente πa^2 et l'efficacité est donc proche de 1. L'égalité $Q_p = 1$ est effective lorsque ρ tend vers l'infini, c'est à dire quand la sphère est en métal.

A l'inverse, dans le cas d'un faible contraste d'indice, la déviation est très minime, et les rayons issus de la sphère se propagent pour une bonne part dans la direction de l'onde plane incidente; tout se passe comme si la sphère était plus petite, et l'efficacité, rapport de la section efficace sur la section apparente, est proche de 0.

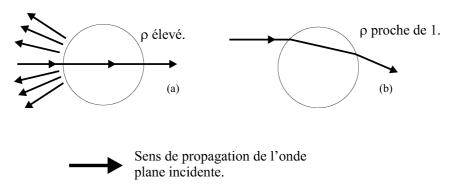


Figure 15: Déviation des rayons lumineux d'une onde plane incident. (a) : le contraste d'indice est élevé. (b) le contraste d'indice est faible. On se rend compte que dans le cas d'un contraste d'indice élevé, le nombre de rayons réflèchi est important: la valeur de la section efficace de piégeage est proche de la valeur de la section géométrique. Ainsi, l'efficacité de piégeage est proche de 1. Pour un contraste d'indice faible, les rayons sont peu déviés: la valeur de la section efficace de piégeage est alors nettement inférieure à la section géométrique de l'objet.

2.3.8 Conclusion

L'approximation de l'optique géométrique donne une approche très imagée des forces optiques: des rayons arrivent sur un objet et le poussent. On peut même retrouver simplement la force de gradient, qui permet à un objet de "remonter" la lumière, c'est à dire de se déplacer dans le sens inverse de la direction de propagation du faisceau incident. Mais la formulation de cette approximation est très lourde: si tout est simple lorsque l'on ne considère qu'un seul rayon lumineux, le calcul se complique nettement quand on doit considérer un ensemble de rayons incidents; l'une des principales difficultés reste l'évaluation de l'angle d'incidence. De plus, la nécessité de connaître la polarisation du rayon incident afin de calculer les coefficients de réflexion et de transmission en intensité oblige à recourir au traitement ondulatoire de la lumière que cette approximation nous permettait au début d'éviter. Certains résultats intéressants apparaissent néanmoins. Dans le cas numérique que nous avons traité, celui d'une onde plane, on obtient par exemple une efficacité de piégeage indépendante du rayon de la sphère piégée. Cette même efficacité augmente avec le contraste d'indice entre l'indice optique de la sphère et celui du milieu incident. Nous verrons dans le cadre du calcul exact que l'indépendance en fonction du rayon de la sphère est un résultat asymptotique. L'approximation de l'optique géométrique, bien qu'utilisée généralement par les expérimentateurs pour modéliser les forces optiques, n'est en fait vrai que pour des sphères de dimensions très importantes par rapport à la longueur d'onde du faisceau incident.

2.4 Calcul exact

Lors des deux parties précédentes, nous avons exposé les approximations usuellement faites lorsque la dimension caractéristique de l'objet a et la longueur d'onde λ du rayonnement incident ne sont pas du même ordre. Lorsque le rapport $a \setminus \lambda$ est de l'ordre de l'unité, on ne peut plus négliger les phénomènes purement électromagnétiques de diffraction et d'interférence (fin de validité de l'approximation de l'optique géométrique). On ne peut plus également considérer que le champ est suffisamment constant sur l'objet pour négliger les termes multipolaires de diffusion (fin de validité de l'approximation de Rayleigh). Pour calculer la force appliquée par l'onde incidente sur l'objet, il nous faudra établir l'équation de conservation du mouvement entre l'onde et l'objet et pour ce, utiliser le tenseur de contraintes, connu également sous le nom de tenseur de Maxwell. Ce tenseur fait intervenir les champs totals qui s'exercent sur l'objet, et nécessite alors la connaissance à la fois des champs incidents mais aussi des champs diffusés. Ces derniers sont reliés aux champs incidents par l'intermédiaire des matrices de transfert, qui contiennent les caractéristiques physiques de l'objet. C'est pourquoi nous établirons tout d'abord la formule de la matrice de transfert d'une sphère diélectrique Puis nous verrons que la force que nous recherchons peut être calculée assez simplement en faisant tendre le bilan d'impulsion à l'infini. Pour une onde plane, des formules dues à Bohren et Huffman [57] permettent de calculer la force optique. C'est pourquoi nous les utiliserons pour vérifier notre expression. Enfin, nous évoquerons les résultats numériques obtenus, ce qui nous permettra alors de les comparer aux résultats approchés que nous venons de voir dans les deux parties précédentes. De plus, nous modéliserons dans cette partie une expérience réalisée par l'équipe de Jean Marc Fournier, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, et qui concerne un système interférentiel à 3 ondes.

Notre démarche sera donc en 5 étapes:

- établissement de la matrice de transfert d'une sphère diélectrique (sections 2.4.1 à 2.4.4).
- établissement du bilan d'impulsion onde\sphère, et introduction du tenseur de Maxwell (sections 2.4.5 à 2.4.7).
- utilisation du bilan d'impulsion en le faisant tendre à l'infini (sections 2.4.8 à 2.4.11).
- comparaison dans le cas d'une onde plane, avec la formule de Bohren et Huffman (sections 2.4.12).
- applications numériques: comparaison des approximations avec le calcul exact, et modélisation d'un système interférentiel à 3 ondes (sections 2.4.13, 2.4.14).

2.4.1 Solution de l'équation d'Helmholtz en géométrie sphérique

Le physicien allemand Gustave Mie a donné une solution complète en 1908 [23] du problème lié à la diffraction d'une onde électromagnétique par une sphère isolée. Cependant, d'autres physiciens, dont Lorenz, recherchèrent une solution à ce problème avant Mie et proposèrent ainsi des solutions particulières qui sont toutes englobées dans la théorie de Mie.

Considérons un champ quelconque **A**. Supposons que ce champ satisfasse les équations de Maxwell. L'équation de propagation s'écrit, avec une dépendance temporelle harmonique :

$$\left[\bigtriangledown \land (\bigtriangledown \land \mathbf{A}) - k^2 \mathbf{A} \right] = \mathbf{0}$$

où k est la fréquence spatiale du vecteur champ \mathbf{A} .

Utilisons la relation $\Delta \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ et recherchons des solutions transverses qui vérifient $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$; l'équation d'Helmholtz devient :

$$\mathbf{\Delta A} + k^2 \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

On démontre (cf annexe B) que les solutions à ces équations en coordonnées sphériques sont les produits de fonctions de Bessel sphériques par des vecteurs harmoniques sphériques :

$$\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = h_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \{ [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} h_n(kr)\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) + [krh_n(kr)]'\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi) \}$$
(16)

où la fonction h_n désigne la fonction de Hankel, et les trois vecteurs $\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi), \mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi), \mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)$ des vecteurs harmoniques sphériques qui dépendent uniquement du couple (θ,ϕ) du vecteur position. L'équation d'Helmholtz a donc en coordonnées sphériques des solutions du type :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})[a]_{n,m}^{M} + [a]_{n,m}^{N} \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}))$$

où l'on a noté:

- A: amplitude du champ A.
- $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$: fonctions vectorielles solutions de l'équation d'Helmholtz en coordonnées sphériques.
- $[a]_{n,m}^M, [a]_{n,m}^N$: coefficients de la décomposition de **A** sur les vecteurs du type $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$.

Nous emploierons par la suite la notation condensée :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A.\mathbf{\Psi}^t (k\mathbf{r}).a$$

avec a un vecteur de coefficients :

$$a = \left[\begin{array}{c} [a]_{n,m}^M \\ [a]_{n,m}^N \end{array} \right]$$

et

$$\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}) = {\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}); \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})}_{n,m\in\mathbb{N}^{2}}$$

où l'exposant t désigne le transposé. On remarque que l'amplitude A et le vecteur coefficient a caractérisent entièrement notre champ.

2.4.2 Expression des différents champs présents

Nous allons à présent établir la formule de la matrice de transfert qui va permettre de relier les coefficients d'un champ excitateur (onde présente sans l'objet) à ceux du champ diffusé par un objet. L'objet sera à nouveau une sphère de rayon R_s , d'indice n_s , de permittivé diélectrique relative ϵ_s et de perméabilité magnétique relative μ_s , plongée dans un milieu d'indice n_m , de permittivé diélectrique relative ϵ_m et de perméabilité magnétique relative μ_m .

Elle est soumise à une onde excitatrice de champ électrique $\mathbf{E}_e(\mathbf{r})$ et magnétique $\mathbf{H}_e(\mathbf{r})$. Nous choisissons par convention l'origine O du repère au centre de cette sphère. On peut expliciter le champ électrique de cette onde selon le développement en ondes sphériques suivant :

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = E.\mathcal{R}q\{\mathbf{\Psi}^t(k_m\mathbf{r})\}.e$$

où k_m est la norme du vecteur de propagation dans le milieu extérieur. La notation $\mathcal{R}g$ permet de ne conserver que la partie dite 'régulière' des élements de la base $\Psi^t(k\mathbf{r})$. Ainsi, on remplace dans l'expression des vecteurs de base (16) les fonctions de Hankel h_n dont la partie imaginaire diverge à l'origine par les fonctions de Bessel sphériques de première espèce j_n , convergentes à l'origine.

A l'intérieur de la sphère , les champs en présence sont notés $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}_i(\mathbf{r})$. Le champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = E.\mathcal{R}g\{\mathbf{\Psi}^t(k_s\mathbf{r})\}.i$$

où le fait de prendre la partie 'régulière' de la base répond aux mêmes critères que ceux invoqués pour l'onde excitatrice, et k_s désigne la norme du vecteur de propagation de l'onde dans la sphère. A l'onde diffractée par la sphère sont associés les champs $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}_s(\mathbf{r})$. Ces champs ne sont bien évidemment présents qu'à l'extérieur de la sphère. Il n'est donc pas nécessaire de faire attention a l'éventuelle divergence à l'origine du développement :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = E.\mathbf{\Psi}^t(k\mathbf{r}).f$$

Ce sont les coefficients de ces développements e, i, f qu'il faut relier entre eux, l'idée étant de trouver une matrice de transfert qui pemette de connaître le champ diffracté par la sphère à partir du champ excitateur. Cette matrice T vérifie alors :

$$f = T.e (17)$$

Les relations de continuité de ${\bf E}$ et ${\bf H}$ au niveau de la surface de la sphère semblent toutes indiquées afin de déterminer les éléments de la matrice de transfert, puisqu'elles font intervenir les 3 types de champs avec lesquels nous travaillons (interne, diffusé, excitateur). On a en effet les équations de Maxwell, pour une onde monochromatique de pulsation ω :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}$$
$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}$$

au sens des distributions et des fonctions. On en déduit la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques au niveau de la surface de la sphère.

2.4.3 Méthode utilisée.

Nous allons exposer ici la méthode utilisée pour déterminer la matrice de transfert T d'une sphère diélectrique.

Nous allons tout d'abord utiliser le fait que dans le cas d'une sphère, T est diagonale. Cette relation découlera de notre calcul. La relation que nous recherchons prend donc la forme:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ f_{nm}^M \\ \dots \\ f_{nm}^N \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{nm}^M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{nm}^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ e_{nm}^M \\ \dots \\ e_{nm}^N \\ \dots \end{pmatrix}$$

Ainsi il nous faut trouver pour chaque doublet (n, m) avec n entier positif et m entier tel que |m| < n les relations:

$$f_{nm}^{M} = T_{nm}^{M} e_{nm}^{M}$$
$$f_{nm}^{N} = T_{nm}^{N} e_{nm}^{N}$$

Les relations de continuités tangentielles des champs électrique et excitation magnétique vont nous permettre d'établir un système de 2 équations à 3 inconnues pour chaque doublet (n, m):

$$i_{nm}^{A} = ae_{nm}^{A} + bf_{nm}^{A}$$
$$i_{nm}^{A} = ce_{nm}^{A} + df_{nm}^{A}$$

avec A = M, N. L'élimination des coefficients internes i_{nm}^A nous ammènera aux relations recherchées:

$$f_{nm}^{M} = T_{nm}^{M} e_{nm}^{M}$$
$$f_{nm}^{N} = T_{nm}^{N} e_{nm}^{N}$$

2.4.4 Calcul de la matrice de transfert d'une sphère diélectrique

Nous avons décomposé ce calcul en 4 étapes.

Etape 1: Expression des relations de continuité tangentielles à la surface de la sphère.

Puisque la composante tangentielle du champ électrique est continue, on a en notant $\{\mathbf{u}\}_T$ composante tangentielle d'un vecteur \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \{\text{champ diffusé}\}_T + \{\text{champ excitateur}\}_T &= \{\text{champ interne}\}_T \\ \{\mathbf{E}_s(\mathbf{R}_s)\}\}_T + \{\mathbf{E}_e(\mathbf{R}_s)\}_T &= \{\mathbf{E}_{\mathbf{i}}(\mathbf{R}_s)\}_T \\ \{\mathbf{H}_s(\mathbf{R}_s)\}\}_T + \{\mathbf{H}_{\mathbf{e}}(\mathbf{R}_s)\}_T &= \{\mathbf{H}_{\mathbf{i}}(\mathbf{R}_s)\}_T \end{aligned}$$

Etape 2: Continuité tangentielle du champ électrique.

Si l'on utilise les développement des différents champs électriques, la relation de continuité pour le champ électrique devient :

$$\left\{ \mathcal{R}g\{\mathbf{\Psi}^{t}(k_{s}\mathbf{R}_{s})\}.i\right\}_{T} = \left\{ \mathcal{R}g\{\mathbf{\Psi}^{t}(k_{m}\mathbf{R}_{s})\}.e\right\}_{T} + \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{m}\mathbf{R}_{s}).f^{(j)}\right\}_{T}$$
(18)

Or, chaque champ s'exprime dans la base $\Psi^t(k\mathbf{r}) = \{\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})\}$, dont les vecteurs de base sont en fait construits à partir de la base des vecteurs harmoniques sphériques $\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$, $\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi)$, $\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)$ (cf annexe A); sans rentrer dans les détails, leurs définitions sont:

$$\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \hat{\mathbf{r}}Y_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\hat{r}}Y_{n,m}(\theta,\phi) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{n(n+1)}}$$
$$\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\hat{r}}Y_{n,m}(\theta,\phi)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Le symbole $Y_{n,m}(\theta,\phi)$ désigne une fonction harmonique sphérique scalaire qui dépend des coordonnées angulaires (θ,ϕ) . Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire radial. Le laplacien angulaire $\nabla_{\hat{r}}$ est défini par la relation: $\nabla_{\hat{r}} = \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$.

relation: $\nabla_{\hat{r}} = \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$. Ce que nous voulons, ce sont les composantes tangentielles de ces vecteurs. Si M est un point de la sphère associé aux coordonnées sphériques (R_s, θ, ϕ) , avec R_s rayon de la sphère, on peut lui associer le repère sphérique $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$; le plan tangentiel est alors le plan défini par $(M, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ et tout vecteur tangentiel est ainsi une combinaison linéaire de $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$. Il ne fait aucun doute que $\mathbf{Y}_{n,m}$ est radial, tout comme il ne fait aucun doute que $\mathbf{Z}_{n,m}$ est tangentiel. Le vecteur $\mathbf{X}_{n,m}$ est lui colinéaire à $\hat{\mathbf{r}} \wedge \nabla_{\hat{r}}$, donc perpendiculaire au vecteur radial $\hat{\mathbf{r}}$: il est donc aussi tangentiel.

Les composantes tangentielles des différents champs sont donc suivant les deux vecteurs $\mathbf{X}_{n,m}$ et $\mathbf{Z}_{n,m}$. Or, rappelons nous la définition (16) des vecteurs de base:

$$\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = h_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr}\{[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}h_n(kr)\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) + [krh_n(kr)]'\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)\}$$

On en déduit leurs composantes tangentielles:

$$\{\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})\}_T = h_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$
$$\{\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})\}_T = \frac{1}{kr}[krh_n(kr)]'\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)$$

On obtiendra par conséquent en projetant l'égalité (18) sur chacun de ces deux vecteurs, deux équations; une première équation provient de la projection sur $\{\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})\}_T$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E}_{i}(\mathbf{R}_{s})\}_{T} &= \{\mathbf{E}_{e}(\mathbf{R}_{s})\}_{T} + \{\mathbf{E}_{s}(\mathbf{R}_{s})\}\}_{T} \\ \{Rg\{\mathbf{M}_{n,m}(k_{s}\mathbf{R}_{s})\}\}_{T} &= \{Rg\{\mathbf{M}_{n,m}(k_{m}\mathbf{R}_{s})\}\}_{T} + \{\mathbf{M}_{n,m}(k_{m}\mathbf{R}_{s})\}\}_{T} \\ j_{n}(k_{s}R_{s})[i]_{n,m}^{M} &= j_{n}(k_{m}R_{s})[e]_{n,m}^{M} + h_{n}(k_{m}R_{s})[f]_{n,m}^{M} \end{aligned}$$

ou $\begin{bmatrix} M \\ n,m \end{bmatrix}$ désigne le coefficient du vecteur $\mathbf{M}_{n,m}$ pour chacun des différents champs. Cette équation peut s'écrire en multipliant chaque membre par $k_s R_s$:

$$k_s R_s j_n(k_s R_s)[i]_{n,m}^M = k_s R_s j_n(k_m R_s)[e]_{n,m}^M + k_s R_s h_n(k_m R_s)[f]_{n,m}^M$$

On pose à présent: $\chi_s = k_m R_s$. Nous l'avons déja vu précédemment: χ_s est le paramètre de taille associé à la sphère de rayon R_s exposée au rayonnement dont le module du vecteur d'onde dans le milieu extérieur est k_m . Il permet de travailler avec un paramètre sans dimension et d'un ordre de grandeur raisonnable.

De plus, nous allons utiliser le contraste d'indice entre le milieu extérieur et la sphère $\rho_s=\frac{k_s}{k_m}$ Par conséquent, $\rho_s\chi_s=k_sR_s$. Nous allons pour finir faire intervenir les fonctions de Riccardi-Bessel $\psi_n(x)=xj_n(x)$ et $\xi_n(x)=xh_n(x)$. L'équation précédente devient ainsi :

$$\psi_n(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^M = \rho_s \psi_n(\chi_s)[e]_{n,m}^M + \rho_s \xi_n(\chi_s)[f]_{n,m}^M$$
(19)

En utilisant l'expression de $\{\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})\}_T$, on peut dériver à partir de l'égalité (18) une seconde équation :

$$\begin{split} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{i}}(\mathbf{R}_{s}) \right\}_{T} &= \left\{ \mathbf{E}_{e}(\mathbf{R}_{s}) \right\}_{T} + \left\{ \mathbf{E}_{s}(\mathbf{R}_{s}) \right\}_{T} \\ \left\{ Rg \left\{ \mathbf{N}_{n,m}(k_{s}\mathbf{R}_{s}) \right\} \right\}_{T} &= \left\{ Rg \left\{ \mathbf{N}_{n,m}(k_{m}\mathbf{R}_{s}) \right\} \right\}_{T} + \left\{ \mathbf{N}_{n,m}(k_{m}\mathbf{R}_{s}) \right\} \right\}_{T} \\ \frac{1}{k_{s}R_{s}} \left(\left(k_{s}rj_{n}(k_{s}r) \right)_{r=R_{s}}^{'} \right) \left[i \right]_{n,m}^{N} &= \frac{1}{k_{m}R_{s}} \left(\left(k_{m}rj_{n}(k_{m}r) \right)_{r=R_{s}}^{'} \right) \left[e \right]_{n,m}^{N} + \frac{1}{k_{m}R_{s}} \left(\left(k_{m}rh_{n}(k_{m}r) \right)_{r=R_{s}}^{'} \right) \left[f \right]_{n,m}^{N} \end{split}$$

à partir de laquelle on obtient, par une démarche analogue à celle de l'obtention de (19) :

$$\psi_n'(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^N = \rho_s \psi_n'(\chi_s)[e]_{n,m}^N + \rho_s \xi_n'(\chi_s)[f]_{n,m}^N$$
(20)

Nous avons à présent obtenu, grâce à la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, 2 des 4 équations que nous recherchons. Rappelons les:

(19):
$$\psi_n(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^M = \rho_s \psi_n(\chi_s)[e]_{n,m}^M + \rho_s \xi_n(\chi_s)[f]_{n,m}^M$$

(20): $\psi_n'(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^N = \rho_s \psi_n'(\chi_s)[e]_{n,m}^N + \rho_s \xi_n'(\chi_s)[f]_{n,m}^N$

Etape 3: Continuité tangentielle du vecteur excitation magnétique:

En utilisant la continuité tangentielle du champ magnétique, on obtient deux nouvelles relations. Pour ce, considérons la relation $\mathbf{rotE} = i\omega\mu\mathbf{H}$ et le fait que $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$ soient liés par construction de ces vecteurs par les relations (cf annexe B):

$$\nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$$
$$\nabla \wedge \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

Il en découle l'expression du champ magnétique excitateur dans la base Ψ :

$$\mathbf{H}_{e}(\mathbf{r}) = E \frac{1}{i\omega\mu_{0}\mu_{m}} \mathcal{R}g\{\nabla \wedge \mathbf{\Psi}^{t}(k_{m}\mathbf{r})\}.e = E \frac{k_{m}}{i\omega\mu_{0}\mu_{m}} \{ [\mathbf{N}_{n,m}(k_{m}\mathbf{r}), \mathbf{M}_{n,m}(k_{m}\mathbf{r})] \} \begin{bmatrix} [e]^{M} \\ [e]^{N} \end{bmatrix}$$

et il en est de même pour les champs magnétiques diffractés et intérieurs. D'où, par des démarches analogues à celles utilisées pour établir les équations (19) et (20), la donnée de deux nouvelles équations (20).

$$\mu_m \psi_n(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^N = \mu_s \psi_n(\chi_s)[e]_{n,m}^N + \mu_s \xi_n(\chi_s)[f]_{n,m}^N$$
(21)

$$\mu_m \psi_n'(\rho_s \chi_s)[i]_{n,m}^M = \mu_s \psi_n'(\chi_s)[e]_{n,m}^M + \mu_s \xi_n'(\chi_s)[f]_{n,m}^M$$
(22)

Récapitulons: à cet instant du calcul, nous avons les 4 équations que nous recherchions:

(19):
$$\psi_n(\rho_s\chi_s)[i]_{n,m}^M = \rho_s\psi_n(\chi_s)[e]_{n,m}^M + \rho_s\xi_n(\chi_s)[f]_{n,m}^M$$

(22): $\mu_m\psi_n'(\rho_s\chi_s)[i]_{n,m}^M = \mu_s\psi_n'(\chi_s)[e]_{n,m}^M + \mu_s\xi_n'(\chi_s)[f]_{n,m}^M$
et

(20):
$$\psi'_{n}(\rho_{s}\chi_{s})[i]_{n,m}^{N} = \rho_{s}\psi'_{n}(\chi_{s})[e]_{n,m}^{N} + \rho_{s}\xi'_{n}(\chi_{s})[f]_{n,m}^{N}$$

(21): $\mu_{m}\psi_{n}(\rho_{s}\chi_{s})[i]_{n,m}^{N} = \mu_{s}\psi_{n}(\chi_{s})[e]_{n,m}^{N} + \mu_{s}\xi_{n}(\chi_{s})[f]_{n,m}^{N}$

Etape 4: résolution du système

Ces égalités permettent d'obtenir, en éliminant $[i]_{n,m}^M$ dans (19) et (22), la formule donnant les coefficients de la matrice de transfert sur les vecteurs $\mathbf{M}_{n,m}$ définie par:

$$f_{nm}^M = [T]_n^M.e_{nm}^M$$

 $^{^2}$ nous donnerons directement leurs expressions, la démarche étant la même que celle utilisée à l'étape 2

On remarque à cette occasion que la matrice de transfert est diagonale, et qu'elle ne dépend pas de m. On a donc:

$$[T]_{n}^{M} = \frac{\mu_{s}\psi_{n}(\rho_{s}\chi_{s})\psi_{n}'(\chi_{s}) - \mu\rho_{s}\psi_{n}'(\rho_{s}\chi_{s})\psi_{n}(\chi_{s})}{\mu\rho_{s}\psi_{n}'(\rho_{s}\chi_{s})\xi_{n}(\chi_{s}) - \mu_{s}\psi_{n}(\rho_{s}\chi_{s})\xi_{n}'(\chi_{s})}$$
(23)

et, en éliminant $[i]_{n,m}^N$ dans les relations (20) et (21), la formule donnant les coefficients de la matrice de transfert sur les vecteurs $\mathbf{N}_{n.m}$:

$$[T]_{n}^{N} = \frac{\mu_{s}\psi_{n}(\chi_{s})\psi_{n}'(\rho_{s}\chi_{s}) - \mu\rho_{s}\psi_{n}'(\chi_{s})\psi_{n}(\rho_{s}\chi_{s})}{\mu\rho_{s}\psi_{n}(\rho_{s}\chi_{s})\xi_{n}'(\chi_{s}) - \mu_{s}\psi_{n}'(\rho_{s}\chi_{s})\xi_{n}(\chi_{s})}$$
(24)

En ce qui concerne l'expression des champs à l'intérieur de la sphère, et après l'utilisation de la relation de Wronskian : $\psi_n(x)\xi_n^{'}(x)-\psi_n^{'}(x)\xi_n(x)=i$, on obtient finalement les relations recherchées :

$$[i]_{n,m}^{M} = \mu_{s} \rho_{s} \frac{i}{\mu_{s} \psi_{n}(\rho_{s} \chi_{s}) \xi_{n}'(\chi_{s}) - \mu \rho_{s} \psi_{n}'(\rho_{s} \chi_{s}) \xi_{n}(\chi_{s})} [e]_{n,m}^{M}$$

$$[i]_{n,m}^{N} = \mu_{s} \rho_{s} \frac{i}{\mu \rho_{s} \psi_{n}(\rho_{s} \chi_{s}) \xi_{n}'(\chi_{s}) - \mu_{s} \psi_{n}'(\rho_{s} \chi_{s}) \xi_{n}(\chi_{s})} [e]_{n,m}^{N}$$
(25)

Ainsi, on se rend compte de toute l'étendue de la puissance de la théorie de Lorenz-Mie, qui permet d'obtenir à partir d'une décomposition des différents champs dans la base $\Psi^t(k\mathbf{r})$ l'expression des champs diffractés par une sphère et des champs intérieurs à celle ci en fonction de la seule donnée de l'onde excitatrice qui, rappelons le, correspond à l'onde qui serait présente dans le milieu si la sphère y était absente; on remplace donc cette sphère par ses trois données (R_s, μ_s, ϵ_s) .

2.4.5 Relation de conservation de la force- Données du problème

Maintenant que nous sommes capable d'obtenir le champ diffusé à partir du champ incident, il nous faut évaluer la force appliquée à la sphère dans le cas résonnant. Nous nous placerons dans le cas général d'une source S émettant une onde lumineuse exerçant une force optique sur un objet. Nous allons procéder de la façon suivante:

- 1) Nous exprimerons tout d'abord avec les formules de force de Lorentz la quantité de mouvement délivrée par la source et celle transmise à l'objet.
- 2) Nous exprimerons ensuite la quantité de mouvement conservée par le faisceau après la diffusion à l'aide du tenseur de Maxwell, où tenseur des contraintes.
 - 3) Nous effectuerons enfin sur la force optique obtenue une moyenne temporelle.

Nous allons manipuler les quantités suivantes:

 \mathbf{F}_s : quantité de mouvment issue de la source \mathbf{F}_{obj} : quantité de mouvement transférée à l'objet $\mathbf{F}_{Faisceau}$:quantité de mouvement issue de la source non transférée à l'objet

 $\mathbf{S}:$ vecteur de Poynting

 $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$: tenseur de Maxwell

 ρ_{pol} : densité volumique de charge de polarisation ρ_{obj} : densité volumique de charge de l'objet ρ_s : densité volumique de charge de la source

 j_{pol} : densité volumique de courant de polarisation j_{obj} : densité volumique de courant de l'objet j_s : densité volumique de courant de la source.

2.4.6 Quantité de mouvement délivrée par la source et transmise à l'objet

Supposons que nous ayons une source, caractérisée par une densité volumique de charge $\rho_s(\mathbf{r},t)$ et une densité volumique de courant $\mathbf{j}_s(\mathbf{r},t)$, et un objet diélectrique. Cette source crée une onde électromagnétique $(\mathbf{E}_e, \mathbf{B}_e)$.

Nous allons, pour caractériser l'interaction, entre une onde électromagnètique et l'objet utiliser le théorème de compensation:

Théorème de compensation: L'interaction d'une onde électromagnétique avec l'objet est équivalente à l'interaction entre cette même onde et une distribution locale de charges et de courants dans le vide.

L'objet, en présence d'une onde électromagnètique, acquiert une polarisation électrique $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ et une polarisation magnétique $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$. Nous lui associons une densité volumique de courant $\mathbf{j}_{obj}(\mathbf{r},t)$ et une densité volumique de charge ρ_{obj} . Relier ces densités aux vecteurs $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ et $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ permet d'expliciter l'effet de l'onde excitatrice sur l'objet. Ce sera la première étape de notre calcul.

Définissons une densité volumique de charge de polarisation $\rho_{pol}(\mathbf{r},t)$ par la relation :

$$\rho_{pol}\left(\mathbf{r},t\right) \equiv -\nabla \bullet \mathbf{P}\left(\mathbf{r},t\right)$$

Cette densité de charge est équivalente d'après le théorème de compensation à l'objet, si on lui adjoint une densité volumique de courant \mathbf{j}_{obj} adéquate. Nous allons dans un premier temps définir un courant de polarisation par la relation :

$$\mathbf{j}_{pol}\left(\mathbf{r},t\right)\equiv\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left(\mathbf{r},t\right)$$

définition à partir de laquelle on vérifie aisément la loi de conservation de la charge :

$$\nabla \bullet \mathbf{j}_{pol} \left(\mathbf{r}, t \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bullet \mathbf{P} \left(\mathbf{r}, t \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{pol} \left(\mathbf{r}, t \right)$$

Le vecteur polarisation $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ induit lui aussi un courant électrique $\mathbf{j}_{mag}(\mathbf{r},t)$ défini par :

$$\mathbf{j}_{mag}\left(\mathbf{r},t\right)=\nabla\wedge\mathbf{M}\left(\mathbf{r},t\right)$$

et vérifiant la relation de flux conservatif :

$$\nabla \bullet \mathbf{j}_{mag}(\mathbf{r},t) = \nabla \bullet \left[\nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r},t) \right] = 0$$

Nous avons alors $\mathbf{j}_{obj}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}_{pol}(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}_{mag}(\mathbf{r},t)$. et $\rho_{obj} = \rho_{pol}$.

Après ces quelques définitions, nous allons à présent établir l'équation de conservation de la force. La seule force exercée provient de l'onde électromagnétique, créée par les termes sources (ρ_s, \mathbf{j}_s) . En considérant que le courant \mathbf{j}_s est relié à la charge ρ_s , qui est en mouvement à la vitesse \mathbf{v} , par la relation $\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}$, l'équation de Lorentz s'écrit (on abandonne par commodité la notation en (\mathbf{r}, t)):

$$\mathbf{F}_s = \rho_s \mathbf{E} + \mathbf{j}_s \wedge \mathbf{B}$$

Nous allons alors calculer la force exercée par le champs sur l'objet, soit:

$$\mathbf{F}_{obj} = \rho_{obj} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{obj} \wedge \mathbf{B}$$

Si nous passerons par l'intermédiaire du tenseur de Maxwell, c'est bien évidemment parce que nous ne disposons pas de $(\rho_{obj}, \mathbf{j}_{obj})$. Comme avant l'émission l'impulsion du système totale est nulle, nous avons après l'émission, toujours une impulsion nulle (conservation de l'impulsion). On a donc:

$$\mathbf{F}_{obj} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{faisceau} = \mathbf{0}$$

ce qui peut s'écrire également:

$$-\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_{obi} + \mathbf{F}_{faisceau}$$

Notre but à présent est de déterminer $\mathbf{F}_{faisceau}$.

2.4.7 Détermination de la quantité de mouvement conservée par le faisceau après la diffusion

Avec les expressions que nous avons trouvé pour \mathbf{F}_s et \mathbf{F}_{obj} , il nous faut retrouver une expression de la forme:

$$-\mathbf{j}_s \wedge \mathbf{B} - \rho_s \mathbf{E} = \mathbf{j}_{obj} \wedge \mathbf{B} + \rho_{obj} \mathbf{E} + \mathbf{F}_{faisceau}$$

afin de déterminer $\mathbf{F}_{faisceau}$. Ce calcul, assez long, se fait uniquement en utilisant les données du problème et les équations de Maxwell, \mathbf{E} et \mathbf{B} désignant les champs totaux, somme des champs incidents et des champs diffusés par l'objet $(\rho_{obi}, \mathbf{j}_{obi})$:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{26}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho_s + \rho_{obj}}{\epsilon_0} \tag{27}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_{obj}$$
 (28)

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{29}$$

Nous allons commencer par calculer le terme de force relative aux densités de courant. Pour ce, on effectue le produit vectoriel entre chaque membre de l'équation (28) par le vecteur magnétique, ce qui donne :

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \wedge \mathbf{\,B} \right) \wedge \mathbf{B} = \epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{j}_s + \mathbf{j}_{obj}) \wedge \mathbf{B}$$

relation qui peut se mettre sous la forme :

$$-\mathbf{j}_{s} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j}_{obj} \wedge \mathbf{B} + \epsilon_{0} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_{0}} \left(\nabla \wedge \mathbf{B} \right) \wedge \mathbf{B}$$
(30)

Pour expliciter le terme $\epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{B}$, faisons appel au vecteur de Poynting, défini par la relation .

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$$

et qui, si on le dérive, donne :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = c^2 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \right) = c^2 \epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{B} + c^2 \epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{E}$$

ce qui permet ainsi d'écrire :

$$\epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{E}$$

Le second terme du membre de droite de l'équation ci dessus donne, en utilisant l'équation de Maxwell (26) :

$$-\epsilon_0 \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \wedge \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E})$$

L'équation (30) devient alors :

$$-\mathbf{j}_{s}\wedge\mathbf{B}=\mathbf{j}_{obj}\wedge\mathbf{B}+\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}+\epsilon_{0}\mathbf{E}\wedge\left(\nabla\wedge\mathbf{E}\right)-\frac{1}{\mu_{0}}\left(\nabla\wedge\mathbf{B}\right)\wedge\mathbf{B}$$

La symétrie de l'expression

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}$$

nous invite à simplifier notre calcul. Considérons la relation vectorielle :

$$\nabla \left(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \right) = \left(\mathbf{a} \bullet \nabla \right) \mathbf{b} + \left(\mathbf{b} \bullet \nabla \right) \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \left(\nabla \wedge \mathbf{b} \right) + \mathbf{b} \wedge \left(\nabla \wedge \mathbf{a} \right)$$

qui donne, en prenant $\mathbf{a} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - (\mathbf{a} \bullet \nabla) \mathbf{a}$$

et

$$-(\nabla \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{a}^2 - (\mathbf{a} \bullet \nabla) \mathbf{a}$$

on peut alors réécrire sous la forme

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = \left(\frac{\epsilon_0}{2} \nabla \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2 \right) - \left(\epsilon_0 (\mathbf{E} \bullet \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \bullet \nabla) \mathbf{B} \right)$$

La "simplification" n'apparait pas franchement, puisque (30) devient finalement

$$-\mathbf{j}_s \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j}_{obj} \wedge \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \left(\frac{\epsilon_0}{2} \nabla \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2 \right) - \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \bullet \nabla \right) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B} \bullet \nabla \right) \mathbf{B}$$
 La suite du calcul expliquera pourquoi cette étape de "simplification" était nécessaire. Nous

La suite du calcul expliquera pourquoi cette étape de "simplification" était nécessaire. Nous allons à présent nous préoccuper des termes de force liés aux densités de courant En utilisant l'équation de Maxwell (26) :

$$-\rho_{s}\mathbf{E} = \rho_{obj}\mathbf{E} - \epsilon_{0} (\nabla \bullet \mathbf{E}) \mathbf{E}$$
$$= \rho_{obj}\mathbf{E} - \epsilon_{0} (\nabla \bullet \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_{0}} (\nabla \bullet \mathbf{B}) \mathbf{B}$$

On a ajouté ci dessus un terme à droite en utilisant le fait que $\nabla \bullet \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Cette astuce de calcul va se révéler très utile par la suite car elle va permettre ainsi de regrouper avec ce terme rajouté un autre terme du développement. Ainsi, on trouve l'expression recherchée:

$$\begin{split} -\mathbf{F}_{s} &= \mathbf{F}_{obj} + \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \left(\frac{\epsilon_{0}}{2} \nabla \mathbf{E}^{2} + \frac{1}{\mu_{0}} \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^{2} \right) \\ &- \left(\epsilon_{0} \left(\mathbf{E} \bullet \nabla \right) \, \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_{0}} \left(\mathbf{B} \bullet \nabla \right) \, \mathbf{B} + \epsilon_{0} \left(\nabla \bullet \, \mathbf{E} \right) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_{0}} \left(\nabla \bullet \, \mathbf{B} \right) \mathbf{B} \right) \end{split}$$

et par conséquent l'expression de l'impulsion contenue dans le faisceau:

$$\mathbf{F}_{faisceau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \left(\frac{\epsilon_0}{2} \nabla \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \nabla \mathbf{B}^2 \right) - (\epsilon_0 \left(\mathbf{E} \bullet \nabla \right) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{B} \bullet \nabla \right) \mathbf{B} + \epsilon_0 \left(\nabla \bullet \mathbf{E} \right) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \bullet \mathbf{B} \right) \mathbf{B} \right)$$

De cette expression va naitre le tenseur de Maxwell. Effectuons les opérations suivantes:

$$(\mathbf{E} \bullet \nabla) \ \mathbf{E} = (E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z})(E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y} + E_z \mathbf{z})$$
$$\mathbf{E} (\nabla \bullet \mathbf{E}) = (E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y} + E_z \mathbf{z})(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})$$

Ainsi, sur \mathbf{x} , la somme $(\mathbf{E} \bullet \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} (\nabla \bullet \mathbf{E})$ s'écrit :

$$\begin{split} \left[\left(\mathbf{E} \bullet \nabla \right) \, \mathbf{E} + \mathbf{E} \left(\nabla \bullet \mathbf{E} \right) \right]_{\mathbf{x}} &= \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \\ &+ \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= 2 E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \left(E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) \\ &+ \left(E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} + E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ \left[\left(\mathbf{E} \bullet \nabla \right) \, \mathbf{E} + \mathbf{E} \left(\nabla \bullet \mathbf{E} \right) \right]_{\mathbf{x}} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} E_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} E_x E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_x E_z \right] \end{split}$$

par conséquent, nous obtenons:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{E} \bullet \nabla) \ \mathbf{E} + \mathbf{E} (\nabla \bullet \mathbf{E})] &= \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} E_x E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_x E_z \right) \mathbf{x} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_y^2 + \frac{\partial}{\partial z} E_z E_y \right) \mathbf{y} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} E_z E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_z E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z^2 \right) \mathbf{z} \\ &= \nabla \bullet (\mathbf{E} \mathbf{E}) \end{aligned}$$

où **EE** est le dyade construit à partir du couple de vecteur (**E**, **E**). Cette relation existe aussi pour le terme $[(\mathbf{B} \bullet \nabla) \ \mathbf{B} + (\nabla \bullet \mathbf{B}) \ \mathbf{B}]$:

$$[(\mathbf{B} \bullet \nabla) \ \mathbf{B} + (\nabla \bullet \mathbf{B}) \mathbf{B}] = \nabla \bullet (\mathbf{B} \mathbf{B})$$

On remarque à cette occasion l'utilité d'une part de notre "simplification" précédente, et d'autre part d'avoir rajouté le terme nul $\frac{1}{\mu_0} (\nabla \bullet \mathbf{B}) \mathbf{B}$.

A l'aide du calcul précédent, on démontre que la quantité de mouvement conservée par le faisceau après la diffusion s'écrit:

$$\mathbf{F}_{faisceau} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nabla \bullet \overline{\overline{\mathbf{T}}}$$

avec S vecteur de Poynting tel que:

$$\mathbf{S=}\epsilon_{0}c^{2}\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}$$

L'équation de conservation d'impulsion devient alors:

$$-\mathbf{F}_{s} = \mathbf{F}_{obj} + \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nabla \bullet \overline{\overline{\mathbf{T}}}$$
(31)

où $\overline{\mathbf{T}}$ est le **TENSEUR DE MAXWELL** défini par la relation sur ses composantes:

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)$$

Cette dernière équation met en évidence la conservation de la force. Elle ressemble à l'équation de conservation de l'énergie:

$$\mathbf{E} \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{S} = 0 \tag{32}$$

avec les correspondances évidentes entre les termes source \mathbf{F}_s et $\mathbf{E} \bullet \mathbf{j}$, et les termes flux $\nabla \bullet \mathbf{S}$ et $\nabla \bullet \overline{\mathbf{T}}$. Notons au passage que pour des raisons de convention, la divergence du vecteur de Poynting est précédée d'un signe positif, tandis que celle du tenseur de Maxwell est précédée d'un signe négatif. Enfin, les deux équations (31) et (32) présentent deux dérivées temporelles, qui traduisent les variations des densités d'impulsion et d'énergie de l'onde. D'une part, nous avons la dérivée de la densité d'impulsion $\frac{\mathbf{S}}{c^2}$, et d'autre part la dérivée de la densité d'énergie u. Si un terme supplémentaire apparait dans l'équation (31), c'est tout simplement que nous avons travaillé avec un objet qui absorbe de l'impulsion pour élaborer cette équation. Pour avoir équivalence parfaite, il aurait fallu un terme d'absorption d'énergie dans l'équation (32), pour correspondre au terme \mathbf{F}_{obj} de l'équation (31). La formule de définition sur les composantes du tenseur de Maxwell peut se généraliser au cas d'un milieu extérieur à l'objet diélectrique, d'indice optique n_m , de permittivité électrique relative ϵ_m et de perméabilité magnétique relative μ_m :

$$T_{ij} = \epsilon_0 \epsilon_m E_i E_j + \frac{1}{\mu_0 \mu_m} B_i B_j - \delta_{ij} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_m}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right)$$

L'expression (31) est un bilan microscopique. Pour obtenir la force optique totale, il va nous falloir l'intégrer sur un volume contenant l'objet mais pas les termes sources.

2.4.8 Calcul de la force optique totale- Utilisation des valeurs moyennes

Afin d'avoir l'expression de la force, il nous faut intégrer sur un volume V l'équation microscopique (31). Si l'on considère le fait que ce volume ne contient pas les termes sources, on a bien évidemment:

$$\int_{V} (\rho_{s} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{s} \wedge \mathbf{B}) dV = \mathbf{0}$$

De plus, nous allons effectuer une moyenne temporelle, étant donné les fréquences optiques auxquelles on travaille. Ce moyennage, lié au fait que nous prendrons pour le champ électrique une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$, nous amènera à constater que:

$$\int_{V} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV = \mathbf{0}$$

On obtient par conséquent:

$$\mathbf{F}_{s} = \left\langle \oint_{V} \nabla \bullet \overline{\overline{\mathbf{T}}} \, dV \right\rangle_{t}$$
$$\mathbf{F}_{s} = \left\langle \oint_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \bullet \widehat{\mathbf{n}} \, dS \right\rangle_{t}$$

après avoir utilisé le théorème de Green-Ostrogradsky. Développons à présent cette expression.

Nous prendrons comme surface d'intégration une sphère centrée sur l'origine (donc concentrique à l'objet) de rayon r_0 . Le vecteur normal à la surface $\hat{\mathbf{n}}$ devient égal à $\hat{\mathbf{r}}$ en coordonnées sphériques dans la base usuelle unitaire $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, c'est à dire uniquement radial. Le produit scalaire entre un tenseur d'ordre 2 et un vecteur, c'est à dire un tenseur d'ordre 1, est un vecteur. En coordonnées sphériques, le tenseur de Maxwell peut s'écrire, si on utilise pour plus de lisibilité une écriture matricielle:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \left(\begin{array}{ccc} T_{r,r} & T_{r,\theta} & T_{r,\phi} \\ T_{\theta,r} & T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi} \\ T_{\phi,r} & T_{\phi,\theta} & T_{\phi,\phi} \end{array} \right)$$

et le produit scalaire contenu dans l'intégrale devient alors:

$$\overline{\overline{T}} \bullet \widehat{\mathbf{n}} = \overline{\overline{T}} \bullet \widehat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} T_{r,r} & T_{r,\theta} & T_{r,\phi} \\ T_{\theta,r} & T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi} \\ T_{\phi,r} & T_{\phi,\theta} & T_{\phi,\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{r,r} \\ T_{\theta,r} \\ T_{\phi,r} \end{pmatrix}$$

ce qui nous permet d'obtenir:

$$\mathbf{F}_{s} = \left\langle \oint_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \, dS \right\rangle_{t} = \left\langle \oint_{S} \left(T_{r,r} \widehat{\mathbf{r}} + T_{\theta,r} \widehat{\theta} + T_{\phi,r} \widehat{\phi} \right) dS \right\rangle_{t}$$
(33)

Ainsi, nous évaluerons les trois termes $T_{r,r}\hat{\mathbf{r}}$, $T_{\theta,r}\hat{\theta}$ et $T_{\phi,r}\hat{\phi}$ afin d'exprimer \mathbf{F}_s .

L'intégrale sur la surface se décompose de la façon suivante en coordonnées sphériques:

$$\oint_{S} dS = r_0^2 \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta = r_0^2 \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)$$

nous faisons ce changement de variable en ce qui concerne θ pour des commodités d'écriture puisque par la suite, nous décomposerons les différents champs sur une base de vecteurs harmoniques sphériques qui, eux, ont leur dépendance en θ sous la forme $\cos \theta$. On développe alors la formule (33) :

$$\mathbf{F}_{s} = \left\langle \oint_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \bullet \widehat{\mathbf{n}} \, dS \right\rangle_{t} = \left\langle r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, \widehat{\mathbf{r}} \, \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{r,r} + r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, \widehat{\theta} \, \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{\theta,r} + r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, \widehat{\phi} \, \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{\phi,r} \right\rangle_{t}$$

Nommons z la direction de propagation du faisceau incident. Cette direction combinée avec l'origine O du repère, située au centre de l'objet, défini un axe (Oz). La force appliquée selon l'axe z, F_z , est donnée

par la relation $F_z = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ Nous la calculons en utilisant les relations de changement de base entre la base unitaire cartésienne et la base unitaire sphérique :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

et donc
$$\widehat{\mathbf{z}} \cdot \widehat{\mathbf{r}} = \cos \theta$$
 $\widehat{\mathbf{z}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta$ $\widehat{\mathbf{z}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\phi}} = 0$.

ce qui permet d'établir la formule :

$$F_{z} = \widehat{\mathbf{z}} \bullet \left\langle \int_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \, dS \right\rangle_{t} = \left\langle r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, \cos\theta \, \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{r,r} \right\rangle_{t} - \left\langle r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \, \sin\theta \, \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{\theta,r} \right\rangle_{t}$$
(34)

Nous allons à présent nous débarasser de la moyenne temporelle. En effet, nous avons supposé une dépendance harmonique de l'onde. Un champ harmonique voit son amplitude vérifier:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}\right] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}\right]$$

Le tenseur de Maxwell de par sa définition contient des produits d'amplitude de champ de la forme $E_i(\mathbf{r},t) E_j(\mathbf{r},t)$. En utilisant la propriété que nous venons d'énoncer, ces produits deviennent:

$$E_{i}(\mathbf{r},t) E_{j}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} \left[E_{i}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + E_{i}^{*}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right] \frac{1}{2} \left[E_{j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + E_{j}^{*}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{4} E_{i}(\mathbf{r}) E_{j}^{*}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} E_{i}^{*}(\mathbf{r}) E_{j}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} E_{i}(\mathbf{r}) E_{j}(\mathbf{r}) e^{-2i\omega t} + \frac{1}{4} E_{i}^{*}(\mathbf{r}) E_{i}^{*}(\mathbf{r}) e^{2i\omega t}$$

$$E_{i}(\mathbf{r},t) E_{j}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4} E_{i}(\mathbf{r}) E_{j}^{*}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} E_{i}^{*}(\mathbf{r}) E_{j}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_{i}(\mathbf{r}) E_{j}(\mathbf{r}) e^{-2i\omega t} \right\}$$

On a par conséquent:

$$\langle E_i(\mathbf{r},t) E_j(\mathbf{r},t) \rangle_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_i^*(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}) \}$$

Cette écriture se révèle être très utile puisque rappelons le, ce sont des moyennes temporelles qui nous intéressent. De plus, il est évident que:

$$\left\langle \oint_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \bullet \widehat{\mathbf{n}} \, dS \right\rangle_{t} = \oint_{S} \left\langle \overline{\overline{\mathbf{T}}} \bullet \widehat{\mathbf{n}} \right\rangle_{t} \, dS$$

ce qui implique que nous devons moyenner $E_i(\mathbf{r},t) E_j(\mathbf{r},t)$ dans le temps. On peut ainsi alléger l'écriture en redéfinissant légèrement les composantes du tenseur de Maxwell selon les formules:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_{r,r} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \epsilon_0 \epsilon_m \left(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^* \right) \left(\mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) + \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \left(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}^* \right) \left(\mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) - \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \epsilon_m \left| \mathbf{E} \right|^2 + \frac{\left| \mathbf{B} \right|^2}{\mu_0 \mu_m} \right) \right\}$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_{\theta,r} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \epsilon_0 \epsilon_m \left(\widehat{\theta} \cdot \mathbf{E}^* \right) \left(\mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) + \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \left(\widehat{\theta} \cdot \mathbf{B}^* \right) \left(\mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) \right\}$$
(35)

ce qui permet de ne plus considérer les moyennes temporelles $\left\langle \right\rangle_{_{t}}$ vu qu'elles sont effectuées directement dans le tenseur de maxwell ci-dessus et ainsi de réécrire l'expression (34):

$$F_{z} = \widehat{\mathbf{z}} \cdot \int_{S} \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \, dS = \underbrace{r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos \theta) \cos \theta}_{=} \overline{\overline{\mathbf{T}}_{r,r}} - \underbrace{r_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos \theta) \sin \theta}_{=} \overline{\overline{\mathbf{T}}_{\theta,r}}_{=}$$
(36)

2.4.9 Hypothèse de champ lointain

Les formules précédentes sont vraies quel que soit le rayon de la sphère sur la surface de laquelle se fait l'intégration, du moment que le volume d'intégration défini par cette sphère ne contienne que l'objet. Ainsi, nous pouvons faire tendre le rayon de notre sphère d'intégration vers l'infini. Le bilan d'impulsion

sera toujours vrai et nous pourrons alors utiliser l'hypothèse des champs lointains: les composantes radiales des différents champs excitateurs et diffusés deviennent négligeables devant leurs composantes transverses (l'onde s'apparente alors à une onde plane):

$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{E} \cdot \widehat{\theta} = 0$$
$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B} \cdot \widehat{\theta} = 0$$

Les expressions (35) peuvent alors s'approximer par:

$$\lim_{r_{0}\to\infty} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{r,r} \to -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \left(\epsilon_{0} \epsilon_{m} \left| \mathbf{E} \right|^{2} + \frac{\left| \mathbf{B} \right|^{2}}{\mu_{0} \mu_{m}} \right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \epsilon_{0} \epsilon_{m} \left(\mathbf{E}_{e} + \mathbf{E}_{s}^{*} \right) \cdot \left(\mathbf{E}_{e} + \mathbf{E}_{s} \right) + \frac{\left(\mathbf{B}_{e}^{*} + \mathbf{B}_{s}^{*} \right) \cdot \left(\mathbf{B}_{e} + \mathbf{B}_{s} \right)}{\mu_{0} \mu_{m}} \right\}$$

$$\lim_{r_{0}\to\infty} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{\theta,r} = \lim_{r_{0}\to\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \epsilon_{0} \epsilon_{m} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{E}^{*} \right) \left(\mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) + \frac{1}{\mu_{0} \mu_{m}} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{B}^{*} \right) \left(\mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{r}} \right) \right\}$$

$$\to 0$$

de plus, toujours sous l'hypothèse du champ lointain, on a la structure d'onde plane dont découle la relation suivante entre champs magnétiques et électriques:

$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{r}) = \frac{k_m}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r})$$

où k_m est la norme du vecteur d'onde dans le milieu extérieur à l'objet. On effectue grâce à cette églité aux limites le développement:

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \mathbf{B}_s^* \cdot \mathbf{B}_s = \lim_{r_0 \to \infty} \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \left(\frac{k_m}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(\frac{k_m}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \right)$$
$$= \lim_{r_0 \to \infty} \frac{1}{\mu_0 \mu_m v_m^2} \left(\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \right)$$

Utilisons à présent la relation vectorielle $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \bullet (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) (\mathbf{b} \bullet \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{d}) (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})$:

$$(\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^*(\mathbf{r})) \cdot (\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_{s}(\mathbf{r})) = (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}) \left(\mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\mathfrak{s}}(\mathbf{r}) \right) - (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{\mathfrak{s}}^*(\mathbf{r})) \left(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{s}(\mathbf{r}) \right)$$

Le champ électrique diffusé est transverse à l'inifni:

$$(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r})) (\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r})) = 0$$

De plus, la vitesse de l'onde diffusée v_m est telle que:

$$\frac{1}{v_m^2} = \epsilon_0 \epsilon_m \mu_0 \mu_m$$

on déduit alors:

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_m v_m^2} \left(\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \right) = \epsilon_0 \epsilon_m \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r})$$

ce qui nous permet de conclure:

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \mathbf{B}_s^* \cdot \mathbf{B}_s = \lim_{r_0 \to \infty} \epsilon_0 \epsilon_m \left(\mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \right)$$
(37)

L'équation (36) devient derechef en champ lointain (l'intégrale faite équivaut à une intégrale sur l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$) :

$$F_{z} = -\frac{1}{4} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \operatorname{Re} \left\{ \epsilon_{0} \epsilon_{m} \left(\mathbf{E}_{e}^{*} + \mathbf{E}_{s}^{*} \right) \cdot \left(\mathbf{E}_{e} + \mathbf{E}_{s} \right) + \frac{\left(\mathbf{B}_{e}^{*} + \mathbf{B}_{s}^{*} \right) \cdot \left(\mathbf{B}_{e} + \mathbf{B}_{s} \right)}{\mu_{0} \mu_{m}} \right\} d\Omega$$

$$= -\frac{\epsilon_{0} \epsilon_{m}}{4} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_{s}^{*} \cdot \mathbf{E}_{e} + \mathbf{E}_{e}^{*} \cdot \mathbf{E}_{s} \right\} d\Omega - \frac{1}{4\mu_{0} \mu_{m}} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B}_{s}^{*} \cdot \mathbf{B}_{e} + \mathbf{B}_{e}^{*} \cdot \mathbf{B}_{s} \right\} d\Omega$$

$$- \frac{\epsilon_{0} \epsilon_{m}}{4} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \left| \mathbf{E}_{s} \right|^{2} d\Omega - \frac{1}{4\mu_{0} \mu_{m}} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \left| \mathbf{B}_{s} \right|^{2} d\Omega$$

$$- \frac{\epsilon_{0} \epsilon_{m}}{4} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \left| \mathbf{E}_{e} \right|^{2} d\Omega - \frac{1}{4\mu_{0} \mu_{m}} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos \theta \left| \mathbf{B}_{e} \right|^{2} d\Omega$$

d'après la relation (37):

$$\frac{1}{4\mu_0\mu_m} \lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos\theta \ |\mathbf{B}_s|^2 d\Omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m}{4} \lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos\theta \ |\mathbf{E}_s|^2 d\Omega$$
$$\frac{1}{4\mu_0\mu_m} \lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos\theta \ |\mathbf{B}_e|^2 d\Omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m}{4} \lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos\theta \ |\mathbf{E}_e|^2 d\Omega$$

Les champs excitateurs sont à flux conservatifs:

$$\lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos \theta \, \left| \mathbf{E}_e \right|^2 d\Omega = 0$$

on en déduit ainsi finalement l'expression de F_z :

$$F_{z} = -\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}}{4} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos\theta \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_{s}^{*} \cdot \mathbf{E}_{e} + \mathbf{E}_{e}^{*} \cdot \mathbf{E}_{s} \right\} d\Omega - \frac{1}{4\mu_{0}\mu_{m}} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos\theta \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B}_{s}^{*} \cdot \mathbf{B}_{e} + \mathbf{B}_{e}^{*} \cdot \mathbf{B}_{s} \right\} d\Omega - \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}}{2} \lim_{r_{0} \to \infty} r_{0}^{2} \int_{\Omega} \cos\theta \left| \mathbf{E}_{s} \right|^{2} d\Omega$$

$$(38)$$

expression dont nous pouvons calculer chacun des termes.

2.4.10 Introduction de la matrice de force Υ

Nous allons voir que pour expliciter le relation (38), la matrice de force Υ nous sera nécessaire. Elle nous permettra d'obtenir une formule du type:

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{\dagger}.\Upsilon.f \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} f^{\dagger}.\Upsilon.f$$

où e est le vecteur coefficient du champ excitateur et f celui du champ diffusé dans la base de vecteurs (16). Le calcul long et fastidueux qui va suivre de l'intégrale (38) nous amène à introduire la matrice de force Υ :

$$\Upsilon = \left[egin{array}{ccc} \Xi & \Theta \ \Theta & \Xi \end{array}
ight]$$

avec

$$\Theta_{i,j} = \Theta_{nm,\nu\mu} = \frac{m}{n(n+1)} \delta_{m,\mu} \delta_{n,\nu}
\Xi_{i,j} = \Xi_{nm,\nu\mu} = i^{n-\nu} \delta_{m,\mu} \left(\frac{\delta_{\nu,n+1}}{n+1} \sqrt{\frac{n(n+2)((n+1)^2 - m^2)}{(2n+1)(2n+3)}} + \frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{\frac{(n^2-1)(n^2 - m^2)}{(2n+1)(2n-1)}} \right)
= \delta_{m,\mu} \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left(\frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{(n^2-1)(n^2 - m^2)} - \frac{\delta_{\nu,n+1}}{\nu} \sqrt{(\nu^2-1)(\nu^2 - m^2)} \right)$$

les indices de ligne i et de colonne j étant reliés aux entiers (n, m, ν, μ) grâce aux relations:

$$n = E[\sqrt{i}]$$

$$m = n(n+1) - i$$

$$\nu = E[\sqrt{j}]$$

$$\mu = \nu(\nu+1) - j$$

Pour ce faire, nous allons développer sur la base $\Psi^t(k\mathbf{r})$ de vecteurs harmoniques sphériques les différents champs qui sont présents ici:

$$\mathbf{E}_{s} = E\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}).f$$

$$\mathbf{E}_{e} = E\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r})\right\}.e$$

rappels:

- 1) $\Psi^{t}(k\mathbf{r}) = \{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\}$, avec $\{n \in [0, +\infty] \text{ et } m \in [-n, n] \text{ pour chaque valeur de } n\}$
- 2) $\mathcal{R}g\{\Psi^t(k\mathbf{r})\}$ signifie que l'on ne prend que la partie régulière des vecteurs, c'est à dire que l'on remplace dans l'expression de $\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})$ les fonctions de Hankel $h_n(kr)$ divergentes à l'origine par les fonctions de Bessel du premier ordre $j_n(kr)$ qui elles ne divergent pas à l'origine du repère, situé à l'intérieur de la matière diffusante. Ainsi, on respecte le fait que le champ électrique \mathbf{E}_e soit fini à l'origine. Pour le champ électrique diffusé \mathbf{E}_s , ces précautions ne sont pas nécessaires puisqu'il n'existe qu'à l'extérieur de la matière, et donc pas à l'origine.
- 3) f est le vecteur des coefficients du champ électrique diffusé , e est celui du champ excitateur. La théorie de Mie permet de relier ces deux vecteurs par l'intermédiaire d'une matrice T dont les coefficients ont été définis précédemment:

$$f = T.e$$

4) Nous travaillons toujours dans l'hypothèse de champ lointain. Nous allons réutiliser le fait que les développements des champs magnétiques s'expriment en fonction de ceux des champs électriques grâce aux relations:

$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r})$$
$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_e(\mathbf{r})$$

ainsi, on développe, par exemple pour le champ magnétique diffusé:

$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega} \widehat{\mathbf{r}} \wedge E\{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\}.f$$

$$= \frac{E}{i\omega} \{ik\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}), ik\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\}.f$$

$$\lim_{r_0 \to \infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{r}) = i\frac{E\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_m \mu_0 \mu_m}}{c} \left[\mathbf{N} \left(k\mathbf{r} \right), \mathbf{M} \left(k\mathbf{r} \right) \right].f$$

puisque l'on a les relations: $\nabla \wedge \mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})$ et $\nabla \wedge \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$. Pour utiliser l'expression des vecteurs \mathbf{M}_{nm} et \mathbf{N}_{nm} en champ lointain, c'est à dire leurs valeurs quand r tend vers l'infini, rappelons tout d'abord leurs valeurs de définition:

$$\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = h_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr}\{[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}h_n(kr)\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) + [krh_n(kr)]'\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)\}$$

$$\mathcal{R}g\{\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})\} = j_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$

$$\mathcal{R}g\{\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})\} = \frac{1}{kr}\{[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}j_n(kr)\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) + [krj_n(kr)]'\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)\}$$

Comme on le voit dans ces expressions, ce sont les fonctions de Bessel sphérique $h_n(kr)$ et $j_n(kr)$ qui contiennent la dépendance radiale. Leurs expressions asymptotiques sont:

$$h_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x}$$

$$[xh_n(x)]' \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (-i)^n e^{ix}$$

$$j_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(x - n\frac{\pi}{2})}{x}$$

$$[xj_n(x)]' \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \sin(x - (n-1)\frac{\pi}{2})$$

On peut développer, afin d'expliciter les termes sinus en fonction d'exponentielles:

$$\frac{\sin(x - n\frac{\pi}{2})}{x} = \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \left(e^{ix} e^{-in\frac{\pi}{2}} - e^{-ix} e^{in\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \left(e^{ix} e^{-in\frac{\pi}{2}} - e^{-ix} e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{in\pi} \right)$$

$$\frac{\sin(x - n\frac{\pi}{2})}{x} = \frac{1}{2x} (-i)^{n+1} \left(e^{ix} - (-1)^n e^{-ix} \right)$$

$$\sin(x - (n-1)\frac{\pi}{2}) = \cos(x - n\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{ix} e^{-in\frac{\pi}{2}} + e^{-ix} e^{in\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\sin(x - (n-1)\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} (-i)^n \left(e^{ix} + (-1)^n e^{-ix} \right)$$

On en déduit donc les limites:

$$\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) \underset{x \to +\infty}{\overset{\rightarrow}{\longrightarrow}} (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) \underset{x \to +\infty}{\overset{\rightarrow}{\longrightarrow}} \frac{(-i)^n e^{ikr}}{kr} \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\mathcal{R}g\{\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})\} \underset{x \to +\infty}{\overset{\rightarrow}{\longrightarrow}} \frac{1}{2kr} (-i)^{n+1} \left(e^{ikr} - (-1)^n e^{-ikr} \right) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\mathcal{R}g\{\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})\} \underset{x \to +\infty}{\overset{\rightarrow}{\longrightarrow}} \frac{1}{2kr} (-i)^n \left(e^{ikr} + (-1)^n e^{-ikr} \right) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi)$$

Nous allons définir les vecteurs en champ lointain:

$$\mathcal{X}_{nm}(\theta,\phi) \equiv -i^{n} \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta,\phi)$$
$$\mathcal{Z}_{nm}(\theta,\phi) \equiv i^{n-1} \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta,\phi)$$

grâce auxquelles on réécrit les limites en champ lointain, quand r tend vers l'infini:

$$\mathcal{R}g\left\{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})\right\} \longmapsto \frac{i}{2kr} \left\{ \exp(ikr) - (-1)^n \exp(-ikr) \right\} \mathcal{X}_{nm}^*(\theta, \phi)$$

$$\mathcal{R}g\left\{\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\right\} \longmapsto \frac{-i}{2kr} \left\{ \exp(ikr) + (-1)^n \exp(-ikr) \right\} \mathcal{Z}_{nm}^*(\theta, \phi).$$

Les deux vecteurs \mathcal{X}_{nm} et \mathcal{Z}_{nm} ont été introduit dans le but de faciliter les écritures. En effet, ils permettent de réécrire la base de vecteurs harmoniques sphériques en champ lointain:

$$\begin{split} & \Psi^{t}\left(k\mathbf{r}\right) \sim -i\frac{\exp(ikr)}{kr} \left[-\mathcal{X}^{*}(\theta,\phi), \quad \mathcal{Z}^{*}(\theta,\phi) \right] \\ & \Psi^{*}\left(k\mathbf{r}\right) \sim i\frac{\exp(-ikr)}{kr} \left[-\mathcal{X}(\theta,\phi) \right] \\ & \mathcal{R}g\left\{\Psi^{t}\left(k\mathbf{r}\right)\right\} \sim \frac{-i}{2kr} \left[\exp(ikr) - (-1)^{n} \exp(-ikr)\mathcal{X}_{nm}^{*}(\theta,\phi) \right] \\ & \mathcal{R}g\left\{\Psi^{t}\left(k\mathbf{r}\right)\right\} \sim \frac{i}{2kr} \left[\exp(ikr) - (-1)^{n} \exp(-ikr)\mathcal{Z}_{nm}^{*}(\theta,\phi) \right] \\ & \mathcal{R}g\left\{\Psi^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\right\} \sim \frac{i}{2kr} \left[\exp(-ikr) - (-1)^{n} \exp(ikr)\mathcal{X}_{nm}(\theta,\phi) \right] \end{split}$$

On peut alors calculer le premier terme de l'expression (38):

$$\begin{split} &-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta\ \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{s}^{*}\bullet\mathbf{E}_{e}+\mathbf{E}_{e}^{*}\bullet\mathbf{E}_{s}\right\}d\Omega\\ &=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta\ \mathrm{Re}\left\{\begin{array}{c}f^{\dagger}.\Psi^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\bullet\mathcal{R}g\left\{\Psi^{t}\left(k\mathbf{r}\right)\right\}.e\\ &+e^{\dagger}.\mathcal{R}g\left\{\Psi^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\right\}\bullet\Psi^{t}\left(k\mathbf{r}\right).f\end{array}\right\}d\Omega\\ &=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{8k^{2}}\int_{\Omega}\cos\theta\ \mathrm{Re}\left\{f^{\dagger}.\left[\begin{array}{c}\mathcal{X}(\theta,\phi)\\\mathcal{Z}(\theta,\phi)\end{array}\right]\bullet\left[\begin{array}{c}\mathcal{X}^{*}(\theta,\phi)\\\mathcal{Z}(\theta,\phi)\end{array}\right].e\\ &+e^{\dagger}.\left[\begin{array}{c}\mathcal{X}(\theta,\phi)\\\mathcal{Z}(\theta,\phi)\end{array}\right]\bullet\left[\begin{array}{c}\mathcal{X}^{*}(\theta,\phi)\\\mathcal{Z}(\theta,\phi)\end{array}\right].f\left\}d\Omega \end{split}$$

Les vecteurs de coefficients des développements sont indépendants de la position. Calculer ce terme revient donc à évaluer la matrice définie par:

$$\Upsilon = \int \cos \theta d\theta \left\{ \left[\begin{array}{c} \mathcal{X}_{nm}(\theta, \phi) \\ \mathcal{Z}_{nm}(\theta, \phi) \end{array} \right] \bullet \left[\begin{array}{c} \mathcal{X}^*(\theta, \phi) \\ \end{array}, \quad \mathcal{Z}^*(\theta, \phi) \end{array} \right] \right\}$$

Un long calcul nous amène à l'expression

$$\Upsilon = \left[egin{array}{ccc} \Xi & \Theta \ \Theta & \Xi \end{array}
ight]$$

avec

$$\Theta_{i,j} = \Theta_{nm,\nu\mu} = \frac{m}{n(n+1)} \delta_{m,\mu} \delta_{n,\nu}$$

$$\Xi_{i,j} = \Xi_{nm,\nu\mu} = i^{n-\nu} \delta_{m,\mu} \left(\frac{\delta_{\nu,n+1}}{n+1} \sqrt{\frac{n(n+2)((n+1)^2 - m^2)}{(2n+1)(2n+3)}} + \frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{\frac{(n^2-1)(n^2 - m^2)}{(2n+1)(2n-1)}} \right)$$

$$= \delta_{m,\mu} \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left(\frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{(n^2-1)(n^2 - m^2)} - \frac{\delta_{\nu,n+1}}{\nu} \sqrt{(\nu^2-1)(\nu^2 - m^2)} \right)$$

les indices de ligne i et de colonne j étant reliés aux entiers (n, m, ν, μ) grâce aux relations:

$$n = E[\sqrt{i}]$$

$$m = n(n+1) - i$$

$$\nu = E[\sqrt{j}]$$

$$\mu = \nu(\nu+1) - j$$

Vérifions que cette matrice est hermitienne: $\Upsilon=\Upsilon^{\dagger}$:

$$\begin{split} \Theta_{nm,\nu\mu}^* &= \frac{m}{n \, (n+1)} \delta_{m,\mu} \delta_{n,\nu} = \Theta_{nm,\nu\mu} \\ \Xi_{\nu\mu,nm}^* &= \delta_{\mu,m} \frac{i}{\sqrt{(2\nu+1) \, (2n+1)}} (\frac{\delta_{n,\nu-1}}{\nu} \sqrt{(\nu^2-1)(\nu^2-m^2)}) \\ &- \frac{\delta_{n,\nu+1}}{n} \sqrt{(n^2-1) \, (n^2-m^2)}) \\ &= \delta_{m,\mu} \frac{i}{\sqrt{(2n+1) \, (2\nu+1)}} (\frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{(n^2-1) \, (n^2-m^2)}) \\ &- \frac{\delta_{\nu,n+1}}{\nu} \sqrt{(\nu^2-1)(\nu^2-m^2)}) \\ &= \Xi_{nm,\nu\mu} \end{split}$$

Ainsi, on réécrit le premier terme de droite de (38):

$$-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_{s}^{*}\bullet\mathbf{E}_{e}+\mathbf{E}_{e}^{*}\bullet\mathbf{E}_{s}\right\}d\Omega$$

$$=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{8k^{2}}\operatorname{Re}\left\{f^{\dagger}.\Upsilon.e+e^{\dagger}.\Upsilon.f\right\}$$

$$-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_{s}^{*}\bullet\mathbf{E}_{e}+\mathbf{E}_{e}^{*}\bullet\mathbf{E}_{s}\right\}d\Omega$$

$$=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4k^{2}}\operatorname{Re}\left\{e^{\dagger}.\Upsilon.f\right\}$$
(39)

En suivant le même raisonnement, et en utilisant les développements des différents champs magnétiques, on peut calculer le second terme du membre de droite de l'équation (38), c'est à

dire:

$$-\frac{1}{4\mu_{0}\mu_{m}}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta\operatorname{Re}\left\{\mathbf{B}_{s}^{*}\cdot\mathbf{B}_{e}+\mathbf{B}_{e}^{*}\cdot\mathbf{B}_{s}\right\}d\Omega$$

$$=-\frac{E^{2}\epsilon_{0}\epsilon_{m}}{4}\lim_{r_{0}\to\infty}r_{0}^{2}\int_{\Omega}\cos\theta\operatorname{Re}\left\{f^{\dagger}\cdot\left[\begin{array}{c}\mathbf{N}^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\\\mathbf{M}^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\end{array}\right]\bullet\mathcal{R}g\left\{\left[\mathbf{N}\left(k\mathbf{r}\right),\mathbf{M}\left(k\mathbf{r}\right)\right]\right\}.e$$

$$+e^{\dagger}\cdot\mathcal{R}g\left\{\left[\begin{array}{c}\mathbf{N}^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\\\mathbf{M}^{*}\left(k\mathbf{r}\right)\end{array}\right]\right\}\bullet\left[\mathbf{N}\left(k\mathbf{r}\right),\mathbf{M}\left(k\mathbf{r}\right)\right].f\right\}d\Omega$$

$$=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{8k^{2}}\int_{\Omega}\cos\theta\operatorname{Re}\left\{f^{\dagger}\cdot\left[\begin{array}{c}\mathcal{Z}(\theta,\phi)\\\mathcal{X}(\theta,\phi)\end{array}\right]\bullet\left[\begin{array}{c}\mathcal{Z}_{nm}^{*}(\theta,\phi),\quad\mathcal{X}_{nm}^{*}(\theta,\phi)\end{array}\right].e$$

$$+e^{\dagger}\cdot\left[\begin{array}{c}\mathcal{Z}(\theta,\phi)\\\mathcal{X}(\theta,\phi)\end{array}\right]\bullet\left[\begin{array}{c}\mathcal{Z}_{nm}^{*}(\theta,\phi),\quad\mathcal{X}_{nm}^{*}(\theta,\phi)\end{array}\right].f\right\}d\Omega$$

$$=-\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{4k^{2}}\operatorname{Re}\left\{e^{\dagger}\cdot\Upsilon.f\right\}$$

Et il en va de même pour le troisième terme du membre de droite de (38):

$$-\frac{\epsilon_0 \epsilon_m}{2} \lim_{r_0 \to \infty} r_0^2 \int_{\Omega} \cos \theta |\mathbf{E}_s|^2 d\Omega = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} f^{\dagger}.\Upsilon.f \tag{41}$$
 Grâce aux équations (39), (40) et (41), on arrive finalement à l'expression de la force exercée

Grâce aux équations (39), (40) et (41), on arrive finalement à l'expression de la force exercée sur l'objet suivant l'axe z.

Le calcul précédent nous amène donc à la formule désirée:

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot f \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} f^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot f$$
(42)

Dimensionnellement, on retrouve une force. En effet, Re $\{e^{\dagger}.\Upsilon.f\}$ et Re $\{f^{\dagger}.\Upsilon.f\}$ sont sans dimensions, et F_z est ainsi de la dimension de $-\frac{\epsilon_0\epsilon_m E^2}{2k^2}$. D'une part, $\frac{\epsilon_0\epsilon_m E^2}{2}$ est une densité d'énergie volumique, soit de l'énergie divisée par de la distance au cube. D'autre part, $\frac{1}{k^2}$ est une surface. Le produit de ces deux termes aura la dimension d'une énergie divisée par une distance, soit d'une force.

Cette formule n'est valable que si notre objet est à l'origine du système de coordonnées; dans le cas contraire, il faut utiliser les coefficients des ondes qui découlent de matrices de translations (cf annexe A) .

$$e^{(j)} = J^{(j,0)}.e$$

 $f^{(j)} = T.J^{(j,0)}.e$

où T est la matrice de Mie permettant l'obtention des coefficients du champ électrique diffusé en fonction de ceux du champ électrique excitateur, \mathbf{x}_j est la position de la sphère et $J^{(j,0)} \equiv J(k\mathbf{x}_j)$ est la matrice de translation régulière entre l'origine du repère O et le centre de la sphère. La force appliquée sur la sphère suivant l'axe z devient alors:

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ \left(e^{(j)} \right)^{\dagger} . \Upsilon . f^{(j)} \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \left(f^{(j)} \right)^{\dagger} . \Upsilon . f^{(j)}$$
(43)

On se rend alors compte que tout revient en réalité à "déplacer" le champ par l'intermédiaire des matrices de translation, puisque notre formule de force a été établie avec un développement du champ électrique appliqué à la sphère effectué à partir du centre de la sphère. Cette remarque trouvera toute son importance lorsque nous étudierons le cas à plusieurs sphères.

2.4.11 Force optique dans une direction quelconque- Matrices de rotation

La formule (42) donne la composante de la force suivant z pour des raisons de symétrie liées au calcul en coordonnées sphériques. Pour obtenir la force dans une direction $\hat{\mathbf{u}}$, il nous faut "tourner" les axes afin que $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{u}}$ soient colinéaires. Dans ce but, nous utilisons des matrices de rotations d'harmoniques sphériques (de la même façon que pour les translater, nous utilisons les matrices de translation J). Ces matrices sont définies en |24|. Rappelons brièvement cette définition; elles s'écrivent:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) & 0\\ 0 & \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix}$$

où (α, β, γ) sont les angles d'Euler qui correspondent à la rotation envisagée. La matrice s'exprime de la façon suivante:

$$\left[\mathcal{D}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right]_{\nu\mu,nm} = \delta_{n,\nu} \exp\left(i\mu\alpha\right) d_{\mu m}^{(n)}\left(\beta\right) \exp\left(im\gamma\right)$$

Le couple $(\nu\mu)$ correspond au numéro de ligne i $(\nu = E[\sqrt{i}], \mu = \nu(\nu+1) - i)$, le couple (nm) à celui de la colonne j $(n = E[\sqrt{j}], m = n(n+1) - j)$. Ainsi, la formule ci dessus donne le coefficient (i,j) de la matrice de rotation $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec la fonction:

$$d_{\mu m}^{(n)}(\beta) = \left[\frac{(n+\mu)! (n-m)!}{(n+m)! (n-\mu)}\right]^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2n+m-\mu} \times \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-\mu} \times F_1(\mu-m, -m-n; \mu-m+1; -\tan^2\frac{\beta}{2})$$

et F_1 fonction hypergéométrique définie par la relation (voir [25], et pour plus d'informations sur les matrices de rotations, [26]):

$$F_1(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}z^2 + \dots$$

Si la matrice de force subit le changement de base associé à cette matrice de rotation:

$$\Lambda (\alpha, \beta, \gamma) \equiv D (\alpha, \beta, \gamma) \Upsilon D^{\dagger} (\alpha, \beta, \gamma)$$

alors la formule se généralise pour n'importe laquelle des directions, avec une sphère centrée en \mathbf{x}_i :

$$F^{(j)}(\alpha,\beta,\gamma) = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ (e^{(j)})^{\dagger} . \Lambda(\alpha,\beta,\gamma) . f^{(j)} \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \left(f^{(j)} \right)^{\dagger} . \Lambda(\alpha,\beta,\gamma) . f^{(j)})$$

$$e^{(j)} = J^{(j,0)} . e$$

$$f^{(j)} = T . J^{(j,0)} . e$$

$$(44)$$

Par exemple, pour obtenir F_x , on prend le triplet d'angles $(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et pour F_y , on prend $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

Le tenseur de Maxwell, allié à la théorie de Lorenz-Mie, nous permet ainsi de calculer la force appliquée suivant z par une onde électromagnétique sur une sphère diélectrique. Il ne nous reste donc plus qu'à calculer le vecteur e de coefficients du développement sur une base de vecteurs harmoniques sphériques du champ électrique de l'onde excitatrice pour obtenir cette force.

2.4.12 Vérification de la formule- Cas d'une onde plane incidente

Dans le cas d'une onde plane, Bohren et Huffman donnent des formules qui permettent de calculer de façon analytique la section efficace totale σ_p , dans le cas d'une onde incidente plane qui se propage dans un milieu diélectrique d'indice optique n_m [57]. L'objet est une sphère, de rayon a et d'indice optique n_s . Si l'onde plane incidente se propage suivant une direction z, la section efficace totale peut être définie par la relation:

$$\sigma_p \equiv \frac{F_z v_m}{I}$$

où I est l'intensité lumineuse de l'onde plane, et v_m la vitesse de l'onde incidente dans le milieu extérieur à la sphère. Cette définition provient directement de la relation $F_z = \frac{I}{v_m} \sigma_p$. Dimensionnellement, la force est de l'énergie ([J]) divisée par de la distance ([M]), la vitesse de la distance ([M]) divisée par du temps ([s]), et l'intensité lumineuse de la puissance divisée par de la surface, c'est à dire de l'énergie ([J]) divisée par du temps ([s]) et de la distance au carré ([M]). Ainsi, dimensionnellement, on a:

$$[\sigma_p] = \left[\frac{F_z v_m}{I(\mathbf{0})}\right] = \frac{[J]}{[M]} \cdot \frac{[M]}{[s]} \cdot \frac{[M][M][s]}{[J]} = [M]^2$$

et l'on retrouve le fait qu'une section efficace est une surface. Cette section efficace peut être exprimée selon la différence:

$$\sigma_p = \sigma_{ext} - g\sigma_{scat}$$

avec σ_{ext} section efficace d'extinction, g paramètre d'asymétrie et σ_{scat} section efficace de diffusion. Ce sont les deux termes de cette différence dont on connait une expression analytique d'après [57]:

$$\sigma_{ext} = -\pi a^2 \frac{2}{\chi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re} \left\{ [T]_n^M + [T]_n^N \right\}$$

$$g\sigma_{scat} = \pi a^2 \frac{4}{\chi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n(n+1)} \operatorname{Re} \left\{ [T]_n^M \left([T]_n^N \right)^* \right\} + \frac{n(n+2)}{n+1} \operatorname{Re} \left\{ [T]_n^M \left([T]_{n+1}^M \right)^* + [T]_n^N \left([T]_{n+1}^N \right)^* \right\} \right)$$

formules où intervient le paramètre de taille $\chi = ka$.

Pour les retrouver, nous allons démontrer que:

$$-\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ p^{\dagger}.\Upsilon.T.p \right\} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \sigma_{ext}$$
$$\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} f^{\dagger}.\Upsilon.f = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} g \sigma_{scat}$$

et ainsi que:

$$F_z = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \left(\sigma_{ext} - g \sigma_{scat} \right)$$

Dans ce but, nous allons considérer le développement d'une onde plane sur une base de vecteurs harmoniques sphériques. Si l'on assimile la direction de propagation de l'onde plane à l'axe (Oz), on démontre que ses coefficients sont, avec nos conventions d'écriture (cf annexe C):

$$[p]_{n,1}^{\mathbf{M}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\theta} + \widehat{\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,1}^{\mathbf{N}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\theta} + \widehat{\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,-1}^{\mathbf{M}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\theta} - \widehat{\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,-1}^{\mathbf{N}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(-i\widehat{\theta} + \widehat{\phi} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

Ainsi, les vecteurs p ne sont non nuls que pour ||m|| = 1. Le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{e}}_i$ est le vecteur polarisation de l'onde incidente. Nous allons démontrer dans le calcul suivant que p est un vecteur propre de la matrice Υ .

Pour ce, il nous suffit de démontrer que le vecteur p' défini par la relation:

$$[p'] = \Upsilon \cdot p = \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ \Theta & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [p]^{\mathbf{M}} \\ [p]^{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$
$$p' = a \cdot p \tag{46}$$

est tel que:

ce qui revient à démontrer que:

$$\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix}_{n,1}^{\mathbf{M}} = a. [p]_{n,1}^{\mathbf{M}}$$
$$\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix}_{n,-1}^{\mathbf{M}} = a. [p]_{n,-1}^{\mathbf{M}}$$
$$\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix}_{n,1}^{\mathbf{N}} = a. [p]_{n,1}^{\mathbf{N}}$$
$$\begin{bmatrix} p' \end{bmatrix}_{n,-1}^{\mathbf{N}} = a. [p]_{n,-1}^{\mathbf{N}}$$

La seule différence entre $[p]_{n,1}^{\mathbf{M}}$, $[p]_{n,-1}^{\mathbf{M}}$, $[p]_{n,1}^{\mathbf{N}}$ et $[p]_{n,-1}^{\mathbf{N}}$ réside dans le produit scalaire que ces

coefficients contiennent. La multiplication par la matrice Υ ne change pas ces produits sclaires. C'est pourquoi la relation (46) revient à démontrer la seule égalité:

$$\left[p'\right]_{n,1}^{\mathbf{M}} = a.\left[p\right]_{n,1}^{\mathbf{M}}$$

La matrice Υ a pour valeurs :

$$\Theta_{n1;\nu1} = \frac{1}{n(n+1)} \delta_{n,\nu}
\Xi_{n1;\nu1} = \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left(\delta_{\nu,n-1} \frac{(n^2-1)}{n} - \delta_{\nu,n+1} \frac{(\nu^2-1)}{\nu} \right)$$

On effectue alors le développement

$$\begin{split} [p']_{n,1}^{\mathbf{M}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_{n1,\nu1} [p]_{\nu,1}^{\mathbf{M}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{n1,\nu1} [p]_{\nu,1}^{\mathbf{N}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left(\delta_{\nu,n-1} \frac{(n^2-1)}{n} - \delta_{\nu,n+1} \frac{(\nu^2-1)}{\nu} \right) * \\ &i^{\nu} \sqrt{\pi (2\nu+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{\nu,n} \frac{1}{n (n+1)} i^{\nu} \sqrt{\pi (2\nu+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &= \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} \frac{(n^2-1)}{n} i^{n-1} \sqrt{\pi (2n-1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &- \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \frac{((n+1)^2-1)}{n+1} i^{n+1} \sqrt{\pi (2n+3)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &+ \frac{1}{n (n+1)} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &= \frac{(n^2-1)}{n (2n+1)} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &+ \frac{n(n+2)}{n (n+1)} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &+ i^{n} \frac{1}{n (n+1)} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &= \left\{ \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} + \frac{(n+1)(n-1)}{n (2n+1)} + \frac{1}{n (n+1)} \right\} * \\ &i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} \\ &[p']_{n,1}^{\mathbf{M}} &= i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_{i} = [p]_{n,1}^{\mathbf{M}} \end{split}$$

Le vecteur coefficient p de l'onde plane est ainsi un vecteur propre de la matrice Υ :

$$\Upsilon.p = p$$

On déduit donc du calcul précédent:

$$oxed{ \Upsilon.p = p } p^\dagger. \Upsilon = p^\dagger$$

la deuxième égalité ayant été obtenue en utilisant le fait que Υ est hermitique. On a donc:

$$p^{\dagger}.\Upsilon.T.p = p^{\dagger}.T.p$$

Le produit matriciel T.p est de forme générale:

$$\begin{pmatrix} [T]_{1}^{M} [p]_{11}^{\mathbf{M}} \\ 0 \\ [T]_{1}^{M} [p]_{1-1}^{\mathbf{M}} \\ \dots \\ [T]_{n}^{M} [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \\ 0 \\ [T]_{n}^{M} [p]_{n-1}^{\mathbf{M}} \\ \dots \\ [T]_{1}^{N} [p]_{11}^{\mathbf{N}} \\ 0 \\ [T]_{1}^{N} [p]_{1-1}^{\mathbf{N}} \\ \dots \\ [T]_{n}^{N} [p]_{n1}^{\mathbf{N}} \\ 0 \\ [T]_{n}^{N} [p]_{n-1}^{\mathbf{N}} \end{pmatrix}$$

Le scalaire $p^{\dagger}.T.p$ s'écrit alors comme une somme:

$$p^{\dagger}.T.p = \sum_{n=0}^{\infty} \left([p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right)^* [T]_n^M [p]_{n1}^{\mathbf{M}} + \left([p]_{n1}^{\mathbf{N}} \right)^* [T]_n^N [p]_{n1}^{\mathbf{N}}$$
$$+ \left([p]_{n-1}^{\mathbf{M}} \right)^* [T]_n^M [p]_{n-1}^{\mathbf{M}} + \left([p]_{n-1}^{\mathbf{N}} \right)^* [T]_n^N [p]_{n-1}^{\mathbf{N}}$$

Rappelons que d'après (45), $\left\| \left[p\right]_{n,\pm 1}^{\mathbf{M}} \right\| = \left\| \left[p\right]_{n,\pm 1}^{\mathbf{N}} \right\|$, et que $\left\| \left[p\right]_{n 1}^{\mathbf{M}} \right\|^2 = \pi \left(2n+1\right)$. Ainsi:

$$-\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ p^{\dagger}.\Upsilon.T.p \right\}$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ p^{\dagger}.T.p \right\}$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^2 [T]_n^M + \left\| [p]_{n1}^{\mathbf{N}} \right\|^2 [T]_n^N + \left\| [p]_{n-1}^{\mathbf{M}} \right\|^2 [T]_n^M + \left\| [p]_{n-1}^{\mathbf{N}} \right\|^2 [T]_n^N \right)$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^2 \operatorname{Re} \left([T]_n^M + [T]_n^N \right)$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \pi \left(2n+1 \right) \operatorname{Re} \left([T]_n^M + [T]_n^N \right)$$

$$= -\pi a^2 \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \frac{2}{\chi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(2n+1 \right) \operatorname{Re} \left([T]_n^M + [T]_n^N \right)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \sigma_{ext}$$

Nous démontrons de cette façon le résultat que nous recherchions, à savoir:

$$\left| -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ p^{\dagger}.\Upsilon.T.p \right\} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \sigma_{ext}$$

Nous allons faire le même travail avec le second terme de l'expression (42), c'est à dire exprimer l'égalité:

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} f^{\dagger}.\Upsilon.f = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} g \sigma_{scat}$$

avec la section efficace de diffusion définie par la relation:

$$g\sigma_{scat} = \pi a^2 \frac{4}{\chi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \operatorname{Re} \left\{ [T]_n^M \left([T]_n^N \right)^* \right\} + \frac{n(n+2)}{n+1} \operatorname{Re} \left\{ [T]_n^M \left([T]_{n+1}^M \right)^* + [T]_n^N \left([T]_{n+1}^N \right)^* \right\}$$

Tout d'abord, évaluons le produit entre le vecteur coefficient de l'onde diffusée et la matrice de force, que nous nommerons f':

$$[f'] = \Upsilon \cdot f = \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ \Theta & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [f]^{\mathbf{M}} \\ [f]^{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ \Theta & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{M} & 0 \\ 0 & T^{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [p]^{\mathbf{M}} \\ [p]^{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

$$[f'] = \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ \Theta & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T]_{1}^{M} [p]_{11}^{\mathbf{M}} \\ \dots \\ [T]_{1}^{M} [p]_{11}^{\mathbf{M}} \\ \dots \\ [T]_{1}^{N} [p]_{11}^{\mathbf{M}} \\ \dots \\ [T]_{n}^{N} [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \end{bmatrix}$$

Nous allons relier les termes $[f']_{n,1}^{\mathbf{M}}$ aux termes $[p]_{n,1}^{\mathbf{M}}$. On développe:

$$\begin{split} [f']_{n,1}^{\mathbf{M}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \Xi_{n1,\nu1} [f]_{\nu,1}^{\mathbf{M}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{n1,\nu1} [f]_{\nu,1}^{\mathbf{N}} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left(\delta_{\nu,n-1} \frac{(n^2-1)}{n} - \delta_{\nu,n+1} \frac{(\nu^2-1)}{\nu} \right) * \\ &T_v^{M} i^{\nu} \sqrt{\pi (2\nu+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n (n+1)} \delta_{n,\nu} T_v^{N} i^{\nu} \sqrt{\pi (2\nu+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} \frac{(n^2-1)}{n} T_{n-1}^{M} i^{n-1} \sqrt{\pi (2n-1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &- \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \frac{((n+1)^2-1)}{n+1} T_{n+1}^{M} i^{n+1} \sqrt{\pi (2n+3)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &+ \frac{1}{n (n+1)} T_n^{N} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= T_{n-1}^{M} \frac{(n^2-1)}{n (2n+1)} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &+ T_{n+1}^{M} \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &+ T_n^{N} \frac{1}{n (n+1)} i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} e^{-i\phi} \left[i \hat{\theta} + \hat{\phi} \right] \bullet \hat{\mathbf{e}}_i \\ &[f']_{n,1}^{\mathbf{M}} &= \left\{ T_{n-1}^{M} \frac{(n^2-1)}{n (2n+1)} + T_{n+1}^{M} \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} + T_n^{N} \frac{1}{n (n+1)} \right\} [p]_{n,1}^{\mathbf{M}} \end{split}$$

De la même façon, on trouve la relation:

$$[f']_{n,1}^{\mathbf{N}} = \left\{ T_{n-1}^{N} \frac{\left(n^{2}-1\right)}{n\left(2n+1\right)} + T_{n+1}^{N} \frac{n(n+2)}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n\left(n+1\right)} \right\} [p]_{n,1}^{\mathbf{N}}$$

Ainsi, on a les relations:

$$[f']_{n,\pm 1}^{\mathbf{M}} = \left\{ T_{n-1}^{M} \frac{\left(n^{2}-1\right)}{n\left(2n+1\right)} + T_{n+1}^{M} \frac{n(n+2)}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} + T_{n}^{N} \frac{1}{n\left(n+1\right)} \right\} [p]_{n,\pm 1}^{\mathbf{M}}$$

$$[f']_{n,\pm 1}^{\mathbf{N}} = \left\{ T_{n-1}^{N} \frac{\left(n^{2}-1\right)}{n\left(2n+1\right)} + T_{n+1}^{N} \frac{n(n+2)}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n\left(n+1\right)} \right\} [p]_{n,\pm 1}^{\mathbf{N}}$$

Ce calcul nous mène aux expressions:

$$\begin{cases} [f']_{n,\pm 1}^{\mathbf{M}} = \left\{ T_{n-1}^{M} \frac{(n^2 - 1)}{n(2n+1)} + T_{n+1}^{M} \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} + T_{n}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \right\} [p]_{n,\pm 1}^{\mathbf{M}} \\ [f']_{n,\pm 1}^{\mathbf{N}} = \left\{ T_{n-1}^{N} \frac{(n^2 - 1)}{n(2n+1)} + T_{n+1}^{N} \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n(n+1)} \right\} [p]_{n,\pm 1}^{\mathbf{N}} \end{cases}$$

Le terme que nous voulons expliciter contient le produit $f^{\dagger}.\Upsilon.f$, soit le produit $f^{\dagger}.f'$.

$$\begin{split} f^{\dagger}.f^{'} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left([p]_{n,1}^{\mathbf{M}} \right)^{*} T_{n}^{M*} \left\{ T_{n-1}^{M} \frac{\left(n^{2}-1 \right)}{n \left(2n+1 \right)} + T_{n+1}^{M} \frac{n (n+2)}{\left(n+1 \right) \left(2n+1 \right)} + T_{n}^{N} \frac{1}{n \left(n+1 \right)} \right\} [p]_{n,1}^{\mathbf{M}} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \left([p]_{n,1}^{\mathbf{N}} \right)^{*} T_{n}^{N*} \left\{ T_{n-1}^{N} \frac{\left(n^{2}-1 \right)}{n \left(2n+1 \right)} + T_{n+1}^{N} \frac{n (n+2)}{\left(n+1 \right) \left(2n+1 \right)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n \left(n+1 \right)} \right\} [p]_{n,1}^{\mathbf{N}} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \left([p]_{n,-1}^{\mathbf{M}} \right)^{*} T_{n}^{N*} \left\{ T_{n-1}^{M} \frac{\left(n^{2}-1 \right)}{n \left(2n+1 \right)} + T_{n+1}^{M} \frac{n (n+2)}{\left(n+1 \right) \left(2n+1 \right)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n \left(n+1 \right)} \right\} [p]_{n,-1}^{\mathbf{N}} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \left([p]_{n,-1}^{\mathbf{M}} \right)^{*} T_{n}^{N*} \left\{ T_{n-1}^{N} \frac{\left(n^{2}-1 \right)}{n \left(2n+1 \right)} + T_{n+1}^{N} \frac{n (n+2)}{\left(n+1 \right) \left(2n+1 \right)} + T_{n}^{M} \frac{1}{n \left(n+1 \right)} \right\} [p]_{n,-1}^{\mathbf{N}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^{2} \frac{\left(n^{2}-1 \right)}{n \left(2n+1 \right)} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n-1}^{M} + T_{n}^{N*} T_{n-1}^{N} \right\} \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^{2} \frac{n (n+2)}{\left(n+1 \right) \left(2n+1 \right)} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n+1}^{M} + T_{n}^{N*} T_{n+1}^{N} \right\} \\ &+ 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left\| [p]_{n}^{\mathbf{M}} \right\|^{2}}{n \left(n+1 \right)} \operatorname{Re} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n}^{N} \right\} \end{split}$$

Le produit scalaire $f^{\dagger}.f'$ peut, à l'aide du calcul précédent, se mettre sous la forme:

$$f^{\dagger}.f^{'} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^{2} \frac{n(n+2)}{(n+1)(2n+1)} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n+1}^{M} + T_{n}^{N*} T_{n+1}^{N} \right\} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left\| [p]_{n1}^{\mathbf{M}} \right\|^{2}}{n(n+1)} \operatorname{Re} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n}^{N} \right\}$$

$$= 4\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{n(n+2)}{n+1} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n+1}^{M} + T_{n}^{N*} T_{n+1}^{N} \right\} + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \operatorname{Re} \left\{ T_{n}^{M*} T_{n}^{N} \right\} \right\}$$

et nous pouvons alors conclure:

$$\begin{split} \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}f^{\dagger}.\Upsilon.f &= \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}f^{\dagger}.f^{'}\\ &= \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}4\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{n(n+2)}{n+1}\left\{T_{n}^{M*}T_{n+1}^{M} + T_{n}^{N*}T_{n+1}^{N}\right\} + \frac{(2n+1)}{n(n+1)}\operatorname{Re}\left\{T_{n}^{M*}T_{n}^{N}\right\}\right\}\\ &\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}f^{\dagger}.\Upsilon.f &= \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2}g\sigma_{scat} \end{split}$$

Nous avons ainsi la relation, dans le cas d'une onde plane:

$$F_z = \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} \left(\sigma_{ext} - g \sigma_{scat} \right)$$

Le terme $\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2}$ peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\epsilon_0\epsilon_mE^2}{2} = \frac{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_m\mu_0\mu_m}E^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_m}{\mu_0\mu_m}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_m\mu_0\mu_m}}{c}\frac{cE^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_m}{\mu_0\mu_m}}$$

et en considérant les valeurs de définitions:

$$I \equiv \frac{cE^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_m}{\mu_0 \mu_m}} \quad v_m \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_m \mu_0 \mu_m}}$$

on trouve:

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2} = \frac{I}{v_m}$$

et par conséquent, notre formule de F_z nous permet de retrouver la formule de Bohren et Huffman:

$$F_z = \frac{I}{v_m} \sigma_p$$

Ceci permet une première vérification de notre formule de calcul de force. En fait, celle-ci consiste à généraliser la formule de Bohren et Huffman au cas de faisceaux arbitraires, du moment que le champ électrique de l'onde incidente est décomposable en harmoniques sphériques.

Les forces optiques sont généralement de l'ordre du pN. Les potentiels de piégeage associés à ces forces sont de l'ordre du pN par μm , c'est à dire en $10^{-18}J$. Nous donnerons cette énergie pour un faisceau d'une puissance donné. Pour une onde plane (donc de puissance infinie), on ne parle pas de puissance mais de densité de puissance. Ce que nous calculons dans le cas d'une onde plane incidente, ce n'est donc pas une énergie, mais une énergie en fonction de la densité de puissance incidente. En effet, notre unité de force est à présent $pN.\mu m^2/mW$, c'est à dire qu'il nous faut multiplier les valeurs de forces obtenues par la densité de puissance du faisceau incident (en $mW/\mu m^2$) pour avoir la force optique en pN. L'énergie que nous calculons est ainsi en $pN.\mu m^3/mW$, c'est à dire en $10^{-18}~J.\mu m^2/mW$.

Comparons à présent le calcul exact avec les approximations de Rayleigh et de l'optique géométrique.

2.4.13 Comparaison entre le calcul exact et les différentes approximations- Cas d'une onde plane incidente:

Nous nous placerons à nouveau dans le cas d'une onde plane incidente. Sur la figure 16 est tracée

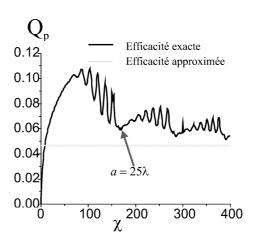


Figure 16: Comparaison entre efficacité de piégeage exacte et efficacité de piégeage approximée (optique géométrique) en fonction du paramètre de taille χ .

l'évolution de l'efficacité totale obtenue dans le cadre du calcul exact (où efficacité totale exacte) Q_p en

fonction du paramètre de taille χ d'une sphère excitée par une onde plane incidente. La sphère est en verre (indice 1.45) et baigne dans de l'eau (indice 1.33).

Nous avons tracé sur cette courbe la valeur de l'efficacité totale obtenue en utilisant l'approximation de l'optique géométrique, constante en fonction du paramètre de taille comme nous l'avions vu précédemment. L'efficacité totale exacte tend vers une valeur limite égale à l'efficacité totale prédite par l'approximation de l'optique géométrique. Dans le cas résonnant l'efficacité totale présente des résonnances que nous assimilons à des résonnances géométriques. Nous voyons qu'à partir de $\chi=150$ $(a=25\lambda)$, l'efficacité totale exacte de piégeage tend vers la valeur prédite par l'optique géométrique avec une erreur de moins de 20%. Pour une longueur d'onde de 0.532 nm, cela veut dire que pour des sphères aux rayons inférieurs à $7.5\mu m$, l'optique géométrique n'est plus valide.

La figure 17 propose de comparer l'efficacité de piégeage exacte d'une sphère soumise à une onde incidente à celle obtenue par le calcul dipolaire. La sphère est en verre (indice optique de 1.45, contraste d'indice ρ de 1.09), le milieu incident est de l'eau (indice optique de 1.33). L'efficacité totale est tracée en fonction du paramètre de taille χ , produit entre le contraste d'indice et le rayon a de la sphère.

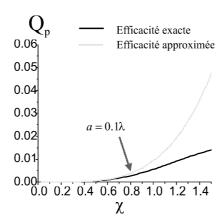


Figure 17: Comparaison entre efficacité de piégeage exacte et efficacité de piégeage approximée (régime dipolaire) en fonction du paramètre de taille χ .

Les deux courbes sont pratiquement superposées jusqu'à $\chi=0.8$, c'est à dire pour des valeurs de rayons a inférieures à 0.1λ (pour une longueur d'onde incidente de 0.532nm, cela correspond à des sphères aux rayons inférieurs à 50nm). L'approximation dipolaire perd donc de sa pertinence lorsque les sphères grossissent, comme on pouvait s'y attendre.

Dans un domaine très large de rayons, entre 0.1λ et 25λ , le calcul exact ne peut être approximé par l'approximation de Rayleigh où celle de l'optique géométrique.

2.4.14 Piégeage dans un système interférentiel à 3 ondes:

Le système que nous allons à présent étudier est celui d'une expérience menée au sein de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne par l'équipe de Jean Marc Fournier. Les buts de cette expérience sont les suivants: montrer le piégeage bidimensionnel multiple par interférométrie, et créer un réseau d'interférence de trois faisceaux cohérents formant un ensemble de piège pour des billes en polystyrène (indice 1.59) de l'ordre d'un à deux micromètres. Nous ne modéliserons que le cas à 1 bille.

Définition du système étudié: le système que nous allons étudier est représenté sur la figure 18: trois faisceaux lasers issus de la même source arrivent sur une coupelle contenant des billes de polystyrène dans de l'eau. L'axe z est identifié à la normale à la coupelle, et celle ci définit le plan (Oxy). La présence de la coupelle interdit donc le mouvement des billes dans le sous espace z>0. Le problème étant idéalisé, nous négligerons les phénomènes d'intéractions entre les billes et la paroi de la cellule. Tout reviendra à considérer la propagation de trois faisceaux lasers dans le vide dans un premier

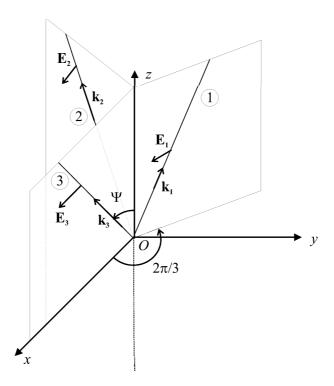


Figure 18: système à 3 ondes.

temps, puis le piègeage d'une sphère en polystyrène (indice optique 1.59) dans de l'eau (indice optique 1.33), la sphère restant dans le plan (Oxy).

Les trois faisceaux ont même longueur d'onde dans le vide $\lambda=0.532\mu m$, et par conséquent même module de vecteur d'onde k. Ils forment tous trois avec l'axe z un angle ψ et deux à deux un angle θ . Les trois directions de ces faisceaux forment un trièdre, le système présentant une symétrie de révolution autour de l'axe z. Les deux angles θ et ψ sont liés entre eux par la relation géomètrique:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi$$

Par convention, nous avons numéroté 3 l'onde dont le vecteur d'onde \mathbf{k}_3 est dans le plan (Oxz). L'onde 1 à un vecteur d'onde \mathbf{k}_1 image de \mathbf{k}_3 par une symétrie axiale autour de z et d'angle 120°. La troisième onde est numérotée 2. Les trois vecteurs d'ondes associés ont en coordonnées cartésiennes les expressions:

$$\mathbf{k}_{1} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\psi \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k}_{2} = k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\psi \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k}_{3} = k \begin{pmatrix} \sin\psi \\ 0 \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

La polarisation $\widehat{\mathbf{e}}_i$ de l'onde i est définie par la relation:

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = rac{\mathbf{k}_i \wedge \widehat{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{k}_i \wedge \widehat{\mathbf{y}}\|}$$

où \hat{y} désigne le vecteur unitaire dans la direction y. Les champs électriques de ces ondes n'ont donc aucune composante sur la direction \hat{y} . La symétrie de révolution est alors brisée. L'expression des polarisations en coordonnées cartésiennes donne:

$$\widehat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\psi \end{pmatrix} \qquad \widehat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\psi \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{e}}_1 \qquad \widehat{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ 0 \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

où $\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\psi + \cos^2\psi}$. Si l'on note ϕ_i la phase du champ électrique \mathbf{E}_i associé à l'onde i, et définie par la relation $\phi_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}$, et que l'on prend le module du champ électrique \mathbf{E}_i égal à 1, on obtient naturellement: $\mathbf{E}_i = e^{i\phi_i} \hat{\mathbf{e}}_i$.

Nous allons dans un premier temps étudier un système à 2 ondes, l'onde numéro 3 étant "éteinte". Nous mettrons en évidence certains faits confirmés par l'expérience: l'apparition d'une force de fuite ampêchant le piégeage, l'inversion des équilibres pour des sphères d'une certaine taille. Nous donnerons une explication approximée à cette inversion. Puis nous nous intéresserons au système à 3 ondes. Nous décrirons en détail le motif élémentaire du champ, puis donnerons les principaux résultats livrés par le code numérique.

Système à 2 ondes: Le champ électrique total $\mathbf{E}_{t,2}$ dans le cas où seul les deux premières ondes sont présentes est en appliquant le principe de superposition égal à:

$$\mathbf{E}_{t,2} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right) \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{E}_{t,2} = \exp\left(ik\left(-x\frac{1}{2}\sin\psi + z\cos\psi\right)\right) 2\cos\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right) \mathbf{e}_1$$

Le carré de son module sera donc:

$$\|\mathbf{E}_{t,2}\|^2 = 4\cos^2\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right) = 4\cos^2\left(ky\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Il est invariant suivant les directions x et z. Le pas p d'interférence est tel que:

$$kp\sin\frac{\theta}{2} = \pi \iff p = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Pour un pas de 2 μm , nous avons par exemple $\frac{\theta}{2} = 7.64^{\circ}$. Si l'on place une sphère en polystyrène dans le plan (Oxy), la force optique **F** aura deux composantes:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_r$$

Le terme \mathbf{F}_y est la force de gradient dans la direction y, qui permet de piéger la sphère contrairement à \mathbf{F}_r qui est un terme de pression de radiation que l'on peut décomposer suivant les directions x et z. Si l'on postule que la sphère ne peut pas se déplacer suivant z, il reste donc une force de "fuite" \mathbf{F}_x , toujours positive, et qui empêche la sphère de se piéger. On remarque par la géomètrie du problème que la force de fuite et la force de radiation sont reliées par la relation $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_r \cos \frac{\theta}{2}$.

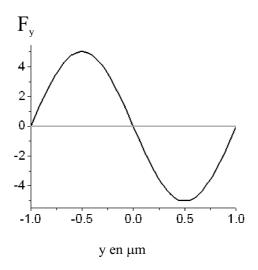


Figure 19: Force de gradient pour une bille de $1.66\mu m$ de diamètre, dans le cas d'une sphère en polystyrène dans de l'eau, avec un angle θ de 15.28° , ce qui correspond à un pas d'interférence de $2 \mu m$. La valeur y=0 correspond à une frange brillante.

La force de gradient est quant à elle représentée figure 19 pour une sphère de $1.66\mu m$ de diamètre en polystyrène baignant dans de l'eau avec un pas p de $2\mu m$.

La force suivant y est périodique, de période $p = 2\mu m$ ce qui est conforme à ce que l'on attend lorsque l'on considère qu'elle peut être grossièrement vue comme l'opposée de la dérivée du module au carré du champ électrique.

La comparaison entre les intensités de la force de fuite et de la force de gradient peut également s'avèrer être un élément d'étude intéressant. Sur la figure 20, nous trouvons deux courbes exprimant l'évolution de ces intensités en fonction du diamètre de la sphère en polystyrène, tous les autres paramètres physiques ayant été conservés.

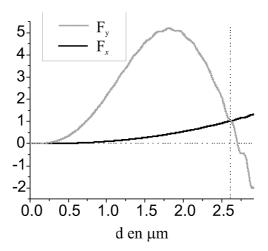


Figure 20: Comparaison entre les forces de fuite et de gradient en fonction du diamètre d des billes. Les forces sont exprimées en $pN.\mu m^2/mW$

La force de fuite est constante dans le plan (Oxy) pour un diamètre donné. Mais comme la force de gradient varie suivant y, nous avons pris pour un diamètre donné le module de la force de gradient F_y au point (0, -0.5, 0). Grâce à la figure 19, nous voyons que ce point à mi-distance entre une frange sombre et une frange lumineuse correspond à un extrémum de la force, que nous nommerons force de gradient maximale. Lorsque le diamètre est inférieur à $2.624\mu m$, la force de gradient maximale est supérieure à la force de fuite. A contrario, pour des sphères de diamètre compris entre 2.624 et $2.92 \mu m$, c'est la force de fuite qui domine. Nous remarquons également que la force de gradient maximale s'annule en $d_0 \approx 2.702\mu m$. Nous retrouverons ce résultat par la suite lorsque nous étudierons l'énergie de piégeage. Mais l'idée qu'il faut d'ores et déja retenir ici est que le maximum de la force de gradient s'annulant en d_0 , la force de gradient est identiquement nulle pour des sphères de ce diamètre. Puis, pour $d > d_0$, le maximum devient un minimum, et les équilibres stables et instables s'inversent.

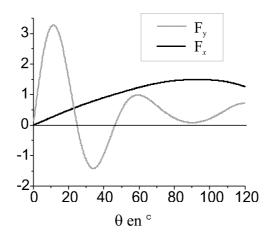


Figure 21: Comparaison entre les forces de fuite et de gradient en fonction de l'angle θ entre les 2 faisceaux. Les forces sont exprimées en $pN.\mu m^2/mW$

Enfin, pour être complet avec la force de fuite, nous avons étudié l'évolution de l'intensité des forces de gradient et de fuite pour une sphère de diamètre $1.66\mu m$ en fonction de l'angle θ entre deux faisceaux. La force de gradient a été évaluée pour chaque angle θ à y=-p/4, c'est à dire à mi-distance entre la frange sombre dans les y négatifs la plus proche de l'origine et la frange brillante en y=0. Le résultat est indiqué figure 21.

La force de fuite augmente tout d'abord avec l'angle, c'est à dire avec le pas d'interférence, ce qui semble logique si l'on se rappelle la relation entre force de fuite et pression de radiation: $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_r \cos \frac{\theta}{2}$. La force de gradient maximale quant à elle change de signe tout en perdant en intensité absolue lorsque θ augmente. Puisque le pas d'interférence augmente, le puits de potentiel qui crée la force de gradient s'élargit, ce qui peut expliquer sa décroissance en valeur absolue. Mais seule une étude du potentiel de piégeage permettra d'avoir une explication sur l'inversion des équilibres consécutifs au changement de signe de la force de gradient maximale.

La figure 22 donne le potentiel de piégeage en fonction du diamètre de la sphère, tous les autres paramètres physiques du problème étant conservés.

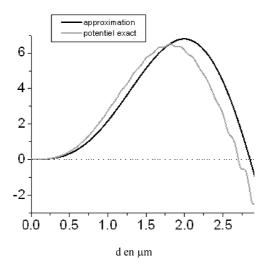


Figure 22: Evolution du potentiel de piégeage en fonction du diamètre de la bille- Comparaison avec le calcul approché. L'angle θ est de 15.28°, ce qui correspond à un pas d'interférence de 2 μm .

Nous avons calculé le potentiel en intégrant la force entre 0 et $-1 \mu m$, c'est à dire entre dune frange brillante et une frange sombre consécutives, ce qui nous donne la barrière de potentiel à franchir si la sphère veut quitter le piège. Le potentiel étant défini à une constante additive près, il est ici tel que sa valeur en l'origine soit égale à 0. Par conséquent, on en déduit que l'équilibre à l'origine est stable si le potentiel de piégeage est positif (les sphères se piègent dans les franges brillantes) et instable si il est négatif (les sphères se piègent alors dans les franges sombres). Pour une sphère de diamètre $d_0 \approx 2.702 \mu m$, le potentiel s'annule: la force de gradient est alors identiquement nulle.

Sur la figure 22 se trouve une seconde courbe, correspondant à l'approximation suivante: nous avons défini le potentiel pour une sphère de diamètre d comme étant la différence entre l'intégrale du module au carré du champ électrique dans un volume égal à celui de la sphère de diamètre d, lorsque la sphère est placée sur une frange brillante, moins cette même intégrale lorsque la sphère est placée sur une frange sombre. Nous avons ainsi retrouvé l'inversion du potentiel de piégeage en un point très proche de celui correspondant au calcul exact. La courbe approximée (qui n'est ici qu'à titre indicatif) a été normalisée de façon à avoir un maximum égal à celui de la courbe exacte.

La figure 23 indique les deux cas possibles.

Dans le cas (A), le diamètre d de la sphère de volume V est inférieur à d_0 : l'intégrale du module au carré du champ électrique sur V est plus grande sur une frange brillante que sur une frange sombre. Les franges brillantes sont des points d'équilibres stables. Dans le second cas (cas(B)), c'est l'inverse: on peut grossièrement constater qu'une sphère placée sur une frange sombre contient alors 2 franges brillantes, contrairement à celle placée sur une frange brillante, qui n'en contient qu'une. Ce sont alors les franges sombres qui deviennent des points d'équilibres stables. Pour un certain diamètre, l'intégrale du module au carré du champ électrique sur le volume V de la sphère correspondante à même valeur, que la sphère

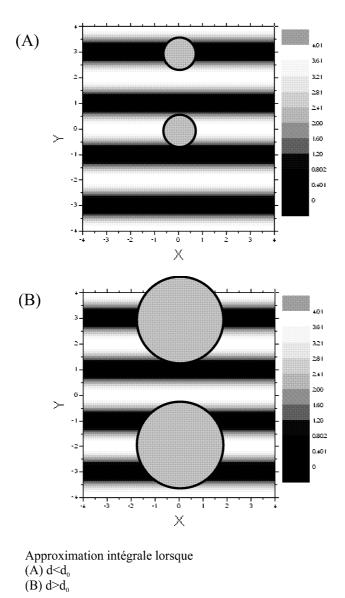


Figure 23: approximation intégrale.

soit placée sur une frange sombre où sur une frange brillante: il n'y a donc pas de puits de potentiel, et la force de gradient est alors identiquement nulle.

Système à 3 ondes: Nous avons à présent les 3 ondes qui sont présentes. Le champ électrique total $\mathbf{E}_{t,3}$ s'écrit ainsi, par superposition:

$$\mathbf{E}_{t,3} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$
$$= \left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right)\mathbf{e}_1 + e^{i\phi_3}\mathbf{e}_3$$

Son module au carré est ainsi:

$$\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2 = \|\mathbf{E}_{t,2}\|^2 + 2\operatorname{Re}\left\{e^{-i\phi_3}\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3\right\} + 1$$

Comme nous avons d'une part

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\phi_3}\left(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right)\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{-i\phi_3}\exp\left(ik\left(-x\frac{1}{2}\sin\psi + z\cos\psi\right)\right)2\cos\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right)\right\}$$
$$= 2\cos\left(kx\frac{3}{2}\sin\psi\right)\cos\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right)$$

et d'autre part

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\alpha} \left(\cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right)$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{\cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}{\sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi}} = \beta$$

on en déduit l'expression:

$$\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2 = 4\cos^2\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right) + 4\beta\cos\left(kx\frac{3}{2}\sin\psi\right)\cos\left(ky\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\psi\right) + 1$$
$$= 4\cos^2\left(ky\sin\frac{\theta}{2}\right) + 4\beta\cos\left(kx\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(ky\sin\frac{\theta}{2}\right) + 1$$

Ce module est invariant dans la direction z, c'est pourquoi nous allons nous placer dans le plan (Oxy), et oublier momentanément la coordonnée z. Rappelons que nous avions défini une distance p d'interférences dans le cas à deux ondes par la relation:

$$kp\sin\frac{\theta}{2} = \pi$$

Ainsi, $\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2$ se réécrit:

$$\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2 = 4\cos^2\left(\frac{y}{p}\pi\right) + 4\beta\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x}{p}\pi\right)\cos\left(\frac{y}{p}\pi\right) + 1$$

cette dernière formule nous donne plus simplement les couples (x, y) pour lesquels le module du champ électrique est maximum. En effet:

$$\cos^2\left(\frac{y}{p}\pi\right) = 1 \iff y = mp, \, m \in Z \qquad \qquad \text{condition 1}$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x}{p}\pi\right)\cos\left(\frac{y}{p}\pi\right) = 1 \iff x = \sqrt{\frac{2}{3}}np \qquad \qquad \text{condition 2}$$

$$(m,n) \in Z^2 \text{ tels que } m+n \text{ soit paire}$$

La condition 2 contient la condition 1; si elle est vérifiée, les deux termes variant de $\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2$ sont maximums. C'est donc elle qui définit les maximums de $\|\mathbf{E}_{t,3}\|^2$. On en déduit les abscisses et les ordonnées des points de maximums:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} np$$

$$y = mp$$

$$(m,n) \in Z^2 \text{ tels que } m+n \text{ soit paire}$$

Pour un pas d'interférence de $2 \mu m$, on en déduit par exemple les 7 points (au centième de micromètre prés): $(0,0), (-2.31,0), (2.31,0), (-1.15,2), (1.15,2), (-1.15,-2), (1.15,-2), \dots$ les six derniers points formant une structure hexagonale parfaite centrée sur l'origine.

Le motif élémentaire est donc hexagonal. Il est décrit plus en détail figure 24.

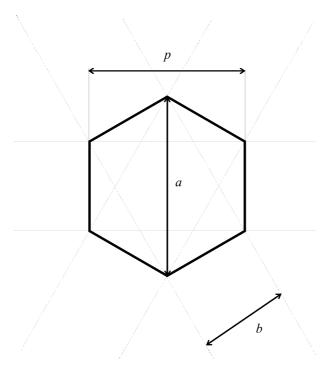


Figure 24: Description de la maille élémentaire.

Les données a et b sont déduites du pas p par les relations:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}p$$
$$b = \frac{2}{3}p$$

Le diamètre maximal d'une sphère placée dans la maille élémentaire est ainsi égal à p.

Nous pouvons penser que nous avons pour la force deux types d'équilibres, en nous appuyant sur l'étude du cas à 2 ondes: soit dans les maximas du champ (qui jouent le même rôle que celui tenu par les franges brillantes) situé en des points définis par la condition 2, soit en des minimas du champ correspondant aux sommets de la maille hexagonale élémentaire (et qui jouent le rôle des franges sombres). Nous allons étudier la force suivant une direction qui contient à la fois des maximums et des minimums de champ. La direction y semble toute indiquée. Le module du champ électrique dans cette direction est donné figure 25. Nous avons choisi θ de façon à avoir un pas d'interférence à deux ondes de $2\mu m$.

Comme nous l'avions calculé, le module du champ au carré présente des maximums absolus en y=2p,0,-2p. On remarque aussi l'apparition de maximums relatifs en y=-p,p. Sur la figure 25, on peut voir que ces maximums relatifs sont situés entre deux minimums absolus.

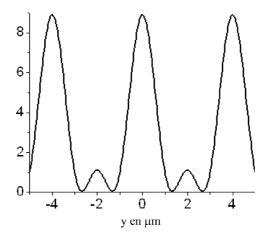


Figure 25: Module du champ au carré sur l'axe y.

La force dans cette direction sera uniquement dirigée suivant y pour des raisons de symétrie (si bien sûr on ne s'intéresse pas à F_z). Sur la figure 26, on a représenté la composante F_y de la force exercée par trois ondes interférentes (avec $p = 2\mu m$) sur une sphère en polystyrène de diamètre $1.901\mu m$ se trouvant dans de l'eau.

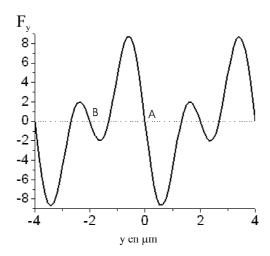


Figure 26: Force de gradient en $pN.\mu m^2/mW$ - Sphère de $1.901\mu m$ de diamètre.

On y voit qu'aux positions où le module au carré du champ électrique présente des maximums se trouvent des équilibres stables, et aux minimums des équilibres instables. Les maximums absolus (point A par exemple) ont cependant des forces de rappel beaucoup plus élevées que les maximums relatifs (point B par exemple). Pour une sphère de diamètre $2.92\mu m$, tous les autres paramètres restant les mêmes, on trouve une inversion de la nature des équilibres représentée figure 27.

On retrouve ainsi l'inversion des équilibres déja évoqués précédemment. Une bonne façon de voir cette inversion est à nouveau d'observer l'évolution du potentiel de piégeage en fonction du diamètre de la sphère piégée. Le principe reste le même que dans le cas à 2 ondes: nous définissons le potentiel de piégeage comme l'intégrale de la force F_y sur un intervalle reliant deux extrémums de champ de nature différente. Par définition, si ce potentiel est positif, alors la sphère est piégée en un maximum de champ. Sinon, elle est piégée en un minimum de champ. La courbe obtenue est représentée figure 28.

Nous avons ajouté sur cette figure la courbe du potentiel de piégeage en fonction du diamètre de la sphère dans le cas à 2 ondes: on retrouve le même phénomène d'inversion, des maximums de potentiels proches pour $d \approx 1.8 \mu m$ (la meilleure sphère à votre disposition pour un pas de $2\mu m$ est donc celle de diamètre $1.901 \mu m$), la différence fondamentale entre ces deux cas étant bien sûr l'absence de force de

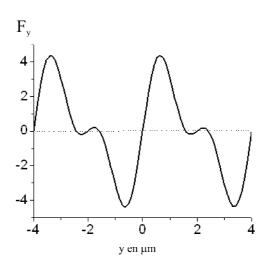


Figure 27: Force de gradient en $pN.\mu m^2/mW$ - Sphère de $2.92\mu m$ de diamètre.

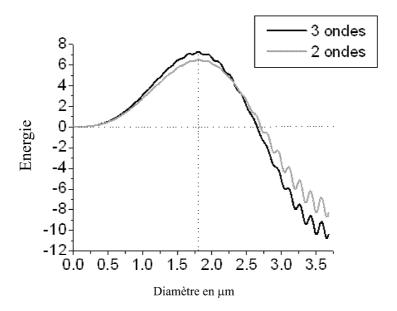


Figure 28: Evolution du potentiel de piégeage en fonction du diamètre de la bille- Comparaison entre les systèmes à 2 et 3 ondes.

fuite dans le cas à 3 ondes.

Enfin, nous avons inversé le problème en fixant le diamètre de la sphère $(d = 1.901 \mu m)$ et en faisant varier l'angle θ , c'est à dire le pas p d'interférence, tous les autres paramètres physiques étant conservés. Le résultat est indiqué figure 29. Celle-ci ne permet cependant pas de conclusion nette. En effet, il

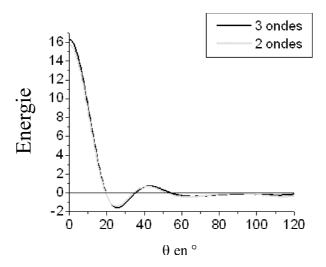


Figure 29: Evolution du potentiel de piégeage en fonction de l'angle entre deux faisceaux.

n'y a pas de pics de potentiel de piégeage pour un angle donné, seulement une énergie qui tend vers l'infini lorsque θ tend vers 0. La valeur du potentiel de piégeage est cependant nulle pour $\theta = 0$ (ce qui est évident si on considère que dans ce cas, les 3 ondes sont toutes trois dirigées selon z, la force optique étant alors uniquement de la pression de radiation dans cette direction).

Relions à présent notre énergie de piégeage au mouvement Brownien. Ce que nous calculons, ce n'est pas une énergie, mais une énergie en fonction de la densité de puissance incidente. En effet, notre unité de force est $pN.\mu m^2/mW$, c'est à dire qu'il nous faut multiplier les valeurs de forces obtenues par la densité de puissance du faisceau incident (en $mW/\mu m^2$) pour avoir la force optique en pN. L'énergie que nous calculons est ainsi en $pN.\mu m^3/mW$, c'est à dire en $10^{-18}~J.\mu m^2/mW$.

La puissance de 500 mW du faisceau incident est répartie sur une gaussienne d'environ $120\mu m$ de diamètre. On estime à 30% la perte de puissance du dispositif. Nous approximerons la gaussienne par un disque de densité de puissance constante et de diamètre $120\mu m$. De plus, le faisceau est divisé en 3. La densité de puissance incidente est donc:

$$P_i = \frac{500}{\pi * 60 * 60} * 0.7 * \frac{1}{3} = 1.03.10^{-2} \ mW/\mu m^2$$

C'est par ce terme qu'il faut multiplier ce que nous appelions énergie de piégeage pour obtenir l'énergie véritable du piège E. Si nous divisons par k_BT , avec k_B constante de Boltzmann égale à $1.38.10^{-23}J.K^{-1}$ et $T=300^{\circ}K$, nous avons tout simplement le rapport $v=E/k_BT$ en fonction du diamètre d de la bille. Ce rapport est donné courbe 30.

Le mouvement Brownien, sans viscosité, sort théoriquement toujours une bille de son piège (sauf au zéro absolu). C'est pourquoi notre étude, qui ne tient pas compte de la viscosité, ne nous permet pas de déterminer une température T maximale telle que la bille reste à coup sûr piégée. Le fait que le maximum de piégeage sur la courbe 30 soit de plus de 15 fois k_BT ne doit pas non plus tromper le lecteur: en effet, il est usuel de définir l'énergie du mouvement Brownien comme égale à $\frac{1}{2}k_BT$ multiplié par le nombre de degrés de liberté de la bille. Cependant, une bille soumise au mouvement Brownien ne reçoit pas une énergie cinétique égale à k_BT , c'est juste un ordre de grandeur. La vitesse de la bille suit par exemple une courbe de densité de probabilité: on ne peut pas déterminer précisément quelle sera la vitesse de la bille. Tout ce que l'on peut faire, c'est raisonner en terme de qualité de piégeage. Le fait de prendre en compte la viscosité et le caractère probabiliste du mouvement Brownien devrait permettre de définir des "températures de piégeage".

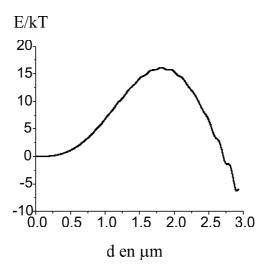


Figure 30: Evolution du rapport E/kT en fonction du diamètre de la bille. La température est de 300K.

2.4.15 Conclusion

Nous disposons à présent d'un formalisme nous permettant de calculer les forces optiques pour des faisceaux incidents arbitraires. La seule condition sur ces faisceaux (condition qui est de taille) est que l'on connaisse la décomposition des champs électriques associés à ces faisceaux sur une base de vecteurs harmoniques sphériques. Si tel est le cas, la matrice de transfert associée à la sphère nous permet de calculer le champ diffusé par la sphère à partir du rayon, de la permittivité électrique et de la perméabilité magnétique de la sphère. Ce champ diffusé amène à la connaissance du champ électrique total, indispensable pour effectuer un bilan d'impulsion à l'aide du tenseur de Maxwell, où tenseur des contraintes. Le bilan d'impulsion nous a permis alors d'établir notre formule (38). Des travaux avaient déja été fait pour évaluer de façon exacte les forces optiques dans le cas d'une onde plane incidente: nous avons relié notre formule (38) à celles qui préexistaient. Grâce à notre calcul, nous avons pu faire une première application numérique avec comme onde incidente une onde plane. Ceci nous a permis de comparer le calcul exact et les approximations dipolaires et géométriques. Ainsi, nous avons pu dégager un large domaine de rayons de sphères pour lesquels aucunes de ces approximations n'était valide. Ce domaine pour une onde plane incidente se situe pour des rayons compris entre 0.1λ et 25λ . Avec un système interférentiel à 3 ondes, nous avons pu démontrer un résultat contre intuitif: les sphères ne vont pas forcément se piéger aux points d'intensité lumineuse maximale. Elles se placent en des points tels que leurs volume contienne le maximum de densité d'énergie électromagnétique. Ainsi, on obtient une inversion du potentiel de piégeage: les maximums d'intensité lumineuse deviennent des équilibres instables, tandis que le rôle d'équilibres stables est dévolu aux minimums d'intensité lumineuse.

Changer les 2 éléments sur lesquels s'appuient notre formule exacte, c'est à dire la matrice de transfert de l'objet diélectrique et la décomposition en vecteurs harmoniques sphériques du faisceau incident, ouvrent de nombreuses perspectives. En effet, on peut changer les coefficients du champ électrique du faisceau incident. Ce simple changement permet de considérer d'autres faisceaux incidents; aucune autre modification ne sera nécessaire. Notre code numérique peut ainsi considérer plusieurs ondes planes interférentes. Il peut aussi calculer les forces optiques exercées par un faisceau laser, sous réserve d'obtenir une décomposition en vecteurs harmonques sphériques du champ électrique de ce faisceau laser. Nous verrons par la suite que cette décomposition peut être obtenue dans le cadre de l'approximation de Davis. Nous verrons également que pour étudier le cas de forces optiques sur un système constitués de plusieurs sphères, il nous suffit seulement de changer la matrice de transfert. Il en va de même pour l'étude de sphères enrobées, c'est à dire d'une sphère diélectrique recouverte de multiples couches sphériques diélectriques.

3 Forces induites

3.1 Introduction

Les applications possibles à la manipulation de plusieurs objets ne manquent pas, notamment pour la réalisation de cristaux photoniques où encore de miroirs en matière optique [19, 49]. Nous avons vu dans la section précédente comment calculer de façon exacte la force exercée sur une sphère par une onde incidente quelconque. La seule condition sur cette onde est ainsi de connaître la décomposition de son champ électrique sur une base de vecteurs harmoniques sphériques. Cette étude se prolonge assez naturellement à l'étude de la force exercée par une onde sur un ensemble de sphères. En effet, la décomposition en harmoniques sphériques de l'onde incidente permet d'aborder de manière efficace le problème de la diffusion multiple; la résolution de ce problème donne l'onde incidente sur chaque sphère (qui est bien sûr différente de l'onde incidente sur l'ensemble du système, du fait de la diffusion multiple), ce dont nous avons besoin afin de calculer la force optique sur cette sphère. Nous exposerons dans la section 3.2 la méthode que nous avons utilisée afin de pouvoir résoudre le problème de diffusion multiple. La section 3.3 présente une vérification de notre code de diffusion multiple avec un système à 27 sphères. Enfin nous présenterons dans la section 3.4 les résultats que nous avons obtenus en alliant cette méthode à notre modélisation de la force exercée par une onde sur un objet. A cette occasion, nous démontrerons l'existence de forces optiques induites créées par la multidiffusion.

3.2 Résolution théorique du problème de multidiffusion

La méthode que nous présentons ici permet d'évaluer de façon exacte les différents champs, incidents et diffusés, présents dans un système à N objets. Cette méthode précède cependant un travail numérique, qui limite les possiblités qu'elle offre: cependant, nous l'avons validée avec un ensemble de 27 objets. D'autres méthodes existent pour aborder la diffusion multiple lorsque le nombre d'objets est extrèmement élevé, notamment des méthodes statistiques. On les rencontre généralement dans les domaines de l'imagerie médicale, la physique stellaire où encore la prospection pétrolière, cette liste n'étant pas exhaustive.

Parfois, la diffusion multiple est considérée comme un phénomène parasite. En effet, dans le cas de l'imagerie médicale, on cherche à imager par l'intermédiaire d'un faisceau laser à impulsion courte. Ainsi, il faut savoir séparer les photons qui n'ont subit aucune diffusion (où photons balistiques), des photons ayant subi plusieurs diffusions et qui empêchent la recomposition du signal. Un autre exemple est le piégeage des atomes froids, notamment dans le cas de pièges magnéto-optiques [27]: la diffusion multiple entraine un réchauffement de l'échantillon que l'on cherche à refroidir. Cependant, la diffusion multiple peut aussi s'avérer très utile: elle peut par exemple aider à déceler les propriétés du milieu diffuseur (vitesse et nature des diffuseurs), où jouer sur les propriétés de réflexion de l'ensemble de l'échantillon (dans le cas des revêtements).

Nous allons voir qu'en utilisant des matrices de translations [28, 29, 30, 31], on peut exprimer les matrices de transfert de sphères diélectriques dans un système de diffusion multiple [32, 33, 34, 35, 36].

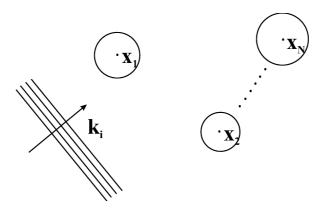


Figure 31: Système à N sphères

Pour ce, nous allons considérer un ensemble de N sphères, sous le champ incident \mathbf{E}_i , représenté figure 31. Le centre de la sphère l forme avec l'origine un vecteur \mathbf{x}_l .

Chaque sphère l (l entier entre 0 et N) a un rayon R_l , une permittivité électrique relative ϵ_l et une perméabilité magnétique relative μ_l . Les sphères ne sont pas forcément de même rayon, de même permittivité électrique où perméabilité magnétique relatives. Elles sont simplement toutes des diélectriques. Le champ incident sur le système à N sphères \mathbf{E}_i se décompose sur la base des vecteurs harmoniques sphériques:

$$\mathbf{E}_{i}(k\mathbf{r}) = E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(\mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{nm} \left(k\mathbf{r} \right) \right\} a_{nm}^{\mathbf{M}} + \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{nm} \left(k\mathbf{r} \right) \right\} a_{nm}^{\mathbf{N}} \right)$$

$$= E_{0} \left[\mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M} \left(k\mathbf{r} \right) \right\}, \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N} \left(k\mathbf{r} \right) \right\} \right]. \begin{bmatrix} a^{\mathbf{M}} \\ a^{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

$$\equiv E_{0} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t} \left(k\mathbf{r} \right) \right\}.a$$

Ce que nous voulons, c'est pouvoir calculer la force que subit n'importe laquelle des N sphères par l'intermédiaire de la formule (43) que nous écrivons à titre de rappel ci dessous:

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ \left(e_N^{(j)} \right)^{\dagger} . \Upsilon . f_N^{(j)} \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \left(f_N^{(j)} \right)^{\dagger} . \Upsilon . f_N^{(j)}$$

où $e_N^{(j)}$ est le vecteur coefficient du champ électrique excitateur $\mathbf{E}_e^{(j)}$ sur la sphère j lorsqu'elle fait partie d'un système à N sphères, et $f_N^{(j)}$ le vecteur coefficient de l'onde diffusée associée. Afin d'utiliser notre formule, il nous faut donc déterminer $e_N^{(j)}$, c'est à dire décomposer le champ excitateur appliqué à la sphère j, $\mathbf{E}_e^{(j)}$, sur une base de vecteurs harmoniques sphériques centrés sur la sphère j. Nous allons démontrer que les seules données suffisantes afin d'obtenir $e_N^{(j)}$ sont le vecteur coefficient a (vecteur coefficient du champ électrique de l'onde incidente appliquée au groupe de sphère) et les positions relatives des N sphères. Le fait que ce soient les positions relatives et non absolues des sphères permet de prendre une origine 0 arbitraire.

Une erreur grossière consisterait à confondre $e_N^{(j)}$ et a. Cela reviendrait à assimiler le champ incident sur la sphère j au champ excitateur, en négligeant l'apport des champs diffusés par les N-1 autres sphères. En fait, nous verrons que cet apport sera contenu par la suite dans le coefficient $e_N^{(j)}$. Une fois que l'information relative aux autres sphères sera contenue dans $e_N^{(j)}$, tout reviendra à considérer une seule sphère, la sphère j, sous l'action de l'onde j. Le vecteur coefficient $e_N^{(j)}$ doit de plus être relié au vecteur coefficient du champ électrique diffusé par la j ième sphère $f_N^{(j)}$, si nous voulons utiliser la formule (43). Ceci se fait par l'intermédiaire de la matrice de transfert que nous avons déja vue:

$$f_N^{(j)} = T_1^{(j)}.e_N^{(j)}$$

Nous proposerons dans un premier temps un **calcul matriciel** qui donne les valeurs des vecteurs $e_N^{(j)}$,

pour j entier entre 1 et N en fonction des vecteurs incidents a:

$$\begin{bmatrix} e_N^{(1)} \\ e_N^{(2)} \\ \vdots \\ e_N^{(N)} \end{bmatrix}$$
Vecteur colonne de vecteurs colonnes
$$= \underbrace{A}_{\text{Matrice à déterminer}} \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \\ \vdots \\ J^{(N,0)}.a \end{bmatrix}$$

Vecteur colonne de vecteurs colonnes

Nous montrerons que le fait de passer à une application numérique nous empêchera de mener à terme ce calcul rapide. Mais certains éléments seront essentiels lorsque nous aborderons la méthode que nous utiliserons pour résoudre le problème de la diffusion multiple: une **méthode récurrente**. Sans rentrer dans les détails dès maintenant, expliquons le fondement sur lequel elle repose, très simple:

La connaissance de la solution au problème de la diffusion multiple dans un système à N sphère permet de résoudre ce même problème pour un système à N+1 sphères constitué du système à N sphères précédent auquel on a ajouté une sphère.

3.2.1 Relation matriciel entre champs excitateurs et champ incident

Si l'on tient compte des champs diffusés, le champ total à l'extérieur du groupe de sphère (ou *cluster*) s'écrit :

$$\mathbf{E}_{t}\left(k\mathbf{r}\right) = \mathbf{E}_{i}\left(k\mathbf{r}\right) + \mathbf{E}_{s}^{cl}\left(k\mathbf{r}\right)$$

avec \mathbf{E}_{s}^{cl} champ total diffusé définit par la superposition des N champs diffusés:

$$\mathbf{E}_{s}^{cl}\left(k\mathbf{r}\right) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}_{s}^{(j)}\left(k\mathbf{r}_{j}\right) = E_{0} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{\Psi}^{t}\left(k\mathbf{r}_{j}\right) . f_{N}^{(j)}.$$

Afin d'expliciter \mathbf{E}_s^{cl} , il nous a fallu introduire les vecteurs \mathbf{r}_j : un vecteur \mathbf{r}_j est définit comme la différence entre le vecteur \mathbf{r} où \mathbf{E}_s^{cl} est évalué et la position \mathbf{x}_j de la j ième sphère: $\mathbf{r}_j = \mathbf{r} - \mathbf{x}_j$. Il y a bien sûr N vecteurs \mathbf{r}_j . Leur utilisation nous autorise à travailler avec les coefficients $f_N^{(j)}$ des N champs diffusés faits à partir des centres des différentes sphères. Le champ excitateur $\mathbf{E}_e^{(j)}$ qui arrive sur la sphère j et dont nous cherchons le développement est par conséquent égal à:

$$\underbrace{\mathbf{E}_{e}^{(j)}(k\mathbf{r})}_{\text{champ de l'onde }j} \equiv \underbrace{\mathbf{E}_{i}(k\mathbf{r})}_{\text{champ de l'onde excitatrice}} + \underbrace{\sum_{l=1,l\neq j}^{N} \mathbf{E}_{s}^{(l)}(k\mathbf{r})}_{\text{champs diffusés par les }N-1 \text{ autres sphères}}$$

$$\mathbf{E}_{e}^{(j)}(k\mathbf{r}) = E_{0}\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r})\right\}.a + E_{0}\sum_{l=1,l\neq j}^{N} \mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}_{l}).f_{N}^{(l)} \tag{47}$$

Afin de pouvoir projeter la relation ci-dessus sur les vecteurs de base dans le but de travailler avec les vecteurs coefficients et non les champs électriques, il nous faut évaluer les vecteurs de base dans le même repère, c'est à dire utiliser les matrices de translation de façon à exprimer tous les éléments de base dans

le repère associé à la sphère j:

$$\mathbf{E}_{e}^{(j)}(k\mathbf{r}) = E_{0}\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}_{j})\right\}.e_{N}^{(j)}$$

$$\mathbf{E}_{i}(k\mathbf{r}) = E_{0}\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}_{j})\right\}.J^{(j,0)}.a$$

$$\sum_{l=1,l\neq j}^{N} \mathbf{E}_{s}^{(l)}(k\mathbf{r}) = E_{0}\sum_{l=1,l\neq j}^{N} \mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}_{j}).H^{(j,l)}.f_{N}^{(l)}$$

$$(48)$$

 $H^{(j,l)}$ est une nouvelle matrice de translation que nous n'avons pas accord abordée (cf annexe A). On a posé par définition:

$$H^{(j,l)} \equiv H\left(k\left(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i\right)\right)$$

où \mathbf{x}_l désigne la position du centre de la sphère l, \mathbf{x}_j celle du centre de la sphère j et k est la norme du vecteur d'onde dans le milieu extérieur de l'onde excitatrice. La matrice H est dite "irrégulière". Elle ne peut avoir pour argument le vecteur nul, car les fonctions qui permettent de la calculer divergent à l'origine. On remarque que dans la formule (48), l'argument de H ne peut jamais être nul, puisque cet argument est un vecteur reliant deux centres de sphères.

Une fois ces changements faits, nous pouvons projeter la relation (47) afin d'obtenir la relation sur les coefficients:

$$e_N^{(j)} = J^{(j,0)}.a + \sum_{l=1,l\neq j}^N H^{(j,l)}.f_N^{(l)}.$$
 (49)

qui peut se réécrire:

$$e_N^{(j)} = J^{(j,0)}.a + \sum_{l=1,l\neq j}^N H^{(j,l)}.T_1^{(l)}.e_N^{(l)}$$

Les inconnues sont les N vecteurs coefficients $e_N^{(j)}$. Nous pouvons réarranger notre expression:

En faisant varier j entre 1 et N, cette écriture permet d'obtenir l'écriture matricielle:

$$\begin{bmatrix} I & -H^{(1,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & -H^{(1,N)}.T_1^{(N)} \\ -H^{(2,1)}.T_1^{(1)} & I & \cdots & -H^{(2,N)}.T_1^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H^{(N,1)}.T_1^{(1)} & -H^{(N,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N^{(1)} \\ e_N^{(2)} \\ \vdots \\ e_N^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \\ \vdots \\ J^{(N,0)}.a \end{bmatrix}$$

où, en isolant le vecteur inconnu:

$$\begin{bmatrix}
e_N^{(1)} \\
e_N^{(2)} \\
\vdots \\
e_N^{(N)}
\end{bmatrix}$$
(50)

$$= \underbrace{ \begin{bmatrix} I & -H^{(1,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & -H^{(1,N)}.T_1^{(N)} \\ -H^{(2,1)}.T_1^{(1)} & I & \cdots & -H^{(2,N)}.T_1^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H^{(N,1)}.T_1^{(1)} & -H^{(N,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & I \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{Matrice $N \times N$ dont les éléments sont des matrices}} \underbrace{ \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \\ \vdots \\ J^{(N,0)}.a \end{bmatrix}}_{\text{Vecteur colonne de vecteur}}$$

En théorie, les vecteurs colonnes du type $e_N^{(j)}$ sont de tailles infinies, tout comme les matrices de transfert, les matrices de translation et le vecteur coefficient incident. En pratique, on tronque le vecteur a afin de pouvoir se livrer à des calculs numériques. Par exemple, si le vecteur a est de dimension N_0 , il en va de même pour les vecteurs $e_N^{(j)}$. Quant aux matrices de transfert et de translation, elles sont alors de taille $N_0 \times N_0$. La relation (50) met donc en jeu:

- ullet à gauche un vecteur colonne dont les N éléments sont des vecteurs colonnes de taille N_0
- à droite le produit d'une matrice de taille $N \times N$ dont les éléments de base sont des matrices $N_0 \times N_0$ par un vecteur colonne dont les N éléments sont des vecteurs colonnes de taille N_0 .

L'expression que nous venons d'établir est la plus directe afin de calculer les vecteurs coefficients de l'onde excitatrice j. Malheureusement, elle est loin d'être la plus pratique, puisqu'elle nécessite l'inversion d'une matrice dont les éléments de base sont des matrices et des difficultés d'ordre numérique interviennent lors de cette inversion [37, 38, 39]. Nous allons alors privilégier une autre approche, qui utilise les vecteurs coefficients des champs diffusés par chaque bille. Dans un premier temps, on définit le vecteur coefficient de l'onde diffusée par la sphère j dans un système à N sphères à l'aide de la relation:

$$f_N^{(j)} \equiv T_1^{(j)}.e_N^{(j)}$$

De plus, nous allons définir une matrice de transfert généralisée qui permettra, pour chaque élément du cluster, d'obtenir le vecteur coefficient du champ diffusé à partir de celui du champ excitateur:

$$\begin{bmatrix} f_N^{(1)} \\ f_N^{(2)} \\ \vdots \\ f_N^{(N)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_N^{(1,1)} & T_N^{(1,2)} & \cdots & T_N^{(1,N)} \\ T_N^{(2,1)} & T_N^{(2,2)} & \cdots & T_N^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N^{(N,1)} & T_N^{(N,2)} & \cdots & T_N^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \\ \vdots \\ J^{(N,0)}.a \end{bmatrix}$$

Pour une sphère j, on a donc:

$$f_N^{(j)} = \sum_{k=1}^N T_N^{(j,k)} . J^{(k,0)} . a$$
 (51)

Les matrices $T_N^{(j,k)}$ sont indicées N car elles sont directement liées comme nous le verrons par la suite au nombre d'éléments du cluster, contrairement aux matrices de transfert du type $T_1^{(j)}$ liées à l'objet j, indépendamment des autres objets. Si l'on remarque de façon triviale que l'on a:

$$\begin{bmatrix} f_N^{(1)} \\ f_N^{(2)} \\ \vdots \\ f_N^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_1^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_1^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_N^{(1)} \\ e_N^{(2)} \\ \vdots \\ e_N^{(N)} \end{bmatrix}$$

on peut relier la matrice de transfert généralisée à la matrice de la relation (50) grâce à:

$$\begin{bmatrix} T_N^{(1,1)} & T_N^{(1,2)} & \cdots & T_N^{(1,N)} \\ T_N^{(2,1)} & T_N^{(2,2)} & \cdots & T_N^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N^{(N,1)} & T_N^{(N,2)} & \cdots & T_N^{(N,N)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_1^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_1^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -H^{(1,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & -H^{(1,N)}.T_1^{(N)} \\ -H^{(2,1)}.T_1^{(1)} & I & \cdots & -H^{(2,N)}.T_1^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H^{(N,1)}.T_1^{(1)} & -H^{(N,2)}.T_1^{(2)} & \cdots & I \end{bmatrix}^{-1}$$

3.2.2 Méthode récurrente- Cas à 2 sphères

Afin d'évaluer notre matrice de transfert généralisée, nous allons numéroter de façon arbitraire les objets de 1 à N. Ainsi, si nous ne considérons que les p premiers éléments de cet ensemble, et enlevons les (N-p) autres éléments, nous pouvons définir:

$$\begin{bmatrix} f_p^{(1)} \\ f_p^{(2)} \\ \vdots \\ f_p^{(p)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_p^{(1,1)} & T_p^{(1,2)} & \cdots & T_p^{(1,p)} \\ T_p^{(2,1)} & T_p^{(2,2)} & \cdots & T_p^{(2,p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_p^{(p,1)} & T_p^{(p,2)} & \cdots & T_p^{(p,p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \\ \vdots \\ J^{(p,0)}.a \end{bmatrix}$$

L'idée est alors d'exprimer les matrices $T_{p+1}^{(j,k)}$ (j,k) entiers entres 1 et p+1) en fonctions des matrices $T_p^{(l,m)}$ (l,m) entiers entre 1 et p) par une récurrence sur les matrices de transfert généralisée. Nous allons dans un premier temps relier les vecteurs coefficients d'un système de 2 sphères (que nous nommerons rang 2) à un système à 1 sphère. Cette relation est assez simple et détaille l'esprit de la démonstration pour le cas général. Enfin, la relation entre le rang 2 et le rang 1 nous permettra à la fois de débuter et vérifier notre formule de récurrence.

Au rang 1, nous avons simplement la relation déja vue:

$$f_1^{(1)} = T_1^{(1)} J^{(1,0)} a$$

Ce sera le premier élément de notre récurrence. Au rang 2, nous avons:

$$\left[\begin{array}{c} f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cc} T_2^{(1,1)} & T_2^{(1,2)} \\ T_2^{(2,1)} & T_2^{(2,2)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \end{array} \right]$$

soit en développant:

$$f_2^{(1)} = T_2^{(1,1)} J^{(1,0)} . a + T_2^{(1,2)} J^{(2,0)} . a$$

$$f_2^{(2)} = T_2^{(2,1)} J^{(1,0)} . a + T_2^{(2,2)} J^{(2,0)} . a$$
(52)

Or, ces deux derniers vecteurs doivent vérifier les relations:

$$f_2^{(1)} = T_1^{(1)} \cdot e_2^{(1)}$$

$$f_2^{(2)} = T_1^{(2)} \cdot e_2^{(2)}$$
(53)

Nous allons rechercher une autre expression pour $f_2^{(1)}$ et $f_2^{(2)}$ qui nous permettra d'obtenir l'expression des matrices de transfert au rang 2 $T_2^{(i,j)}$.

Pour ce, nous exprimerons les vecteurs coefficients $e_2^{(1)}$ et $e_2^{(2)}$ en fonction du vecteur incident a, des matrices de translations $H^{(2,1)}$ et $H^{(1,2)}$ et des matrices de transfert au rang 1 $T_1^{(1)}$ et $T_1^{(2)}$. L'idée est d'obtenir 4 matrices A, B, C et D qui vérifient la relation:

$$e_2^{(1)} = A.J^{(1,0)}.a + B.J^{(2,0)}.a$$

 $e_2^{(2)} = C.J^{(1,0)}.a + D.J^{(2,0)}.a$

soit en injectant cette relation dans (53):

$$f_2^{(1)} = T_1^{(1)} \cdot \left(A.J^{(1,0)}.a + B.J^{(2,0)}.a \right)$$

$$f_2^{(2)} = T_1^{(2)} \cdot \left(C.J^{(1,0)}.a + D.J^{(2,0)}.a \right)$$
(54)

et alors nous aurons, par identification sur les matrices qui multiplient les termes $J^{(1,0)}.a$ et $J^{(2,0)}.a$ dans les équations (52) et (54):

$$T_2^{(1,1)} = T_1^{(1)}.A$$
 $T_2^{(1,2)} = T_1^{(1)}.B$ $T_2^{(2,1)} = T_1^{(2)}.C$ $T_2^{(2,2)} = T_1^{(2)}.D$

Exprimons tout d'abord les vecteurs coefficients excitateurs $e_2^{(1)}$ et $e_2^{(2)}$ en fonction du vecteur coefficient incident a. Cette possibilité nous est fournie par la relation matricielle (50):

$$\begin{bmatrix} e_2^{(1)} \\ e_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -H^{(1,2)}.T_1^{(2)} \\ -H^{(2,1)}.T_1^{(1)} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \end{bmatrix}$$

soit

$$\left[\begin{array}{cc} I & -H^{(1,2)}.T_1^{(2)} \\ -H^{(2,1)}.T_1^{(1)} & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} e_2^{(1)} \\ e_2^{(2)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} J^{(1,0)}.a \\ J^{(2,0)}.a \end{array}\right]$$

et donc

$$\left(e_2^{(1)} - H^{(1,2)} \cdot T_1^{(2)} e_2^{(2)}\right) = J^{(1,0)} \cdot a \tag{55}$$

$$\left(-H^{(2,1)}.T_1^{(1)}e_2^{(1)} + e_2^{(2)}\right) = J^{(2,0)}.a\tag{56}$$

Nous avons un système de 2 équations dont les 2 inconnues sont $e_2^{(1)}$ et $e_2^{(2)}$. Nous allons éliminer $e_2^{(1)}$. Si l'on multiplie à gauche par la matrice $H^{(2,1)}.T_1^{(1)}$ chaque membre de (55), on obtient le système:

$$\left(H^{(2,1)}.T_1^{(1)}e_2^{(1)} - H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.H^{(1,2)}.T_1^{(2)}e_2^{(2)} \right) = H^{(2,1)}.T_1^{(1)}J^{(1,0)}.a$$

$$\left(-H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.e_2^{(1)} + e_2^{(2)} \right) = J^{(2,0)}.a$$

Ajoutons ces deux équations membre à membre, afin d'éliminer $e_2^{(1)}$:

$$(I - H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.H^{(1,2)}.T_1^{(2)}).e_2^{(2)} = (H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.J^{(1,0)} + J^{(2,0)}).a$$

et donc en isolant $e_2^{(2)}$:

$$e_2^{(2)} = \left(I - H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.H^{(1,2)}.T_1^{(2)}\right)^{-1}.\left(H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.J^{(1,0)} + J^{(2,0)}\right).a$$

On trouve de même que:

$$e_2^{(1)} = \left(I - H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.H^{(2,1)}.T_1^{(1)}\right)^{-1}.\left(J^{(1,0)} + H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.J^{(2,0)}\right).a$$

Récapitulons les relations que nous allons utiliser:

$$\begin{split} f_2^{(1)} &= T_2^{(1,1)} J^{(1,0)}.a + T_2^{(1,2)} J^{(2,0)}.a = T_1^{(1)}.e_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} &= T_2^{(2,1)} J^{(1,0)}.a + T_2^{(2,2)} J^{(2,0)}.a = T_1^{(2)}.e_2^{(2)} \\ &\text{et} \\ e_2^{(1)} &= \left(I - H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.H^{(2,1)}.T_1^{(1)}\right)^{-1} \left(J^{(1,0)} + H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.J^{(2,0)}\right).a \\ e_2^{(2)} &= \left(I - H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.H^{(1,2)}.T_1^{(2)}\right)^{-1}.\left(H^{(2,1)}.T_1^{(1)}J^{(1,0)} + J^{(2,0)}\right).a \end{split}$$

On trouve par conséquent, en éliminant le vecteur coefficient excitateur $e_2^{(1)}$, les deux expressions différentes de $f_2^{(1)}$ qui donnent:

$$\begin{split} &T_2^{(1,1)}J^{(1,0)}.a + T_2^{(1,2)}J^{(2,0)}.a \\ &= T_1^{(1)}.\left(I - H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.H^{(2,1)}.T_1^{(1)}\right)^{-1}\left(J^{(1,0)} + H^{(1,2)}.T_1^{(2)}.J^{(2,0)}\right).a \end{split}$$

et en éliminant $e_2^{(2)}$, celles de $f_2^{(2)}$ qui impliquent:

$$T_2^{(2,1)}J^{(1,0)}.a + T_2^{(2,2)}J^{(2,0)}.a$$

$$= \left(I - H^{(2,1)}.T_1^{(1)}.H^{(1,2)}.T_1^{(2)}\right)^{-1}.\left(H^{(2,1)}.T_1^{(1)}J^{(1,0)} + J^{(2,0)}\right).a$$

Par identification sur les coefficients des vecteurs colonnes $J^{(1,0)}.a$ et $J^{(2,0)}.a$, on trouve:

$$\begin{cases}
T_{2}^{(1,1)} = T_{1}^{(1)} \left(I - H^{(1,2)} . T_{1}^{(2)} H^{(2,1)} . T_{1}^{(1)} \right)^{-1} \\
T_{2}^{(1,2)} = T_{1}^{(1)} \left(I - H^{(1,2)} . T_{1}^{(2)} H^{(2,1)} . T_{1}^{(1)} \right)^{-1} . H^{(1,2)} . T_{1}^{(2)} \\
T_{2}^{(2,1)} = \left(I - H^{(2,1)} . T_{1}^{(1)} . H^{(1,2)} . T_{1}^{(2)} \right)^{-1} . H^{(2,1)} . T_{1}^{(1)} \\
T_{2}^{(2,2)} = \left(I - H^{(2,1)} . T_{1}^{(1)} . H^{(1,2)} . T_{1}^{(2)} \right)^{-1}
\end{cases} (57)$$

Cette relation entre le rang 1 et le rang 2 nous permettra par la suite de commencer notre récurrence. En effet, le rang 1 de notre récurrence concerne les matrices $T_1^{(1)}$ et $T_1^{(2)}$, connues avec leur expression donnée dans la section 2.4.1.

Il nous manque encore l'essentiel: une relation reliant le rang p au rang p+1.

Méthode récurrente- Principe 3.2.3

Le principe pour établir cette relation de récurrence sera le même que celui qui nous a permis de passer du rang 1 au rang 2: on exprime de deux façon différentes les vecteurs coefficients diffusés $f_{n+1}^{(j)}$, puis on identifie les coefficients matriciels des vecteurs coefficients du type $J^{(k,0)}.a.$

Voici les 2 expressions différentes que nous aurons des vecteurs $f_{p+1}^{(j)}$:

1) La relation postulée, impliquant la matrice de transfert généralisée au rang p+1:

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=0}^{p+1} T_{p+1}^{(j,k)} . J^{(k,0)} . a$$
(58)

2) Une seconde relation, déterminée en utilisant la multidiffusion dans un système à p sphères (supposée connue) et le principe de superposition des champs électriques:

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=0}^{p+1} A^{(j,k)} . J^{(k,0)} . a$$
(59)

On obtiendra ainsi l'égalité:

$$T_{p+1}^{(j,k)} = A^{(j,k)}$$

L'expression (59) sera obtenue en 2 temps. Dans un premier temps, nous exprimerons le vecteur coefficient

$$f_{p+1}^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{p+1} A^{(p+1,k)} . J^{(k,0)} . a$$

ce qui nous permettra d'obtenir l'expression de $T_{p+1}^{(p+1,k)}$, pour k entier entre 1 et p+1.

Puis nous exprimerons les vecteurs $f_{p+1}^{(j)}$ pour j compris entre 1 et p. Nous aurons ainsi les matrices $T_{n+1}^{(j,k)}$ pour j entre 1 et p et k entre 1 et p+1.

3.2.4 Méthode récurrente- Cas à p sphères

Considérons un système de p sphères. Au champ diffusé par la sphère j correspond le vecteur coefficient $f_n^{(j)}$ vérifiant la relation (51):

$$f_p^{(j)} = \sum_{k=1}^p T_p^{(j,k)}.J^{(k,0)}.a$$

Chaque vecteur coefficent $f_p^{(j)}$ est associé à un développement fait au centre de la sphère j. Exprimons le vecteur coefficient f_p^{cl} du champ électrique diffusé par le système à p sphères. Il s'obtient par la superposition des p champs diffusés par chacune des sphères.

Si l'on veut regrouper les différents champs diffusés par les p sphères, il nous faut translater tous les vecteurs coefficients en un même point, afin de pouvoir sommer les champs diffusés. Supposons que ce point soit indicé p+1, et qu'il ne soit confondu avec aucun des centres des p sphères: nous pouvons ainsi utiliser la matrice de translation irrégulière H. Le vecteur coefficient du champ total diffusé par cet ensemble est:

$$f_p^{cl} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.J^{(k,0)}.a$$

Le vecteur f_p^{cl} est ainsi celui associé au développement du champ diffusé par le système à p sphères, centré sur le point p+1.

Ajoutons une sphère au point indicé p+1, et calculons le vecteur coefficient $e_{p+1}^{(p+1)}$ du champ électrique associé à l'onde excitatrice sur cette sphère:

champ incident sur la sphère
$$p+1: E_0 \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^t(k\mathbf{r})\right\}.e_{p+1}^{(p+1)}$$

Le vecteur $f_{p+1}^{(p+1)}$ sera associé au développement centré en p+1 du champ diffusé par la sphère p+1. Il verifiera ainsi la relation:

$$f_{p+1}^{(p+1)} = T_1^{(p+1)} \cdot e_{p+1}^{(p+1)}$$

La matrice de transfert $T_1^{(p+1)}$ est connue (c'est celle relative à la sphère p+1 lorsqu'elle est toute seule). C'est ce vecteur $f_{p+1}^{(p+1)}$ que nous allons rechercher à exprimer autrement qu'avec la relation postulée (58) afin d'obtenir une relation du type (59).

Si nous déterminons $e_{p+1}^{(p+1)}$, nous aurons ainsi l'expression de $f_{p+1}^{(p+1)}$ recherchée.

Le champ électrique excitateur sur la sphère p+1 s'obtient par superposition:

champ incident sur la sphère
$$p+1$$
 (60)

= champ incident+champ total diffusé par le système à p sphères

le développement du champ électrique incident évalué à partir du centre de la sphère p+1 est égal à:

champ incident:
$$E_0 \mathcal{R}g \left\{ \Psi^t(k\mathbf{r}) \right\} .J^{(p+1,0)}.a$$

L'ancien système à p sphères diffuse une onde somme de l'ancienne onde incidente et du champ diffusé par la sphère p+1. Le développement du champ diffusé ainsi obtenu, et centré sur le point p+1, s'écrit:

champ total diffusé par le système à
$$p$$
 sphères : $E_0 \Psi^t(\mathbf{r}) \cdot \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)} \cdot T_p^{(j,k)} \cdot (J^{(k,0)} \cdot a) + H^{(k,p+1)} f_{p+1}^{(p+1)}$ (61)

Dans le terme (61), on remarque la somme $J^{(k,0)}.a + H^{(k,p+1)}f_{p+1}^{(p+1)}$: l'onde incidente sur le cluster de p sphères est bien composée de l'ancienne onde incidente (vecteurs coefficients a, translatés à partir de l'origine 0 du développement de l'onde incidente par l'intermédiaire de la matrice de translation régulière $J^{(k,0)}$) à laquelle on a rajouté l'onde diffusée par la sphère p+1. La relation (60) se traduit en termes vectoriels:

champ incident sur la sphère p+1

= champ incident+champ total diffusé par le système à p sphères

$$E_0 \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^t(k\mathbf{r})\right\}.e_{p+1}^{(p+1)}$$

$$= E_0 \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^t(k\mathbf{r}) \right\} . J^{(p+1,0)}.a + E_0 \mathbf{\Psi}^t(\mathbf{r}). \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)}. T_p^{(j,k)}. (J^{(k,0)}.a + H^{(k,p+1)} f_{p+1}^{(p+1)})$$

Puisque tous les développement sont centrés sur le point p+1, nous pouvons éliminer les vecteurs de base. En terme de coefficients, la relation précédente se traduit par l'égalité:

$$e_{p+1}^{(p+1)} = J^{(p+1,0)}.a + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.(J^{(k,0)}.a + H^{(k,p+1)}f_{p+1}^{(p+1)})$$

Il y a 2 inconnues dans cette équation: $e_{p+1}^{(p+1)}$ et $f_{p+1}^{(p+1)}$. Nous utilisons une nouvelle fois pour la sphère p+1 la relation:

$$f_{p+1}^{(p+1)} = T_1^{(p+1)} \cdot e_{p+1}^{(p+1)}$$

pour éliminer $f_{p+1}^{(p+1)}$, soit:

$$e_{p+1}^{(p+1)} = J^{(p+1,0)}.a + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.(J^{(k,0)}.a + H^{(k,p+1)}.T_1^{(p+1)}.e_{p+1}^{(p+1)})$$

Ainsi, on obtient une équation à une inconnue, $e_{p+1}^{(p+1)}$, qu'il va nous falloir résoudre. L'équation se réécrit:

$$\left(I - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_{p}^{(j,k)}.H^{(k,p+1)}.T_{1}^{(p+1)}\right).e_{p+1}^{(p+1)}$$

$$= J^{(p+1,0)}.a + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_{p}^{(j,k)}.J^{(k,0)}.a$$

$$e_{p+1}^{(p+1)} = \left(I - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.H^{(k,p+1)}.T_1^{(p+1)}\right)^{-1}.$$

$$\left(J^{(p+1,0)}.a + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.J^{(k,0)}.a\right)$$

et ainsi nous obtenons une seconde expression pour le vecteurs diffusé $f_{p+1}^{(p+1)}$:

$$\begin{split} f_{p+1}^{(p+1)} &= T_1^{(p+1)}.e_{p+1}^{(p+1)} \\ &= T_1^{(p+1)}.\left(I - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.H^{(k,p+1)}.T_1^{(p+1)}\right)^{-1} \\ &\left(J^{(p+1,0)}.a + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)}.T_p^{(j,k)}.J^{(k,0)}.a\right) \end{split}$$

En considérant la relation postulée (58):

$$f_{p+1}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{p+1} T_{p+1}^{(p+1,k)} . J^{(k,0)} . a$$
(62)

On en déduit, par identification sur les coefficients des termes $J^{(k,0)}.a$ entre (??) et (58):

$$T_{p+1}^{(p+1,p+1)} = T_1^{(p+1)} \cdot \left(I - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)} \cdot T_p^{(j,k)} \cdot H^{(k,p+1)} \cdot T_1^{(p+1)} \right)^{-1}$$

$$T_{p+1}^{(p+1,j)} = T_{p+1}^{(p+1,p+1)} \cdot \sum_{k=1}^p H^{(p+1,j)} \cdot T_p^{(j,k)}, \quad j \text{ comprisentre 1 et } p$$
(63)

Il nous reste encore à calculer les matrices de transfert $T_{p+1}^{(j,p+1)}$ (j entier entre 1 et p) et $T_{p+1}^{(j,k)}$ (j et k entiers entre 1 et p). Nous le ferons en exprimant autrement $f_{p+1}^{(j)}$ qu'avec la relation postulée. Considérons le champ diffusé par la sphère j dans un système à p+1 sphères (j entier entre 1 et

Considérons le champ diffusé par la sphère j dans un système à p+1 sphères (j entier entre 1 et p). Son vecteur coefficient est $f_{p+1}^{(j)}$. Nous allons utiliser le fait que nous connaissons deux choses: tout d'abord le champ diffusé par la sphère p+1 dans un système à p+1 sphères (vecteur coefficient $f_{p+1}^{(p+1)}$).

D'autre part les matrices de transfert permettant de calculer le champ diffusé par la sphère j à partir de n'importe quel champ incident, dans un système à p sphères (les matrices $T_p^{(j,k)}$, (j,k) entiers entre 1 et p).

Fidèle à notre démarche, nous allons exprimer $f_{p+1}^{(j)}$ de deux façons différentes. Tout d'abord, nous avons la relation postulée (58), pour j entier entre 1 et p:

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{p+1} T_{p+1}^{(j,k)} . J^{(k,0)} . a$$

Si on considère la nouvelle onde incidente sur l'ancien système à p sphères, celle ci est la somme de l'ancienne onde incidente (vecteur a) et de l'onde diffusée par la sphère p+1 (coefficient $f_{p+1}^{(p+1)}$).On a donc:

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} T_p^{(j,k)} \cdot \left(J^{(k,0)} \cdot a + H^{(k,p+1)} \cdot f_{p+1}^{(p+1)} \right)$$

Il nous faut éliminer $f_{p+1}^{(p+1)}$. Cela se fait naturellement en considérant la relation:

$$f_{p+1}^{(p+1)} = \sum_{k=1}^{p+1} T_{p+1}^{(p+1,k)} . J^{(k,0)} . a$$

où les matrices $T_{p+1}^{(p+1,k)}$ ont déja été évaluées à l'aide de (63). On en déduit:

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{p} T_p^{(j,k)} \cdot \left(J^{(k,0)} \cdot a + H^{(k,p+1)} \cdot \sum_{i=1}^{p+1} T_{p+1}^{(p+1,i)} \cdot J^{(i,0)} \cdot a \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} T_p^{(j,k)} \left(J^{(k,0)} \cdot a + H^{(k,p+1)} \cdot \sum_{i=1}^{p} T_{p+1}^{(p+1,i)} \cdot J^{(i,0)} \cdot a + H^{(k,p+1)} \cdot T_{p+1}^{(p+1,p+1)} \cdot J^{(p+1,0)} \cdot a \right)$$

Réécrite de façon à regrouper ensemble les coefficients des termes $J^{(k,0)}.a$, cette expression donne:

$$\begin{split} f_{p+1}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{p} T_{p}^{(j,k)} J^{(k,0)}.a + \sum_{k=1}^{p} T_{p}^{(j,k)}.H^{(k,p+1)}.\sum_{i=1}^{p} T_{p+1}^{(p+1,i)}.J^{(i,0)}.a \\ &+ \sum_{k=1}^{p} T_{p}^{(j,k)} H^{(k,p+1)} T_{p+1}^{(p+1,p+1)}.J^{(p+1,0)}.a \\ f_{p+1}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{p} \left(T_{p}^{(j,k)} + \sum_{i=1}^{p} T_{p}^{(j,i)}.H^{(i,p+1)}.T_{p+1}^{(p+1,k)} \right).J^{(k,0)}.a \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{p} T_{p}^{(j,k)} H^{(k,p+1)} T_{p+1}^{(p+1,p+1)} \right).J^{(p+1,0)}.a \end{split}$$

Comme

$$f_{p+1}^{(j)} = \sum_{k=1}^{p+1} T_{p+1}^{(j,k)} . J^{(k,0)} . a$$

par identification sur les coefficients des termes $J^{(k,0)}.a$, on en déduit que pour j entier entre 1 et p:

$$T_{p+1}^{(j,k)} = T_p^{(j,k)} + \sum_{i=1}^{p} T_p^{(j,i)} \cdot H^{(i,p+1)} \cdot T_{p+1}^{(p+1,k)}, k \text{ entier entre 1 et } p$$

$$T_{p+1}^{(j,p+1)} = \sum_{k=1}^{p} T_p^{(j,k)} H^{(k,p+1)} T_{p+1}^{(p+1,p+1)}$$
(64)

Les matrices qui nous intéressent plus particulièrement sont bien sûr celles concernant la totalité de notre système à N sphères, c'est à dire les formules précédentes pour p = N - 1. On obtient finalement:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_N^{(N,N)} = T_1^{(N)} \cdot \left[I - \sum_{j,k=1}^{N-1} H^{(N,k)} \cdot T_{N-1}^{(k,j)} \cdot H^{(j,N)} \cdot T_1^{(N)} \right]^{-1} \\ T_N^{(N,k)} = T_N^{(N,N)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{N-1} H^{(N,j)} \cdot T_{N-1}^{(j,k)} \right] & k \neq N \\ T_N^{(j,k)} = T_{N-1}^{(j,k)} + \sum_{i=1}^{N-1} T_{N-1}^{(j,i)} \cdot H^{(i,N)} \cdot T_N^{(N,k)} & k \neq N \\ T_N^{(j,N)} = \sum_{i=1}^{N-1} T_{N-1}^{(j,i)} \cdot H^{(i,N)} \cdot T_N^{(N,N)} & k = N \end{array} \right.$$

Nous connaissons, pour i entier entre 1 et N, toutes les matrices $T_1^{(i)}$. Si on numérote arbitrairement les sphères de 1 à N, on peut procéder de la façon suivante, pour résoudre le problème de la diffusion par un système à N sphères:

- 1) On part de $T_1^{(1)}$ et $T_1^{(2)}$.
- 2) On calcule ensuite, pour un rang p=3 jusqu'à p=N, dans l'ordre: $T_p^{(p,p)}$, puis $T_p^{(p,k)}(k$ entier entre 1 et p) et enfin $T_p^{(k,p)}$ (k entier entre 1 et p) et $T_p^{(i,j)}$ (i,j entiers entre 1 et p).

3.3 Vérification du code par l'expérience

Nous avons validé notre code de mutidiffusion par l'expérience en étudiant la diffusion d'un agrégat cubique composé de 27 sphères, représenté figure 32.

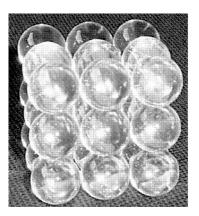


Figure 32: Photo du système à 27 billes.

Les sphères sont de diamètre 1.59cm, et sont composées d'un plastique diélectrique d'indice optique réel 1.61. Le dispositif expérimental fournit une onde monochromatique de fréquence $8\ Ghz$, à laquelle on associe un champ électrique excitateur:

$$\mathbf{E}_e = E_e e^{i(\omega t - ky + \phi_e)} \widehat{\mathbf{u}}$$

Le vecteur $\hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur polarisation du champ électrique excitateur, ω sa pulsation, $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{y}}$ son vecteur d'onde, E_e son module, ϕ_e la phase à l'origine (prise au niveau de la source); le repère utilisé est défini suivant la figure 33.

La longueur d'onde du faisceau incident est de l'ordre du cm:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{8.10^9} = 3,75 \ cm$$

Nous sommes ainsi typiquement dans le cas résonnant. Les mesures, effectués par l'équipe de Pierre Sabouroux et Jean Michel Geffrin au sein de l'équipe SEMO de l'institut Fresnel, consistent à évaluer le champ diffusé par l'agrégat en fonction de l'angle θ_s de mesure définit figure 33 . Ce champ diffusé s'écrit:

$$\mathbf{E}_s = E_s e^{i(\omega t - ky + \phi_s)} \widehat{\mathbf{u}}$$

Les caractéristiques de l'onde diffusée sont données par la mesure de l'amplitude E_s et celle de la phase ϕ_s .

Les expérimentateurs mesurent deux données:

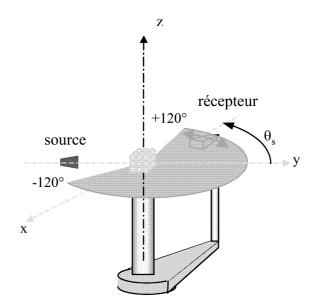


Figure 33: Schéma expérimental.

- L'amplitude E_s du champ diffusé.
- Le déphasage $\Delta \phi$:

$$\Delta \phi = \phi_m - \phi_e \text{ rad}$$

Ils font varier l'angle θ_s du récepteur entre -120° et 120° . Ce récepteur est situé à 175 cm, à mettre en rapport à la taille de l'agrégat, cube de 4.77cm. Nous avons donc utilisé l'approximation en champ lointains, qui donne des résultats qui diffèrent très peu du calcul exact.

L'orientation du cube est donnée sur la figure 34: les faces sont perpendiculaires aux directions $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$.

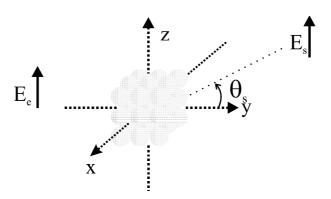


Figure 34: Orientation des différents champs.

Dans un premier temps, le champ électrique excitateur à pour direction de polarisation $\widehat{\mathbf{z}}$, soit une direction perpendiculaire au plan d'incidence (Oxy), plan contenant à la fois la source et le récepteur. Le résultat de la comparaison entre mesure expérimentale et calcul est donné sur la figure 35 ; nous y avons représenté les comparaisons des déphasages (appelé "phase" sur la courbe) et des amplitudes (appelé "|E|") en de la position θ_s en °.

On voit alors que le calcul numérique est en accord avec la mesure. Lorsque la polarisation du champ excitateur est suivant $\hat{\mathbf{x}}$, c'est à dire parallèle au plan d'incidence, la comparaison entre le calcul exact et le calcul approché est donné figure 36

Une fois de plus, il y a accord entre calcul numérique et mesures expérimentales.

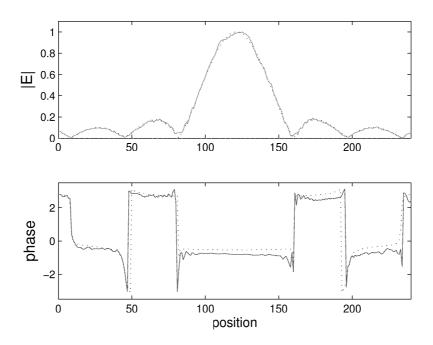


Figure 35: Comparaison à 8Ghz entre la théorie (courbe pointillée) et l'expérience (courbe pleine) - Champ perpendiculaire.

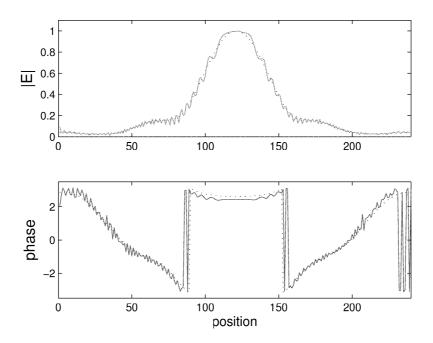


Figure 36: Comparaison à 8Ghz entre la théorie (courbe pointillée) et l'expérience (courbe pleine)- Champ parallèle.

Cette application de l'algorithme de multidiffusion que nous utilisons est une première preuve de sa justesse. De plus, on retrouve les mesures expérimentales lorsque l'on change l'orientation du cube, où la fréquence du faisceau incident (passant de 8 à 14 Ghz).

3.4 Etudes numériques

3.4.1 Sphères soumises à une onde plane incidente

Nous considérons comme premier exemple numérique un système constitué de deux sphères diélectriques d'indices n_s , immergées dans un milieu d'indice n_m , représenté figure 37. Le milieu extérieur sera dans la suite de notre étude de l'eau, d'indice optique 1.33. Toutes les perméabilités magnétiques relatives (sphères comme milieu extérieur) seront égales à 1. Nous supposons que les centres de ces deux sphères déterminent une direction de vecteur directeur $\hat{\mathbf{y}}$ contenu dans le plan (Oxy), $\hat{\mathbf{z}}$ étant la direction de propagation de l'onde incidente que nous prendrons plane et avec un champ électrique déterminé par la relation:

$$\mathbf{E}_{i}(\mathbf{r}) = E \exp(ikz)\widehat{\mathbf{y}}$$

et dont les coefficients sont définis selon la formule (45). Le système est invariant par translation dans le plan (Oxy). Nous prendrons par conséquent l'origine de notre repère au centre de l'une des deux sphères qui deviendra alors la sphère 1. La sphère 2 aura une position "libre", du moment qu'elle reste dans le plan (Oxy); nous supposerons par exemple que nous sommes dans le cas pratique d'une onde plane poussant deux sphères sur une plaque située dans le plan (Oxy). Ceci n'est en rien une étude dynamique,: nous ferons varier la position de sphère 2 dans le plan (Oxy), et nous intéresserons alors à la force optique qu'elle subit. Ainsi, le degré de liberté suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$ est enlevé, et la sphère 1 sera en équilibre si les composantes de la force qu'elle subit dans le plan (Oxy) sont nulles.

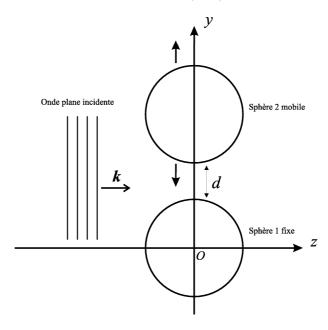


Figure 37: Système étudié

Si il n'y avait qu'une seule sphère, la force subie par celle-ci serait dirigée suivant \mathbf{z} par symétrie et conservation de l'impulsion. En effet, puisque le faisceau incident se propage suivant cette direction, il ne peut transmettre à la sphère qu'une quantité de mouvement orientée suivant son axe de propagation, c'est à dire l'axe Oz. On doit retrouver cette particularité si l'on considère le système entier: la somme des impulsions transmises aux deux sphères doit être dirigée suivant z par conservation de l'impulsion du faisceau incident. Par conséquent, les forces qui peuvent apparaitre sur une sphère, qui ne sont pas dirigées suivant $\hat{\mathbf{z}}$ et que nous appelerons forces radiales s'annulent 2 à 2. Soit F_y l'intensité de la force exercée sur la sphère 2 suivant la direction $\hat{\mathbf{y}}$. Alors, dans cette même direction, la sphère 1 subit la force $-F_y$. En fait, la seule force radiale présente sur la sphère 2 est suivant la direction $\hat{\mathbf{y}}$ définie par les deux sphères (ce résultat que l'on retrouve lors de l'application numérique s'explique par la symétrie

du problème). La sphère 2 ne sera par la suite déplacée que suivant la direction définie par le vecteur $\hat{\mathbf{y}}$. Pour des raisons de symétrie, nous n'étudierons son mouvement que sur le demi axe des y positifs, comme défini figure 37. Enfin, nous négligeons dans notre modélisation tous les autres types de forces.

Dans un premier temps, nous considérerons un champ électrique incident polarisé suivant la direction de séparation \hat{y} des deux sphères.

La courbe représentée figure 38 indique la force F_y (mesurée en pN pour un faisceau incident d'irradiance 1 mW sur 1 μm^2) de la sphère 2 en fonction de la distance d/λ entre les deux sphères (si d=0, les deux sphères se touchent). Les sphères sont en verre $(n_s=1.45)$, et elles ont toutes les deux pour rayon 0.75λ (on se place dans le cas résonnant), λ est la longueur d'onde dans le milieu extérieur du faisceau incident égale à $0.8~\mu m$ (soit une longueur d'onde dans le vide de $1.064~\mu m$).

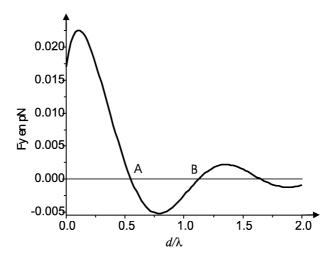


Figure 38: Force induite en fonction de la distance de séparation (de direction y) de deux sphères de rayon 0.75λ dans le cas d'une onde incidente polarisé suivant y.

La sphère 2 présente de nombreuses positions d'équilibre qui sont de 2 types: stables où instables. Bien sûr, c'est surtout les équilibres stables qui nous intéressent. En B, la force est négative puis positive: c'est un équilibre instable. En effet, imaginons que la sphère 2 soit en B ($d \approx 1.125\lambda$). Si on la déplace légérement dans le sens des d positifs (la distance entre les deux sphères augmente), F_y est elle aussi positive: la sphère s'éloigne donc de la position B et finit par sortir de sa position d'équilibre. Si on déplace légérement la sphère 2 dans le sens des d négatifs à partir de la position B, F_y est négative: la sphère 2 s'éloigne à nouveau de sa position d'équilibre. Une autre façon d'aborder le problème est de constater que la force dérive d'un potentiel V suivant la formule:

$$F_y = -(\mathbf{grad}V) \cdot \widehat{\mathbf{y}}$$

Un équilibre stable correspond à un puits de potentiel. Or, il est évident que B correspond à un potentiel local maximal d'après l'opposée de la dérivée du potentiel, qui est F_y . Contrairement au point A ($d \approx 0.5\lambda$) qui lui correspond à un puits de potentiel: c'est donc une position d'équilibre pour la sphère 2. Qu'en est il pour la sphère 1? En fait, grâce à la conservation de la quantité de mouvement de l'onde incidente évoquée plus haut, un équilibre stable de la sphère 2 correspond également à un équilibre stable de la sphère 1.

En effet, imaginons que la sphère 2 soit en A. Elle est ainsi en équilibre stable Puisque la sphère 2 ne subit aucune force radiale; il doit donc en être de même pour la sphère 1 (sinon, la somme des impulsions des deux sphères ne serait plus orientée suivant $\hat{\mathbf{z}}$). Par conséquent, la sphère 1 est elle aussi en équilibre. Si c'est un équilibre instable, un petit déplacement de la sphère 1 la ferait sortir de sa position d'équilibre, alors que la sphère 2 elle, resterait en A. Des forces radiales apparaitraient sur la sphère 1, mais pas sur la sphère 2, toujours en équilibre. Cela est impossible à cause de la conservation de la quantité de mouvement; on en déduit donc qu'un équilibre stable de la sphère 2 correspond à un équilibre stable de la sphère 1. Nous parlerons par la suite de distance d'équilibre, pour désigner la valeur de d telle que les

deux sphères soient en équilibre stable. Cette distance est une valeur absolue, indépendante de l'origine prise au centre de la sphère 1, puisque le système est invariant en translation.

Lorsque les deux sphères se touchent, la force radiale agissant sur la sphère 2 est positive; celle sur la sphère 1 est ainsi négative: les deux sphères s'éloignent donc automatiquement l'une de l'autre suivant la direction déterminée par leurs deux centres: elles vont automatiquement vers leurs positions d'équilibre.

La figure 39 indique la valeur absolue du rapport entre la force radiale F_y et la force axiale F_z (rappelons que nous avons éliminé la possibilité de laisser les sphères se déplacer suivant $\hat{\mathbf{z}}$). Tous les paramètres physiques du problème sont les mêmes que pour la figure 38. On se rend alors compte que les forces induites sont relativement élevées, égales à 11.5% de la force axiale lorsque les deux sphères sont distantes d'environ 0.1λ . C'est la proportion de quantité de mouvement otée à la pression de radiation (F_z) par le système à deux sphères et convertie en forces induites.

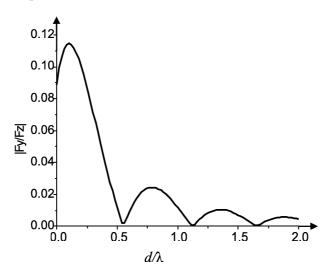


Figure 39: Taux de conversion de pression de radiation en force induite pour un système de deux sphères de rayons 0.75λ en fonction de la distance de séparation entre les deux sphères. L'onde incidente est polarisé suivant la direction de séparation y.

Nous avons également étudié l'effet du rayon des sphères sur les forces induites. Notre analyse s'est limitée au cas où les deux sphères ont le même rayon. Seul ce rayon a été changé, tous les autres paramètres du problème restent les mêmes. La figure 40 présente deux cas extrèmes: la courbe 40(a) représente la force appliquée à la sphère 2 en fonction de la distance entre les deux sphères, celles ci ayant un rayon de 1.5λ . Sur la courbe 40(b), les sphères ont un rayon de $\lambda/4$.

Sur la courbe 40(a), on se rend compte que la réponse du système de deux sphères ayant des rayons de 1.5λ est qualitativement la même que celle de deux sphères ayant pour rayons 0.75λ : partant de sphères collées, les forces induites les séparent pour les amener en une position d'équilibre stable (point A) qui précède une position d'équilibre instable (point B). La distance d'équilibre est à nouveau d'environ $\lambda/2$. Notre étude à deux sphères, faisant varier le rayon entre 0.75λ et 1.5λ tend à généraliser ce résultat: la distance d'équilibre est de $\lambda/2$. Bien sûr, la sphère 2 n'est pas forcément piégée en A, puisqu'elle peut "passer" par ce point si elle atteint une vitesse suffisante pour la faire sortir de ce piège.

Sur la courbe 40(b), le point A n'existe plus, et le premier équilibre que l'on rencontre en parcourant l'axe des d positifs est un équilibre instable (point B). La sphère connaissant une succession d'équilibres stables et instables, on remarque l'existence d'un équilibre stable en C; de plus, lorsque les deux sphères se touchent, la force radiale de la sphère 2 est négative: elles restent collées l'une à l'autre pour former un agrégat. En fait, les rayons avec lesquels on travaille ($\lambda/4$) sont tels que l'on est proche du cas dipolaire: les forces induites dues aux termes multipolaires sont alors négligeables. Ce dernier résultat est important car non seulement, comme on pouvait s'y attendre, il démontre la prépondérance des termes multipolaires dans l'expression des forces induites dans le cas résonnant, mais aussi il prouve l'avantage de travailler avec des sphères de dimensions caractéristiques de l'ordre de la longueur d'onde: une simple onde plane permet de les séparer l'une de l'autre.

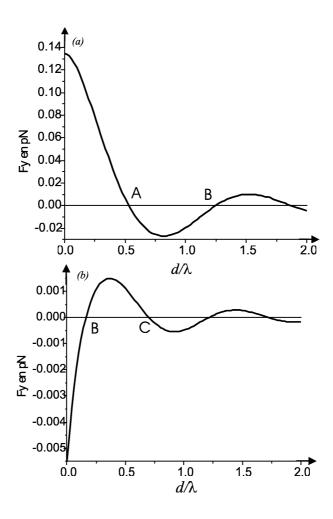


Figure 40: Variation de la force induite en fonction du rayon des sphères pour une onde incidente polarisée suivant la direction de propagation y: (a) $R=1.5\lambda$ (b) $R=0.25\lambda$.

Nous nous sommes également intéressés à ce qu'il se passait si l'on changeait l'indice des sphères, par exemple si les sphères en verre étaient remplacées par des sphères en latex (indice optique 1.59). L'étude faite ci dessus se généralise alors: plusieurs points d'équilibre, dont un équilibre stable et une distance d'équilibre qui, reste de l'ordre de $\lambda/2$ sur un large éventail de rayons situés dans le cas résonnant. Par contre, les intensités des forces induites changent, et lorsque l'indice de la sphère est plus élevé, elles augmentent. Le milieu extérieur restant le même dans les deux cas, on en déduit qu'un contraste d'indice optique sphère/milieu extérieur plus élevé augmente les forces induites.

Pourquoi une distance d'équilibre de $\lambda/2$? Intuitivement, on peut expliquer ce résultat par le fait que les 2 sphères rayonnent des ondes de longueur d'onde λ . Deux approximations sont nécessaires: d'une part, on suppose que le champ diffusé est prépondérant, ce qui est vrai près des sphères; d'autre part, on suppose que le champ diffusé est émis de la surface des sphères. Suivant la direction y s'établit donc, en plus de l'onde incidente, la somme de deux ondes contrepropagatives qui peuvent interférer constructivement lorsque les sphères sont séparés de $d = (2n+1)\lambda/2$, et destructivement lorsque $d = n\lambda$. Sur la figure 41, nous avons tracé les 3 cas possibles.

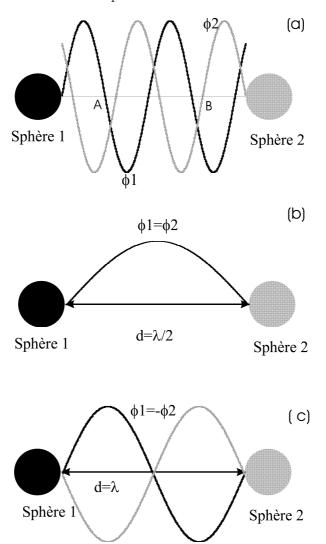


Figure 41: Explication intuitive de la distance d'équilibre $d=\lambda/2$: (a) Les 2 sphères sont séparées d'une distance d quelconque. (b) Les deux sphères sont séparées de $d=\lambda/2$: les deux phases $\phi 1$ et $\phi 2$ sont en interférences constructives. (c) Les deux sphères sont séparées de $d=\lambda$: les deux phases sont en interférences destructives.

(a) d est quelconque. Le point A est situé à une distance de $\lambda/2$ de la sphère 1, le point B à une distance de $\lambda/2$ de la sphère 2. L'onde rayonnée par la sphère 1 à une phase ϕ 1, celle par la sphère 2 une phase ϕ 2. Sur la figure 41(b), les 2 sphères sont éloignées de $d = \lambda/2$; les phases de leurs ondes

diffusées se superposent: les ondes interfèrent donc constructivement. Cette configuration correspond du point de vue des champs rayonnées à un maximum d'énergie. Sur la figure 41(c) enfin, les 2 sphères sont éloignées de $d=\lambda$; les phases de leurs ondes diffusées sont opposées, et interfèrent destructivement. Cette configuration correspond du point de vue des champs rayonnées à un minimum d'énergie. L'équilibre est stable pour un maximum d'énergie, d'où la distance d'équilibre de $\lambda/2$. Cette approximation n'est vraie que si le champ diffusé est suffisament important par rapport au champ incident dans des zones proches de la sphères. L'amplitude du champ diffusé augmente avec la taille des sphères, ce qui explique le fait que la distance d'équilibre tende vers $\lambda/2$ lorsque les sphères grossissent. De plus, on peut également expliquer la décroissance de l'amplitude de la force optique en fonction de la distance entre les sphères en utilisant le fait que les ondes rayonnées sont sphériques. Cette décroissance de l'amplitude des forces induites est ainsi en $1/r^2$, comme on peut le voir figure 38.

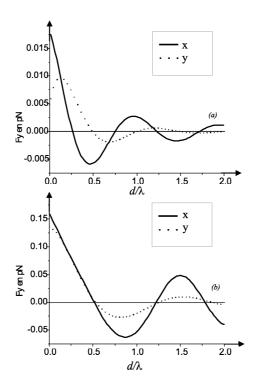


Figure 42: Effet de la polarisation sur les forces induites dans un système de deux sphères séparées suivant y(a) $R = 0.5\lambda(b)$ $R = 1.5\lambda$.

Pour finir, nous avons indiqué sur la figure 43 l'effet de la polarisation. Pour ce, nous nous proposons de comparer l'intensité de la force induite F_y sur la sphère 2 (sphère que nous déplaçons, tandis que la sphère 1 est fixe et a son centre confondu avec l'origine du repère) lorsque la polarisation est suivant $\hat{\mathbf{y}}$ (c'est à dire parallèle à la direction formée par les deux centres des sphères, cas 1, ou suivant $\hat{\mathbf{x}}$ (perpendiculaire à la direction formée par les deux centres, cas 2.

Nous avons donc déja étudié le cas 1, et allons le comparer au cas 2. Les rayons des sphères sont égaux à $\lambda/2$ (figure 43 a) et 1.5λ (figure 43 b), dans les deux cas les sphères en verre (indice optique 1.45) baignent dans de l'eau (indice optique 1.33), et l'on néglige tous les types de frottements. Comme pour le cas 1), on voit qu'un faisceau incident polarisé dans le cas 2 (c'est à dire perpendiculairement à la distance de séparation des sphères) peut séparer un agrégat de deux sphères, puisque F_y est positive en 0, c'est à dire quand les sphères se touchent pour les deux rayons étudiés. Une autre similitude avec le cas 1 est que le premier équilibre rencontré est un équilibre stable. La position de cet équilibre est la même pour les deux polarisations dans le second exemple (figure 43 b) du fait de l'importance de la contribution des termes multipolaires à F_y . Par contre, ceci n'est pas vrai sur la courbe 43 a: la contribution du terme dipolaire aux forces induites amène une distinction des distances d'équilibre entre les différentes polarisations du champ incident. Une autre différence notable entre les deux polarisations que nous comparons apparait lorsque l'on s'intéresse aux extrémums des forces induites: en effet, la force

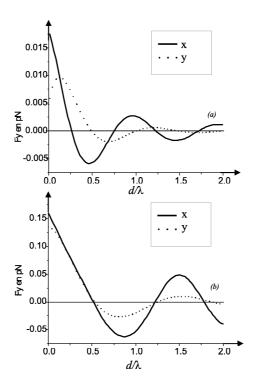


Figure 43: Effet de la polarisation sur les forces induites dans un système de deux sphères séparées suivant y(a) $R = 0.5\lambda(b)$ $R = 1.5\lambda$.

induite dans le cas 2 (polarisation perpendiculaire à la distance de séparation) présente des maximums beaucoup plus élevés que ceux relatifs au cas 1 (polarisation parallèle à la distance de séparation).

Pour expliquer ces résultats, considérons un dipôle électrique. Si il est soumis à une onde plane se propageant dans une direction $\hat{\mathbf{z}}$ et polarisée suivant $\hat{\mathbf{y}}$, il rayonnera principalement dans le plan perpendiculaire à $\hat{\mathbf{y}}$, c'est à dire (Oxz). Si l'onde incidente est polarisée suivant $\hat{\mathbf{x}}$, ce plan devient (Oyz). Ainsi, pour un système à deux sphères petites, lorsque l'onde est polarisée suivant la direction de séparation des 2 sphères (cas 1), le rayonnement diffusé est le plus intense dans le plan perpendiculaire à cette direction de séparation. Si la polarisation est perpendiculaire à la direction de séparation (cas 2), le rayonnement diffusé est plus intense dans un plan contenant la direction de séparation. Par conséquent, le champ diffusé dans la direction de séparation est plus intense dans le cas 2 que dans le cas 1. Les forces induites sont donc plus intenses dans le cas 2, ce que l'on retrouve numériquement pour des petites sphères $(43\ a)$.

3.4.2 Sphères soumises à une onde stationnaire

Etudions à présent le cas de 2 sphères soumises à une onde stationnaire constituée de 2 ondes planes de longueur d'onde 0.532nm contre propagatives. L'axe Oz est l'axe de propagation de ces 2 ondes. Le champ excitateur \mathbf{E}_e est défini par:

$$\mathbf{E}_{e}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2} \left(e^{i(kz - \omega t)} + e^{i(-kz - \omega t)} \right) \widehat{\mathbf{y}} = \cos(kz) e^{-i\omega t} \widehat{\mathbf{y}}$$
$$\left| \mathbf{E}_{e}(\mathbf{r}) \right|^{2} = (\cos(kz))^{2} = \frac{\cos(2kz) + 1}{2}$$

et le système que nous allons étudier, représenté figure 44, est composé de deux sphères identiques en verre (indice 1.46) dans de l'eau (indice 1.33). Dans un premier temps, les 2 sphères garderont leurs centres sur l'axe (Oz), O étant une origine arbitraire, elles seront séparées d'une distance d (elles se touchent si d=0).

La longueur d'onde du faisceau incident dans le vide est de 532nm, soit 400nm dans le milieu incident. On se place dans le cas résonnant en prenant des sphères dont les rayons sont égaux à 100nm, soit $\lambda/4$.

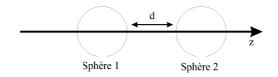


Figure 44: Système à 2 sphères soumis à une onde stationnaire se propageant suivant (Oz).

L'une des deux sphères restera fixe, et nous ferons bouger l'autre afin d'étudier la variation de la force optique que subira cette sphère. La force sera dirigée uniquement suivant z pour des raisons de symétrie. Sur la figure 45 est tracée la force optique axiale (c'est à dire dirigée suivant Oz) que subit la sphère 2 en fonction du rapport entre la distance d des 2 sphères et la longueur d'onde dans le milieu incident de l'onde stationnaire. La force est périodique, de période λ , son amplitude est variable de l'ordre de $10^{-4}pN$

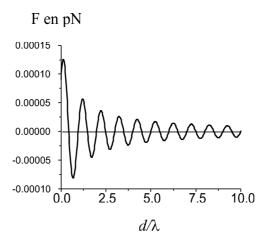


Figure 45: Force axiale pour des sphères de rayon $\lambda/4$.

pour un faisceau incident de densité de puissance $1mW/\mu m^2$. Son amplitude est maximale lorsque les 2 sphères sont proches, puis décroit jusqu'à devenir constante pour $d \approx 7\lambda$: la force optique axiale appliquée à la sphère 2 est alors, lorsque les sphères sont éloignées, une sinusoïde d'amplitude constante. Puisque la force est positive pour d=0, on se rend compte qu'à nouveau les forces induites vont séparer les 2 sphères.

Sur la figure 46 est représenté le potentiel dont dérive cette force.

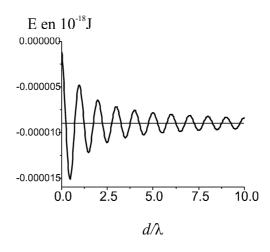


Figure 46: Potentiel axial pour des sphères de rayon $\lambda/4$.

Le potentiel est défini à une constante additive près, que l'on as prise égale à 0 lorsque les sphères se touchent (la courbe 46 ne part pas tout à fait de d = 0). Puisqu'il décroît à l'origine, on en déduit

que les sphères se séparent, comme l'étude de la force l'indiquait. Le potentiel est lui aussi, sinusoïdal, de période λ . La sphère 2 se piègera dans un puit de potentiel. Le puit le plus profond est obtenu pour $d \approx \lambda/2$. On peut avancer la même explication concernant cette valeur de $\lambda/2$ que celle donnée dans la partie précédente: les 2 ondes rayonnées par les 2 sphères interfèrent constructivement pour une telle distance.

Lorsque les 2 sphères sont suffisament éloignées, le système n'est plus un système de sphères liées; c'est pourquoi on observe cette force sinusoïdale à amplitude constante (figure 45, pour $d > 7\lambda$). Notre expérience numérique est basée sur le fait que l'on laisse une sphère immobile, et que l'on fait varier sur l'axe une sphère mobile. L'onde incidente, stationnaire, crée un ensemble de noeuds et de ventres sur l'axe z, son axe de propagation. On retrouve la courbe 45 pour un système ayant sa sphère immobile sur un noeud où sur un ventre: les forces induites sont par conséquent indépendantes de la position de la sphère 1 sur l'axe Oz. On peut postuler que les ondes diffusées par les 2 sphères sont indépendantes de la position de la sphère 1; elles sont donc prépondérantes dans l'induction des forces optiques.

Enfin, nous avons placé les 2 sphères en équilibre, c'est à dire avec $d = \lambda/2$. Puis nous avons déplacé perpendiculairement à l'axe z la sphère 2; sur la figure 47, nous avons tracé la force radiale subie par la sphère 2 lorsqu'elle bouge perpendiculairement à l'axe optique du faisceau incident.

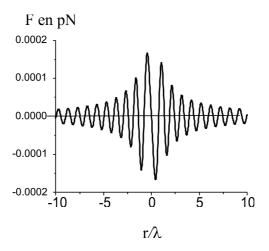


Figure 47: Force radiale pour des sphères de rayon $\lambda/4$.

La force radiale est sinusoïdale, à amplitude variable toujours de l'ordre de $10^{-4}pN$ pour un faisceau incident de densité de puissance $1mW/\mu m^2$, et de période spatiale λ . L'amplitude de la force optique est maximale proche de l'origine, le point r=0 étant un équilibre stable. Plus on s'éloigne de l'origine et plus l'amplitude diminue pour atteindre une valeur constante pour $r>8\lambda$. Même si cette courbe contient plusieurs points d'équilibre stable, on se rend compte que l'équilibre le plus stable est en r=0. En effet, en ce point, la sphère 2 est sur l'axe z. La direction que forment alors les deux centres des sphères est orientée suivant z, direction de propagation des faisceaux incidents. Le système tend donc à aligner les centres des sphères sur la direction z. Pour $r>8\lambda$, l'amplitude constante de la force optique correspond à nouveau à un système de 2 sphères indépendantes.

3.5 Conclusion

Nous avons vu une technique permettant de calculer les champs électriques et magnétiques présents dans un système à plusieurs sphères. Cette technique est basée sur une méthode récursive, le cas à 1 sphère étant bien évidemment le début de notre récurrence. Elle permet par conséquent de contourner un traitement direct qui, en inversant la matrice (50), amène à des instabilités numériques. De plus, puisque les évaluations de champs sont données en fonction de leurs décompositions en vecteurs harmoniques sphériques, les coefficients ainsi obtenus nous permettent, par l'intermédiaire de la formule (38) de calculer les forces optiques. Enfin, nous avons montré que cette technique récursive donnait des résultats vérifiés par l'expérience.

Dans notre première étude à 2 sphères, nous avons pu observer l'apparition de forces induites. Nous avons pu également les évaluer, et constater qu'elles étaient en fait loin d'être négligeable puisqu'elles

pouvait représenter jusqu'à 10% de la part de la quantité de mouvement du faisceau incident convertie en forces optiques. Nous avons remarqué l'apparition de doublets stables; les forces induites deviennent alors des forces de liaison, premier pas vers l'étude de cristaux photoniques qui seraient maintenus en équilibre stable par les forces induites.

La principale difficulté lors du calcul de forces optiques dans un système à plusieurs sphère est l'encombrement mémoire. En effet, le code numérique est très éxigeant en octets, ce qui fait que le nombre de sphères que nous pouvons traiter est limité. La taille des sphères intervient; le calcul dans le cas résonnant demande par exemple beaucoup plus de taille mémoire que le calcul dans le cas dipolaire. Une étude dynamique devrait suivre ce travail. La prise en compte d'autres forces, telles les forces de frottement, n'est pas à négliger également dans le travail qui sera effectué par la suite. Dans le cadre de l'étude de miroirs constitués de matière optique, une connaissance complète du champs diffusé par un ensemble de sphères en équilibre stable devrait s'avérer forte utile, afin de pouvoir déterminer les caractéristiques de réflexion et de transmission de l'ensemble. Enfin, un calcul dynamique permettra de déterminer précisément les points de piégeage des sphères.

4 Sphères enrobées

4.1 Introduction

Nous allons à présent nous intéresser au cas de sphères enrobées. Par sphères enrobées, nous désignons des systèmes constitués de sphères diélectriques multicouches. La diffusion par de simples sphères diélectriques présente des propriétés physiques limitées par les caractéristiques électromagnétisques des matériaux employés. Grâce à des sphères multicouches, on peut imaginer possible l'amélioration de certaines de ces propriétés comme par exemple l'amélioration de la section efficace de piégeage σ_p . On peut aussi modéliser certaines cellules biologiques par des sphères enrobées, avec une membrane, qui serait une sphère d'un certain indice optique contenant une autre sphère d'un indice optique différent.

Nous avons à présent les moyens de calculer les forces exercées sur de telles sphères multicouches. En effet, nous avons vu comment calculer la force exercée sur une sphère en utilisant les coefficients de la décomposition sur une base d'harmoniques sphériques des champs électriques de l'onde excitatrice sur cette sphère et de l'onde diffusée par cette sphère. Les sections 4.2 et 4.3 présentent une méthode [40] pour calculer les matrices de transfert de sphères multicouches, élément indispensable afin d'obtenir le champ diffusé par le système multicouche. Nous commencerons par le système le plus simple, à deux sphères enrobées (section 4.2), pour ensuite traiter du cas général (section 4.3). Puis nous ferons des applications numériques dans la section.4.4 avec 2 sphères enrobées concentriques, et comparerons σ_p pour une sphère seule et une sphère enrobée.

4.2 Cas de 2 sphères

Le premier système que nous allons étudier est le système à 2 sphères représenté figure 48. L'origine est placée en un point quelconque de l'espace, et nous travaillons en coordonnées sphériques. Une sphère 2 dont le centre forme avec l'origine un vecteur \mathbf{x}_2 est contenue dans une sphère 1 centrée sur \mathbf{x}_1 . Le milieu extérieur aux deux sphères est indicé 0. On indice différentes variables avec 0,1 et 2 suivant le domaine de l'espace concerné: \mathbf{k}_1 est le vecteur d'onde dans le volume de la sphère 1 en dehors de la sphère 2 (milieu 1), R_2 est le rayon de la sphère 2, μ_0 est la perméabilité magnétique relative du milieu extérieur, ϵ_2 la permittivité électrique relative dans la sphère 2 (milieu 2),etc...Au milieu extérieur sera associé un repère \Re_0 centré sur l'origine, à la sphère 1 un repère \Re_1 centré en \mathbf{x}_1 et à la sphère 2 un repère \Re_2 centré en \mathbf{x}_2 . Ces différents repères trouveront leurs utilités par la suite.

Notre démarche sera analogue à celle utilisée dans la section 2.4 pour établir les expressions des matrices de transfert. Elle comprendra deux parties distinctes:

- 1) une première qui consistera à écrire dans chaque milieu les différents champs électriques présents.
- 2) une seconde où nous utiliserons les relations de continuité aux deux interfaces (0,1) (entre le milieu extérieur et la sphère 1) et (1,2) (entre les sphères 1 et 2).

Grâce à ces relations de continuité, nous pourrons relier les différents champs entre eux et ainsi obtenir les champs internes aux sphères et diffusés à partir de la donnée du champ incident et des caractéristiques diélectriques des deux sphères. Même si la seule relation qui nous intéresse réellement ici est celle entre le champ diffusé par la sphère 1 et le champ excitateur, nous donnerons une solution complète au problème en exprimant tous les champs électriques présents.

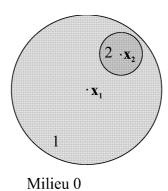


Figure 48: Système à deux sphères enrobées

4.2.1 Ecriture des différents champs présents

Afin d'obtenir les différents champs électriques qui sont présents, nous les décomposerons sur la base Ψ^t . Dans le milieu extérieur, les champs électriques présents seront au nombre de deux: le champ diffusé par la sphère 1 \mathbf{E}_{s0} et le champ excitateur \mathbf{E}_{e0} (c'est à dire le champ électrique qui existerait si les sphères étaient absentes). Leur somme est le champ électrique total dans le milieu extérieur \mathbf{E}_{0} .

$$\mathbf{E}_{e0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) \right\}.e_{0}$$

$$\mathbf{E}_{s0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) = E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}).f_{0}$$

$$\mathbf{E}_{0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) = \mathbf{E}_{e0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) + \mathbf{E}_{s0}(k_{0}\mathbf{r}_{1})$$

$$\mathbf{E}_{0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) \right\}.e_{0} + E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}).f_{0}$$

$$(65)$$

Comme nous avons déja eu l'occasion de voir, $\mathcal{R}g\{\}$ désigne le fait de prendre la partie régulière des vecteurs de base de Ψ^t et ainsi d'éliminer les termes qui divergent à l'origine. Le vecteur \mathbf{r}_1 relie le centre de la sphère 1 au point où notre développement est évalué. Les vecteurs colonnes e_0 et f_0 désignent les coefficients des décompositions des champs électriques excitateur et diffusés par la sphère 1. Ces deux développements sont faits dans \Re_1 .

Dans le milieu 1, nous avons à nouveau deux champs électriques: le champ excitateur sur la sphère 2, \mathbf{E}_{e1} , et le champ diffusé par la sphère 2, \mathbf{E}_{s1} :

$$\mathbf{E}_{e1}(k_{1}\mathbf{r}_{1}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{1}) \right\} .e_{1}$$

$$\mathbf{E}_{s1}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) = E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) .f_{1}$$

$$\mathbf{E}_{1} = \mathbf{E}_{ei} + \mathbf{E}_{si}$$

$$\mathbf{E}_{1}(k_{1}\mathbf{r}_{1}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{1}) \right\} .e_{1} + E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{1}) .J_{k_{1}}^{[1,2]} .f_{1}$$

$$\mathbf{E}_{1}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) \right\} .J_{k_{1}}^{[2,1]} .e_{1} + E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) .f_{1}$$

$$(66)$$

Le champ \mathbf{E}_{e1} est développé dans \Re_1 , tandis que \mathbf{E}_{s1} est développé dans \Re_2 . Les raisons de ces choix apparaitront clairement par la suite. Il faut donc utiliser des matrices de translation J permettant de passer d'un repère à l'autre si on veut avoir \mathbf{E}_1 exprimé dans un seul repère. La notation $J_{k_1}^{[1,2]}$ désigne la matrice de translation qui permet de passer du repère 2 au repère 1 (notation [1,2]) dans le milieu 1 (indexation par k_1). Dans le milieu 2, un seul champ électrique est présent: le champ interne à la sphère 2:

$$\mathbf{E}_{2}\left(k_{2}\mathbf{r}_{2}\right) = E\,\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{2}\mathbf{r}_{2}\right)\right\}.e_{2}\tag{67}$$

Notre première partie est terminée. En effet, avec les expressions (65), (66) et (67), nous disposons de toutes les expressions dont nous avons besoin.

4.2.2 Expression de la continuité tangentielle des champs

Nous allons à présent utiliser la continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur les différentes interfaces. A l'interface (0,1), nous avons:

$$\left[\mathbf{E}_{0}(k_{0}R_{1})\right]_{T} = \left[\mathbf{E}_{1}(k_{1}R_{1})\right]_{T}$$

$$\left[\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{0}R_{1}\right)\right\}.e_{0} + \mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{0}R_{1}\right).f_{0}\right]_{T} = \left[\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{1}R_{1}\right)\right\}.e_{1} + \mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{1}R_{1}\right).J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{T}$$

où $\{a\}_T$ désigne la composante tangentielle a_T du vecteur **a**. Comme nous l'avons déja vu dans la section 2.4, cette relation de continuité permet d'obtenir l'équation qui relie les coefficients des champs du milieu 0 à ceux des champs du milieu 1:

$$\begin{cases}
k_{1}\psi_{n}\left(k_{0}R_{1}\right)\left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}+k_{1}\xi_{n}\left(k_{0}R_{1}\right)\left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}=k_{0}\psi_{n}\left(k_{1}R_{1}\right)\left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}+k_{0}\xi_{n}\left(k_{1}R_{1}\right)\left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}\\
k_{1}\psi_{n}'\left(k_{0}R_{1}\right)\left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{N}}+k_{1}\xi_{n}'\left(k_{0}R_{1}\right)\left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{N}}=k_{0}\psi_{n}'\left(k_{1}R_{1}\right)\left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}}+k_{0}\xi_{n}'\left(k_{1}R_{1}\right)\left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}
\end{cases}$$
(68)

où $\psi_n(x)$ et $\xi_n(x)$ sont les fonctions de Ricatti Bessel définies par les relations $\psi_n(x) \equiv x j_n(x)$ et $\xi_n(x) \equiv x h_n(x)$. Le système ci-dessus est pour chaque couple (n,m) un système de deux équations à 6 inconnues: $[e_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[e_1]_{nm}^{\mathbf{N}}$, $[f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[f_1]_{nm}^{\mathbf{N}}$, $[f_0]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[f_0]_{nm}^{\mathbf{N}}$. En effet, nous rappelons que les coefficients $[e_0]_{nm}^{\mathbf{M}}$ et $[e_0]_{nm}^{\mathbf{N}}$ seront pris comme données initiales du problème, et nous chercherons à exprimer tous les autres coefficients en fonction de ces coefficients.

De même, la continuité de la composante tangentielle au niveau de l'interface (1, 2) nous amène les équations:

$$[\mathbf{E}_{1}(k_{1}R_{2})]_{T} = [\mathbf{E}_{2}(k_{2}R_{2})]_{T}$$

$$\left[\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{1}R_{2}\right)\right\} .J_{k_{1}}^{[2,1]}.e_{1} + \mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{1}R_{2}\right).f_{1}\right]_{T} = \left[\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{2}R_{2}\right).e_{2}\right]_{T}$$

$$\begin{cases} k_{2}\psi_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[J_{k_{1}}^{(2,1)}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{2}\xi_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = k_{1}\psi_{n}\left(k_{2}R_{2}\right)\left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ k_{2}\psi'_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[J_{k_{1}}^{(2,1)}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + k_{2}\xi'_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = k_{1}\psi'_{n}\left(k_{2}R_{2}\right)\left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} \end{cases}$$

$$(69)$$

Ces deux dernières équations comportent 6 inconnues: $[e_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[e_1]_{nm}^{\mathbf{N}}$, $[f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[e_2]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[e_2]_{nm}^{\mathbf{M}}$. Nous avons ainsi 4 équations à 8 inconnues. En faisant un travail similaire avec le champ magnétique, nous aurons 4 nouvelles équations pour les mêmes inconnues, ce qui nous fera en tout 8 équations et 8 inconnues. Nous pourrons ainsi exprimer les 8 inconnues en fonction de $[e_0]_{nm}^{\mathbf{M}}$ et $[e_0]_{nm}^{\mathbf{N}}$.

Pour ce, considérons la relation de Maxwell (26):

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

Cette relation est vraie dans les milieux 0,1 et 2. On en déduit donc que:

$$i\omega\mu_l\mu_{vac}\mathbf{H}_l(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{E}_l(\mathbf{r})$$
 (70)

avec l=0,1,2, μ_{vac} perméabilité magnétique du vide et ω la fréquence temporelle de l'onde excitatrice. En tenant compte du fait que les champs électriques dans les 3 milieux sont.

$$\mathbf{E}_{0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) \right\} .e_{0} + E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) .f_{0}$$

$$\mathbf{E}_{1}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) \right\} .J_{k_{1}}^{[2,1]} .e_{1} + E \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) .f_{1}$$

$$\mathbf{E}_{2}(k_{2}\mathbf{r}_{2}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{2}\mathbf{r}_{2}) \right\} .e_{2}$$

et que l'on a les relations sur les vecteurs de base:

$$\nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$$
$$\nabla \wedge \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

et ainsi par conséquent les expressions:

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{\Psi}^{t}(k_{l}\mathbf{r}).e_{l}\right) = \nabla \wedge \left(\left\{\mathbf{M}\left(k_{l}\mathbf{r}\right),\mathbf{N}\left(k_{l}\mathbf{r}\right)\right\}.\begin{bmatrix}e_{l}^{\mathbf{M}}\\e_{l}^{\mathbf{N}}\end{bmatrix}\right)$$
$$= \left\{k_{l}\mathbf{N}\left(k_{l}\mathbf{r}\right),k_{l}\mathbf{M}\left(k_{l}\mathbf{r}\right)\right\}.\begin{bmatrix}e_{l}^{\mathbf{M}}\\e_{l}^{\mathbf{N}}\end{bmatrix}$$
$$\nabla \wedge \left(\mathbf{\Psi}^{t}(k_{l}\mathbf{r}).e_{l}\right) = k_{l}\left(\mathbf{\Psi}^{t}(k_{l}\mathbf{r}).\begin{bmatrix}e_{l}^{\mathbf{N}}\\e_{l}^{\mathbf{M}}\end{bmatrix}\right)$$

on en déduit:

$$\begin{split} \mathbf{H}_{0}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) &= \frac{\nabla \wedge \mathbf{E}_{0}(k_{0}\mathbf{r}_{1})}{i\omega\mu_{0}\,\mu_{vac}} = \frac{Ek_{0}}{i\omega\mu_{0}\mu_{vac}} \left\{ \mathcal{R}g\left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) \right\} . \left[\begin{array}{c} e_{0}^{\mathbf{N}} \\ e_{0}^{\mathbf{M}} \end{array} \right] + \mathbf{\Psi}^{t}(k_{0}\mathbf{r}_{1}) . \left[\begin{array}{c} f_{0}^{\mathbf{N}} \\ f_{0}^{\mathbf{M}} \end{array} \right] \right\} \\ \mathbf{H}_{1}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) &= \frac{Ek_{1}}{i\omega\mu_{1}\mu_{vac}} \left\{ \mathcal{R}g\left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) \right\} . J_{k_{1}}^{[2,1]} . \left[\begin{array}{c} e_{1}^{\mathbf{N}} \\ e_{1}^{\mathbf{M}} \end{array} \right] + \mathbf{\Psi}^{t}(k_{1}\mathbf{r}_{2}) . \left[\begin{array}{c} f_{1}^{\mathbf{N}} \\ f_{1}^{\mathbf{M}} \end{array} \right] \right\} \\ \mathbf{H}_{2}(k_{2}\mathbf{r}_{2}) &= \frac{Ek_{2}}{i\omega\mu_{2}\mu_{vac}} \mathcal{R}g\left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{2}\mathbf{r}_{2}) \right\} . \left[\begin{array}{c} e_{2}^{\mathbf{N}} \\ e_{2}^{\mathbf{M}} \end{array} \right] \end{split}$$

et ainsi à partir des relations de continuités de la composante tangentielle de H:

$$[\mathbf{H}_0(k_0R_1)]_T = [\mathbf{H}_1(k_1R_1)]_T [\mathbf{H}_1(k_1R_2)]_T = [\mathbf{H}_2(k_2R_2)]_T$$

on obtient les 4 nouvelles équations recherchées:

$$\begin{cases}
\mu_{1}\psi'_{n}(k_{0}R_{1}) \left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{1}\xi'_{n}(k_{0}R_{1}) \left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = \mu_{0}\psi'_{n}(k_{1}R_{1}) \left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{0}\xi'_{n}(k_{1}R_{1}) \left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\
\mu_{1}\psi_{n}(k_{0}R_{1}) \left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{1}\xi_{n}(k_{0}R_{1}) \left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = \mu_{0}\psi_{n}(k_{1}R_{1}) \left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{0}\xi_{n}(k_{1}R_{1}) \left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\
\left\{\mu_{2}\psi'_{n}(k_{1}R_{2}) \left[J_{k_{1}}^{[2,1]}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{2}\xi'_{n}(k_{1}R_{2}) \left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = \mu_{1}\psi'_{n}(k_{2}R_{2}) \left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\
\mu_{2}\psi_{n}(k_{1}R_{2}) \left[J_{k_{1}}^{[2,1]}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{2}\xi_{n}(k_{1}R_{2}) \left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = \mu_{1}\psi_{n}(k_{2}R_{2}) \left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{N}}
\end{cases}$$
(71)

Pour relier e_0 et f_0 , nous allons procéder en 3 étapes:

- a) exprimer f_0 en fonction de e_0 et f_1 : nous aurons une première expression matricielle de la forme $f_0 = f(e_0, f_1)$
 - b) exprimer f_1 en fonction de e_1 : nous aurons une seconde expression matricielle de la forme $f_1 = g(e_1)$
- c) exprimer e_1 en fonction de e_0 et f_0 : nous aurons une troisième expression matricielle de la forme $e_1 = h(e_0, f_0)$

Grace à ces trois relations, nous aurons finalement:

$$f_0 = f(e_0, g(h(e_0, f_0)))$$

qui nous permettra d'exprimer f_0 en fonction de e_0 .

Etape a: recherche de $f_0 = f(e_0, f_1)$

Nous allons utiliser les 8 équations (68), (69) et (71) afin de déterminer la matrice de transfert \mathcal{T}_{10} qui permet de relier e_0 à f_0 par analogie à la matrice de transfert d'une seule sphère: $f_0 = \mathcal{T}_{10}.e_0$. Si la sphère 2 n'existait pas, c'est à dire si la sphère 2 avait la même permittivité électrique relative et la même perméabilité magnétique relative que la sphère 1, on aurait bien évidemment $\mathcal{T}_{10} = \mathcal{T}_1^{(1)}$, où $\mathcal{T}_1^{(1)}$ est la matrice de transfert que nous avons défini en (23) et (24) dans la section 2.4. Utilisons dans un premier temps les deux équations:

$$\mu_{1}\psi_{n}'(k_{0}R_{1})\left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{1}\xi_{n}'(k_{0}R_{1})\left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = \mu_{0}\psi_{n}'(k_{1}R_{1})\left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{0}\xi_{n}'(k_{1}R_{1})\left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}$$

$$k_{1}\psi_{n}(k_{0}R_{1})\left[e_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{1}\xi_{n}(k_{0}R_{1})\left[f_{0}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = k_{0}\psi_{n}(k_{1}R_{1})\left[e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{0}\xi_{n}(k_{1}R_{1})\left[J_{k_{1}}^{[1,2]}.f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}$$

$$(72)$$

Eliminons le terme $[e_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$; nous obtenons une simple équation que nous pouvons mettre sous la forme:

$$[f_0]_{nm}^{\mathbf{M}} = [T_{10}]_n^{\mathbf{M}} [e_0]_{nm}^{\mathbf{M}} + [Q_{01}]_n^{\mathbf{M}} [J_{k_1}^{[1,2]}.f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$$

et que nous pouvons généraliser aux coefficients sur ${f N}$:

$$[f_0]_{nm}^{\mathbf{A}} = [T_{10}]_n^{\mathbf{A}} [e_0]_{nm}^{\mathbf{A}} + [Q_{01}]_n^{\mathbf{A}} \left[J_{k_1}^{[1,2]} . f_1 \right]_{nm}^{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$$
 (73)

Les expressions des différentes matrices intervenant dans la formule (73) sont obtenues en résolvant le système d'équations (72).

Nous avons par exemple pour les matrices $[T_{10}]_n^{\mathbf{A}}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$) les formules prises avec l = 0:

$$[T_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{M}} = \frac{\psi_{n} (k_{l}R_{l+1})}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1})} \times \frac{\frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Phi_{n} (k_{l}R_{l+1}) - \rho_{l+1,l} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})}{\rho_{l+1,l} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1}) - \frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Psi_{n} (k_{l}R_{l+1})}$$

$$\equiv \frac{\psi_{n} (k_{l}R_{l+1})}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1})} \times \left[\widetilde{T}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{M}}$$

$$[T_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{N}} = \frac{\psi_{n} (k_{l}R_{l+1})}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1})} \times \frac{\frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1}) - \rho_{l+1,l} \Phi_{n} (k_{l}R_{l+1})}{\rho_{l+1,l} \Psi_{n} (k_{l}R_{l+1}) - \frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})}$$

$$\equiv \frac{\psi_{n} (k_{l}R_{l+1})}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1})} \times \left[\widetilde{T}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{N}}$$

$$(74)$$

Si nous donnons l'expression générale (74), c'est tout simplement parce que nous aurons besoin de cette expression pour des valeurs différentes de l dans la section suivante. Mais revenons à notre système de deux sphères enrobées. Les fonctions Φ_n et Ψ_n sont les dérivées logarithmiques des fonctions de Riccati-Bessel, préférables pour l'étude numérique |41, 42, 43, 44, 45, 46|:

$$\Phi_{n}\left(kr\right) \equiv \frac{d}{d\left(kr\right)} \ln \psi_{n}\left(kr\right) = \frac{\psi_{n}'\left(kr\right)}{\psi_{n}\left(kr\right)}, \qquad \Psi_{n}\left(kr\right) \equiv \frac{d}{d\left(kr\right)} \ln \xi_{n}\left(kr\right) = \frac{\xi_{n}'\left(kr\right)}{\xi_{n}\left(kr\right)}$$

L'autre matrice qui intervient dans la formule (73) est la matrice $[Q_{01}]_n^{\mathbf{A}}$, ($\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$). Elle est donnée par la formule ci dessous, prise pour l = 0:

$$[Q_{l,l+1}]_{n}^{\mathbf{M}} = \frac{1}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1}) \psi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})} \frac{i}{\frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Psi_{n} (k_{l}R_{l+1}) - \rho_{l+1,l} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})}$$

$$= \frac{1}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1}) \psi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})} \left[\widetilde{Q}_{l,l+1} \right]_{n}^{\mathbf{M}}$$

$$[Q_{l,l+1}]_{n}^{\mathbf{N}} = \frac{1}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1}) \psi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})} \frac{i}{\rho_{l+1,l} \Psi_{n} (k_{l}R_{l+1}) - \frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Phi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})}$$

$$\equiv \frac{1}{\xi_{n} (k_{l}R_{l+1}) \psi_{n} (k_{l+1}R_{l+1})} \left[\widetilde{Q}_{l,l+1} \right]_{n}^{\mathbf{N}}$$

$$(75)$$

Nous pouvons alors mettre la relation (73) sous une forme matricielle, en remarquant que la matrice T_{10} (dont les éléments de base sont donnés par (74)) et la matrice Q_{10} (explicitée par la relation (75)) sont en fait de par l'expression de leurs composantes des matrices diagonales de la forme:

$$O = \left[\begin{array}{cc} O^{\mathbf{MM}} & O^{\mathbf{MN}} \\ O^{\mathbf{NM}} & O^{\mathbf{NN}} \end{array} \right]$$

avec

$$[O]_{nm,\nu\mu}^{\mathbf{AB}} = \delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \, \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \, [O]_{n}^{\mathbf{A}} \tag{76}$$

et $[O]_n^{\mathbf{A}}$ pouvant être $[T_{l+1,l}]_n^{\mathbf{A}}$ où $[Q_{l+1,l}]_n^{\mathbf{A}}$ suivant la matrice explicitée. La relation (72) s'écrit ainsi plus simplement sous forme matricielle:

$$f_0 = T_{10}.e_0 + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.f_1 (77)$$

Pour obtenir f_0 en fonction de e_0 , il ne nous reste plus qu'à éliminer f_1 . Nous le ferons en deux temps. Nous relierons f_1 à e_1 , puis e_1 à e_0 et f_0 .

Etape b: recherche de $f_1 = g(e_1)$

Considérons les équations déja établies:

$$k_{2}\psi_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[J_{k_{1}}^{(2,1)}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}+k_{2}\xi_{n}\left(k_{1}R_{2}\right)\left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}=k_{1}\psi_{n}\left(k_{2}R_{2}\right)\left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}$$
$$\mu_{2}\psi_{n}'\left(k_{1}R_{2}\right)\left[J_{k_{1}}^{[2,1]}.e_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}+\mu_{2}\xi_{n}'\left(k_{1}R_{2}\right)\left[f_{1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}=\mu_{1}\psi_{n}'\left(k_{2}R_{2}\right)\left[e_{2}\right]_{nm}^{\mathbf{M}}$$

C'est un système de deux équations à trois inconnues: $[e_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$, $[f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$ et $[e_2]_{nm}^{\mathbf{M}}$. Eliminons les termes $[e_2]_{nm}^{\mathbf{M}}$; nous aurons ainsi une équation reliant $[e_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$ et $[f_1]_{nm}^{\mathbf{M}}$. Si l'on fait le même travail sur les coefficients des vecteurs \mathbf{N} , on obtient une nouvelle relation matricielle entre f_1 et e_1 :

$$f_1 = T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.e_1 (78)$$

où l'on retrouve la matrice T_{21} définie par la formule (74).

Etape c: recherche de $e_1 = h(f_0, e_0)$

Si de plus on considère à nouveau les relations (72), on peut cette fois ci éliminer tout ce qui concerne f_1 et en déduire une relation du type:

$$e_1 = V_{10}.e_0 + U_{10}.f_0 (79)$$

où les matrices V_{10} et U_{10} sont de terme général:

$$\begin{split} [V_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{M}} &= i\psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left(\frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Phi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) - \rho_{l+1,l} \Psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right)\right) \\ &= \psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[\widetilde{V}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{M}} \\ [V_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{N}} &= i\psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left(\rho_{l+1,l}\Phi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) - \frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right)\right) \\ &= \psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[\widetilde{V}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{N}} \\ [U_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{M}} &= i\xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left(\frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) - \rho_{l+1,l} \Psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right)\right) \\ &= \xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[\widetilde{U}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{M}} \\ [U_{l+1,l}]_{n}^{\mathbf{N}} &= i\xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left(\rho_{l+1,l} \Psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) - \frac{\mu_{l+1}}{\mu_{l}} \Psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right)\right) \\ &= \xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[\widetilde{U}_{l+1,l}\right]_{n}^{\mathbf{N}} \end{split}$$

En utilisant alors (77), (79) et (78), on obtient finalement la relation recherchée. En effet, ces relations sont:

$$f_0 = T_{10}.e_0 + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.f_1$$

$$f_1 = T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.e_1$$

$$e_1 = V_{10}.e_0 + U_{10}.f_0$$

Ainsi, nous avons:

$$f_0 = T_{10}.e_0 + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.f_1$$

$$= T_{10}.e_0 + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.e_1$$

$$f_0 = T_{10}.e_0 + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.(V_{10}.e_0 + U_{10}.f_0)$$

soit:

$$f_0\left(I - Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.U_{10}\right) = \left(T_{10} + Q_{01}.J_{k_1}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_1}^{[2,1]}.V_{10}\right).e_0$$

et finalement

$$f_{0} = \left[\frac{T_{10} + Q_{01}.J_{k_{1}}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_{1}}^{[2,1]}.V_{10}}{I - Q_{01}.J_{k_{1}}^{[1,2]}.T_{21}.J_{k_{1}}^{[2,1]}.U_{10}} \right].e_{0}$$

$$\equiv \mathcal{T}_{10}.e_{0}. \tag{80}$$

On remarque de plus que les trois relations (77), (79) et (78) nous permettent d'obtenir e_1 et f_1 en fonction de e_0 . Il ne nous reste plus que e_2 à déterminer en fonction de e_0 , et l'ensemble des champs électriques se trouveront exprimés ainsi en fonction du champ excitateur. Ceci se fait très simplement par la relation de Mie, puisque l'on a:

$$J_{k_1}^{[1,2]}.f_1 = T_1^{(2)}.e_2$$

où $T_1^{(2)}$ est la matrice de Mie diagonale de la sphère 2 définie par les relations (23) et (24) dans la section 2.4.1. On a en conclusion:

$$e_2 = \left(T_1^{(2)}\right)^{-1} .J_{k_1}^{[1,2]}.f_1$$

Tous les champs électriques sont bel et bien exprimés en fonction du champ électrique de l'onde excitatrice. La matrice de transfert \mathcal{T}_{10} est bien la matrice dont nous aurons besoin pour exprimer la force exercée par l'onde incidente sur les deux sphères enrobées uniquement en fonction de e_0 , et ce grâce à la formule (43):

$$F_z = -\frac{\epsilon_{vac}\epsilon_0 E^2}{2k_0^2} \operatorname{Re}\left\{ (e_0)^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot f_0 \right\} - \frac{\epsilon_{vac}\epsilon_0 E^2}{2k_0^2} \left(f_0 \right)^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot f_0$$

$$F_z = -\frac{\epsilon_{vac}\epsilon_0 E^2}{2k_0^2} \operatorname{Re}\left\{ (e_0)^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot \mathcal{T}_{10} \cdot e_0 \right\} - \frac{\epsilon_{vac}\epsilon_0 E^2}{2k_0^2} \left(\mathcal{T}_{10} \cdot e_0 \right)^{\dagger} \cdot \Upsilon \cdot \mathcal{T}_{10} \cdot e_0$$

formule où le symbole [†] désigne le transposé conjugué. Nous pouvons donc calculer la force exercée par une onde lumineuse sur une un système de deux sphères enrobées. Généralisons notre résultat à un système de sphères enrobées au nombre arbitraire.

4.3 Cas à plusieurs sphères

Passons à présent à plusieurs sphères. Le système que nous allons étudier est représenté figure 49.

Il est constitué de N sphères imbriquées à la manière de poupées russes. Le centre de la sphère l forme avec l'origine un vecteur \mathbf{x}_l . A chaque sphère l est associé un milieu l, et les paramètres du problème qui vont avec: permittivité électrique relative ϵ_l , perméabilité magnétique relative μ_l , rayon de la sphère R_l , champ électrique \mathbf{E}_l ,.... Ce que nous voulons, c'est exprimer le champ diffusé en fonction du champ excitateur, afin de pouvoir appliquer la formule (43). Nous donnerons à nouveau une solution complète du problème, en exprimant tous les champs présents en fonction du champ excitateur \mathbf{E}_0 . La démarche sera analogue à celle utilisée dans le cas à 2 sphères, on exprime les champs électriques \mathbf{E}_l présents dans chaque milieu l, puis on utilise les relations de continuité tangentielle à la surface des sphères. C'est pourquoi nous irons un peu plus vite dans cette partie.

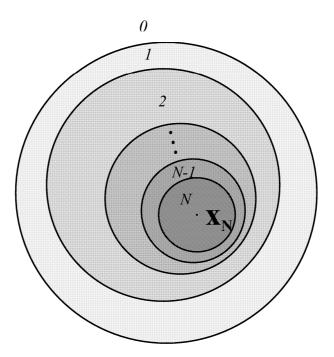


Figure 49: Système à N sphères enrobées

4.3.1 Expression du champ électrique présent dans le milieu l

Pour l variant entre 0 et N-1, le champ électrique total \mathbf{E}_l dans le milieu l est la somme du champ diffusé par la sphère l+1, $\mathbf{E}_{s,l}$, et le champ excitateur sur la sphère l+1 $\mathbf{E}_{e,l}$:

$$\begin{split} \mathbf{E}_{e,l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right) &= E\,\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right)\right\}.e_{l} \\ \mathbf{E}_{s,l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l+1}\right) &= E\,\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l+1}\right).f_{l} \\ \mathbf{E}_{l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right) &= \mathbf{E}_{e,l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right) + \mathbf{E}_{s,l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l+1}\right) \\ \mathbf{E}_{l}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right) &= E\,\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right)\right\}.e_{l} + E\,\mathbf{\Psi}^{t}\left(k_{l}\mathbf{r}_{l}\right).J_{k_{l}}^{[l,l+1]}.f_{l} \end{split}$$

En ce qui concerne la sphère N, on a :

$$\mathbf{E}_{N}(k_{N}\mathbf{r}_{N}) = E \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k_{N}\mathbf{r}_{N}) \right\} .e_{N}$$

4.3.2 Expression des relations de continuité tangentielle

Les relations de continuités des champs électriques et magnétiques à la surface des différentes sphères s'écrivent, avec l entier entre 0 et N-1:

$$[\mathbf{E}_{l}(k_{l}R_{l+1})]_{T} = [\mathbf{E}_{l+1}(k_{l+1}R_{l+1})]_{T}$$
 (a)

$$[\mathbf{H}_{l}(k_{l}R_{l+1})]_{T} = [\mathbf{H}_{l+1}(k_{l+1}R_{l+1})]_{T}$$
 (b)

ce qui se traduit en terme d'équations par:

$$(a) \begin{cases} k_{l+1}\psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[e_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{l+1}\xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[f_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = k_{l}\psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[e_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{l}\xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}.f_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ k_{l+1}\psi'_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[e_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + k_{l+1}\xi'_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[f_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = k_{l}\psi'_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[e_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + k_{l}\xi'_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}.f_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ b) \begin{cases} \mu_{l+1}\psi'_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[e_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{l+1}\xi'_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[f_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = \mu_{l}\psi'_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[e_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{l}\xi'_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}.f_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ \mu_{l+1}\psi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[e_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{l+1}\xi_{n} \left(k_{l}R_{l+1}\right) \left[f_{l}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = \mu_{l}\psi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[e_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{l}\xi_{n} \left(k_{l+1}R_{l+1}\right) \left[J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}.f_{l+1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} \end{cases}$$

si l est un entier compris entre 0 et N-2 et:

$$(a) \begin{cases} k_{N}\psi_{n}\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[J_{k_{N-1}}^{(N,N-1)}.e_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + k_{N}\xi_{n}\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[f_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = k_{N-1}\psi_{n}\left(k_{N}R_{N}\right) \left[e_{N}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ k_{N}\psi_{n}'\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[J_{k_{N-1}}^{(N,N-1)}.e_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + k_{N}\xi_{n}'\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[f_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = k_{N-1}\psi_{n}'\left(k_{N}R_{N}\right) \left[e_{N}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} \\ (b) \begin{cases} \mu_{N}\psi_{n}'\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[J_{k_{N-1}}^{(N,N-1)}.e_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} + \mu_{N}\xi_{n}'\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[f_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} = \mu_{N-1}\psi_{n}'\left(k_{N}R_{N}\right) \left[e_{N}\right]_{nm}^{\mathbf{M}} \\ \mu_{N}\psi_{n}\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[J_{k_{N-1}}^{(N,N-1)}.e_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} + \mu_{N}\xi_{n}\left(k_{N-1}R_{N}\right) \left[f_{N-1}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} = \mu_{N-1}\psi_{n}\left(k_{N}R_{N}\right) \left[e_{N}\right]_{nm}^{\mathbf{N}} \end{cases}$$

pour l = N - 1.

4.3.3 Matrice de transfert reliant f_l à e_l

En utilisant les équations ci dessus, on retrouve la généralisation des relations trouvées dans la section 4.2:

$$f_{l} = T_{l+1,l}e_{l} + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}f_{l+1} \quad \text{avec } l \text{ entier entre } 0 \text{ et } N-2$$

$$e_{l+1} = V_{l+1,l}e_{l} + U_{l+1,l}f_{l} \quad \text{avec } l \text{ entier entre } 0 \text{ et } N-2$$

$$f_{N-1} = T_{N,N-1}J_{k_{l+1}}^{[N,N-1]}e_{N-1}$$

$$e_{N} = \left(T_{1}^{(N)}\right)^{-1}.J_{k_{N-1}}^{[N-1,N]}.f_{N-1}$$

$$(81)$$

Prenons par exemple les 2 relations suivantes:

$$f_{l} = T_{l+1,l}e_{l} + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}f_{l+1}$$
 (a)

$$e_{l+1} = V_{l+1,l}e_{l} + U_{l+1,l}f_{l}$$
 (b)

et ajoutons lui la relation:

$$f_l = \mathcal{T}_{l+1,l}.e_l$$
 (c)
 $f_{l+1} = \mathcal{T}_{l+2,l+1}.e_{l+1}$ (d)

Les matrices $\mathcal{T}_{l+1,l}$ sont des matrices de transfert généralisées dont nous allons déterminer l'expression. Des relations précédentes, on déduit:

(a)+(d):
$$f_l = T_{l+1,l}e_l + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}.e_{l+1}$$
 (e)
 $e_{l+1} = V_{l+1,l}e_l + U_{l+1,l}f_l$ (b)

soit

$$(e)+(b): f_{l} = T_{l+1,l}e_{l} + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}. (V_{l+1,l}e_{l} + U_{l+1,l}.f_{l})$$

$$f_{l}. \left(I - Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}.U_{l+1,l}\right) = \left(T_{l+1,l} + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}V_{l+1,l}\right).e_{l}$$

$$f_{l} = \left[\frac{T_{l+1,l} + Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}V_{l+1,l}}{I - Q_{l,l+1}J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]}\mathcal{T}_{l+2,l+1}.U_{l+1,l}}\right].e_{l}$$

et donc:

$$\mathcal{T}_{l+1,l} = \left[\frac{T_{l+1,l} + Q_{l,l+1} J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]} \mathcal{T}_{l+2,l+1} V_{l+1,l}}{I - Q_{l,l+1} J_{k_{l+1}}^{[l+1,l+2]} \mathcal{T}_{l+2,l+1} U_{l+1,l}} \right]$$
(82)

De plus, nous avons:

$$f_{N-1} = T_{N,N-1}J_{k_{l+1}}^{[N,N-1]}e_{N-1}$$
et donc $T_{N,N-1} = T_{N,N-1}J_{k_{l+1}}^{[N,N-1]}$

Pour calculer les matrices $\mathcal{T}_{l+1,l}$, on utilise ainsi une récurrence inversée, puisque l'on connait $\mathcal{T}_{N,N-1}$. Finalement, afin d'obtenir tous les champs en présence, on procède de la façon suivante:

- 1) on évalue toutes les matrices $\mathcal{T}_{l+1,l}$ grâce à la récurrence inversée ci dessus; à cet instant, nous avons la matrice $\mathcal{T}_{1,0}$ dont nous aurons besoin pour calculer la force exercée par l'onde incidente sur le système de sphères enrobées.
 - 2) on calcule f_0 en fonction de e_0 grâce à $\mathcal{T}_{1,0}$.
- 3) les relations (81) nous permettent d'obtenir f_1 et e_1 à partir de e_0 et f_0 , et ainsi de suite jusqu'à e_N .

4.4 Applications numériques

Le système que nous allons considérer dans cette application numérique est un système de 2 sphères diélectriques concentriques, soumises à une onde plane incidente, représenté figure 50. L'onde plane à un

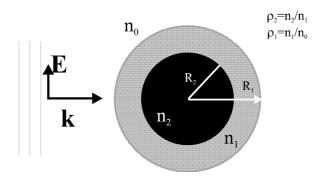


Figure 50: Système étudié de deux sphères enrobées concentriques soumises à une onde plane incidente. L'origine du repère est prise au centre des sphères.

vecteur d'onde \mathbf{k} grâce auquel on définit une direction z selon le vecteur unitaire:

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$$

Elle est polarisée suivant un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{y}}$ orthogonal à $\hat{\mathbf{z}}$. Sa longueur d'onde dans le vide est de 0.532nm, et elle se propage dans un milieu incident d'indice optique n_0 . Elle illumine un système de deux sphères concentriques, dont le centre commun est pris comme origine O de notre repère. Les sphères seront par la suite immobile. Nous avons une sphère extérieure dont les caractéristiques sont indicées 1; elle a pour rayon R_1 et pour indice optique n_1 . La sphère intérieure est elle indicée 2, avec par conséquent un indice optique n_2 et un rayon R_2 . On définit un rapport d'enrobage r comme étant égal à:

$$r = \frac{R_2}{R_1}$$

Ce rapport varie ainsi de 0 à 1. On définit également 2 contrastes d'indices: ρ_1 entre le milieu incident et la sphère extérieure et ρ_2 entre la sphère intérieure et la sphère extérieure. Ces contrastes d'indice sont définis à l'aide des indices optiques selon les relations:

$$\rho_1 = \frac{n_1}{n_0} \qquad \qquad \rho_2 = \frac{n_2}{n_1}$$

Enfin, nous allons définir 2 efficacités totale de piégeage: la première, Q_{pe} , sera celle du système de la figure 50; la seconde, Q_p , sera associée au même système sans la sphère 2; la sphère 1 est alors une sphère pleine. Notre étude consistera à nous intéresser à l'évolution du rapport Q_{pe}/Q_p en fonction des paramètres du problème. Si ce rapport est supérieur à 1, l'utilisation de sphères enrobées apportera des gains en piégeage, soit une amélioration du piégeage. Si il est inférieur à 1, il y aura des pertes, c'est à dire dégradation du piégeage.

Sur la figure 51, nous avons étudié l'influence sur le rapport Q_{pe}/Q_p de la taille de la sphère extérieure en faisant varier son rayon R_1 entre 0 et 2.5λ pour différents taux d'enrobage: 0.5 (courbe solide) et 0.33 (courbe en pointillées). Dans les 2 cas, nous avons pris:

$$\rho_1 = \frac{1.45}{1.33} \approx 1.09$$

$$\rho_2 = \frac{1.59}{1.45} \approx 1.09$$

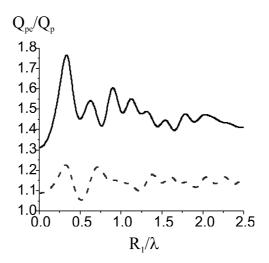


Figure 51: Variation du rapport entre les efficacités de piégeage Q_{pe} et Q_p en fonction du rayon de la sphère extérieure. La courbe en trait plein correspond à un rapport d'enrobage de 0.5, celle en pointillés à un rapport de 0.33. Dans les 2 cas, nous travaillons avec les valeurs $\rho_2 = 1.59/1.45$ et $\rho_1 = 1.45/1.33$.

c'est à dire une sphère extérieure en verre enrobant une sphère en latex, baignant dans de l'eau.

On voit que le piégeage est amélioré par l'enrobage, quel que soit le rayon de la sphère extérieure. De plus, il présente de nombreuses résonnances, qui sont des résonnances géométriques liées aux paramètres R_1 et R_2 . Changeons le milieu 2:

$$n_2 = 1.33$$
 $\rho_2 = \frac{1}{\rho_1}$

et gardons un taux d'enrobage de 0.33. La variation du rapport Q_{pe}/Q_p en fonction de la taille de la sphère extérieure est indiquée figure 52.

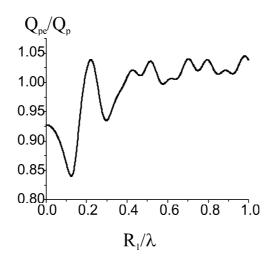


Figure 52: Variation du rapport entre les efficacités de piégeage Q_{pe} et Q_p en fonction du rayon de la sphère extérieure avec les valeurs $\rho_2 = 1.33/1.45$ et $\rho_1 = 1.45/1.33$ et un taux d'enrobage de 0.33.

On se rend compte que le piégeage peut être dégradé, c'est à dire que l'efficacité de piégeage Q_{pe} peut être inférieure à Q_p si le milieu 2 à un indice inférieur à celui du milieu 1.

Ces résultats semblent logiques: nous avions vu dans le cas à une sphère pleine que le piégeage était amélioré quand l'indice optique de la sphère augmentait. On retrouve le même résultat avec les sphères enrobées en considérant l'indice effectif n_{12} de la sphère enrobée: si $n_2 > n_1$, alors $n_{12} > n_1$ et le piégeage dans le cas de 2 sphères enrobées est amélioré par rapport au piégeage à une sphère pleine d'indice n_1 , et ce quel que soit le taux d'enrobage. Lorsque la sphère 2 à un indice inférieur à celui de la sphère 1,

l'indice effectif de la sphère enrobée est inférieur à n_1 : le piégeage peut donc être diminué.

Voyons ce qui se passe si les paramètres ρ_1 et ρ_2 sont constants, et que l'on fait varier le taux d'enrobage. Prenons à nouveau comme milieu incident l'eau, une sphère extérieure en verre et une sphère intérieure en latex, et faisons varier le taux d'enrobage. Le résultat est indiqué 53.

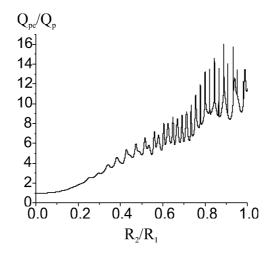


Figure 53: Variation du rapport entre les efficacités de piégeage $Q_{\rm pe}$ et $Q_{\rm p}$ en fonction du rapport d'enrobage, avec les valeurs $\rho_2 = 1.59/1.45$ et $\rho_1 = 1.45/1.33$.

Le piégeage s'améliore lorsque le taux d'enrobage augmente. On aurait à nouveau pu deviner ce résultat: puisque l'indice de la sphère 2 est supérieur à celui de la sphère 1, l'indice effectif de la sphère enrobée augmente avec le taux d'enrobage, ce qui a pour effet d'accroitre l'efficacité de piégeage de la sphère enrobée Q_{pe} . Les résonnances géométriques sont toujours présentes, et on observe que l'enrobage peut multiplier par 10 l'efficacité de piégeage. Si l'on prend $\rho_2 < 1$, c'est l'inverse qui se produit: l'indice effectif de la sphère enrobée diminue lorsque le taux d'enrobage augmente, ce qui entraine une dégradation du piégeage.

A présent, gardons les rayons et ρ_1 constants, et faisons varier ρ_2 . Nous pouvons tenter de prédire le résultat: lorsque $\rho_2 < 1$, l'indice effectif de la sphère enrobée est inférieur à n_1 : le piégeage est dégradé. Lorsque $\rho_2 > 1$, c'est l'inverse qui se produit: le piégeage est amélioré. Mais le taux d'enrobage entre en compte.

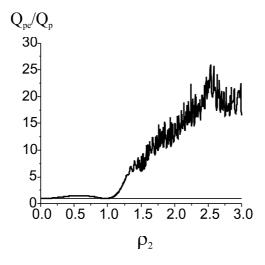


Figure 54: Variation du rapport entre les efficacités de piégeage Q_{pe} et Q_p en fonction de ρ_2 . Le rapport d'enrobage est de 0.5

Sur la figure 54 est repésentée l'évolution du rapport Q_{pe}/Q_p en fonction de la valeur de ρ_2 , avec ρ_1 à nouveau égal à 1.09, et un taux d'enrobage égal à 0.5.

Le résultat n'est pas tout à fait ce que nous attendions: si le piégeage augmente bien lorsque $\rho_2 > 1$, la dégradation du piégeage n'est pas systèmatique pour $\rho_2 < 1$: on trouve dans cette plage de ρ_2 des valeurs proches de 1 pour le rapport Q_{pe}/Q_p . En effet, on ne peut pas faire varier ρ_2 indépendament de ρ_1 , du fait de la définition même des contrastes d'indices. Si on a $\rho_2 < 1/\rho_1$, cela correspond à une valeur de n_2 inférieure à celle de n_0 , voire même inférieure à 1 pour des valeurs de $\rho_2 < 1/n_0$. Dans le cas où $\rho_2 < 1/\rho_1$, on peut avoir des valeurs pour l'indice effectif de la sphère enrobée inférieures à l'indice du milieu incident (ce n'est pas systématique, et cela dépend aussi du taux d'enrobage).

Des oscillations dues aux résonnances géométriques apparaissent à partir de $\rho_2 \approx 1.2$, et le gain maximal est de l'ordre de 25 pour ρ_2 proche de 2.5. Comparons ces 2 valeurs à une sphère enrobée ayant un taux d'enrobage inférieur, ici de 0.125. Toutes les autres caractéristiques du problème sont les mêmes. Le résultat est indiqué sur la figure 55.

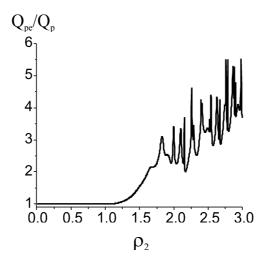


Figure 55: Variation du rapport entre les efficacités de piégeage $Q_{\rm pe}$ et $Q_{\rm p}$ en fonction de ρ_2 . Le rapport d'enrobage est de 0.125

La forme de cette courbe est la même que celle représentée sur la figure 54: on observe un piégeage ni amélioré, ni dégradé pour des valeurs de ρ_2 inférieures à 1 et un gain pour $\rho_2 > 1$. Le fait d'avoir un taux d'enrobage inférieur amène des extrémums pour Q_{pe}/Q_p moins prononcés: par exemple le gain de piégeage maximal est de 6. C'est normal si on considère à nouveau l'indice effectif de la sphère enrobée, qui diminue avec le taux d'enrobage, dégradant alors le piégeage. Les résonnances géométriques commencent pour une valeur de $\rho_2 \approx 1.8$, plus élevées que la valeur de 1.2 observée avec un taux d'enrobage de 0.5.

4.5 Conclusion

Nous venons de présenter une méthode récursive permettant d'évaluer les champs électriques et magnétiques présents dans un système composé de N sphères multicouches. Ces champs sont donnés sous forme de décomposition en vecteur harmoniques sphériques, ce qui nous autorise à appliquer notre formule (38). L'utilisation de sphères enrobées peut ainsi permettre d'améliorer l'efficacité de piégeage, en augmentant l'indice effectif d'une sphère. De plus, elle peut nous permettre de modéliser des organites biologiques, composées d'une membrane recouvrant un milieu d'indice optique différent.

5 Modélisation d'un faisceau laser

5.1 Introduction

La modélisation d'un faisceau laser est indispensable pour modéliser des pinces optiques. En effet, cellesci utilisent des faisceaux lasers extrèmement pincés afin de pouvoir créer de forts gradients d'intensité lumineuse, nécessaires aux piégeages. Les particules diélectriques peuvent ainsi être piégées dans des régions de fortes intensités. L'un des principaux défis de la théorie est de prédire des valeurs de forces optiques cohérentes avec l'expérience. Nous avons déja vu précédemment que nos valeurs prédites étaient de l'ordre du pN, ce qui s'accorde avec la plage de valeurs usuellement mesurées par les expérimentateurs, et qui est de 1 à 100pN [63, 64, 65, 66, 67] Ces mesures permettent aux expérimentateurs de connaître par exemple les forces à l'échelle moléculaire, pour la manipulation d'organites biologiques par exemple. On peut également attacher des sphères diélectriques à des molécules, des membranes où des cellules. Ayant calibré les sphères en mesurant les forces optiques qu'elles subissent, on peut évaluer des forces de liaison ou de tension des organites ainsi étudiés [70].

Nous avons démontré dans la section 2.4 que la force optique axiale est donnée par la relation (42):

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ e^{\dagger}. \Upsilon. T; e \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} (e.T)^{\dagger}. \Upsilon. T. e$$

où e désigne le vecteur coefficient du champ électrique excitateur et T la matrice de transfert de la sphère. La direction z est la direction de propagation du faisceau, et k la norme de son vecteur d'onde. L'amplitude E est celle du champ électrique associé à l'onde incidente, que nous appelons à nouveau champ électrique excitateur. On a de plus exprimé la force à l'aide de la permittivité diélectrique relative du milieu incident ϵ_m .

L'inconnue dans cette formule est donc le vecteur coefficient e, provenant de la décomposition sur une base d'harmoniques sphériques du champ électrique excitateur. Nous verrons une décomposition possible dans la section 5.2, que nous ferons à l'aide du modèle de Davis. Bien que ce modèle soit une approximation peu réaliste de faisceaux utilisés dans le cadre de pinces optiques, nous l'utiliserons car il nous permet de relier simplement les calculs de forces optiques à la puissance incidente du laser, et ainsi vérifier la qualité de nos mesures. Nous comparerons aussi le modèle de Davis au modèle gaussien, plus connu. Cette comparaison nous permettra de mettre en évidence la différence entre intensité lumineuse d'un faisceau, égale au module du champ excitateur au carré, et irradiance du faisceau, définie à partir du vecteur de Poynting. Enfin, nous donnerons quelques applications numériques utilisant le modèle de Davis dans la section 5.3.

5.2 Formulation théorique.

Considérons un milieu incident qui possède une permittivité électrique relative ϵ_m et une perméabilité magnétique relative μ_m . Dans ce milieu incident se propage un faisceau laser axisymétrique ayant un vecteur d'onde dont la norme est égale à k dans le ce milieu. Nous allons prendre le point de l'espace où la symétrie du faisceau est maximale comme étant l'origine O du repère que nous allons utiliser. Typiquement pour un faisceau laser, ce point est au centre de la zone de Rayleigh, et c'est généralement en ce point que l'amplitude du champ est maximale. Définissons le repère dans lequel nous travaillerons en prenant pour direction z celle de l'axe de symétrie du faisceau incident. Pour compléter notre base cartésienne, on impose aux vecteurs unitaires $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ de former un trièdre direct. L'axe Oz ainsi obtenu est celui par rapport auquel on définit les coordonnées sphériques angulaires θ et ϕ . Le champ électrique excitateur \mathbf{E}_e associé à l'onde incidente se décompose sur la base $\mathbf{\Psi}^t$ suivant la relation :

$$\mathbf{E}_{e}(k\mathbf{r}) = E \sum_{n,m} \mathcal{R}g\left\{ \left[\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) \right] \right\} e_{n,m}^{\mathbf{M}} + \mathcal{R}g\left\{ \left[\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) \right] \right\} e_{n,m}^{\mathbf{N}}$$

$$= E \mathcal{R}g\left\{ \left[\mathbf{M}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}(k\mathbf{r}) \right] \right\} e$$

$$\mathbf{E}_{e}(k\mathbf{r}) = E \mathcal{R}g\left\{ \mathbf{\Psi}^{t}(k\mathbf{r}) \right\} e$$
(83)

La base Ψ^t est une base infinie composée des vecteurs:

$$\Psi^{t}(k\mathbf{r}) = [\mathbf{M}_{1.1}(k\mathbf{r}), \mathbf{M}_{1.0}(k\mathbf{r}), \mathbf{M}_{1.-1}(k\mathbf{r}), ..., \mathbf{N}_{1.1}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{1.0}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}_{1.-1}(k\mathbf{r}), ...]$$

La notation $\mathcal{R}g$ signifie qu'il faut prendre la partie régulière des vectyeurs de base, c'est à dire des vecteurs qui ne divergent pas à l'origine. Le vecteur coefficient e détermine entièrement le champ électrique excitateur à une constante multiplicative près, que nous avons noté E. C'est cette constante E que nous nous proposons d'exprimer à l'aide de l'intensité du faisceau incident, par l'intermédiaire du vecteur de Poynting. Ainsi, nous pourrons relier nos calculs de forces à l'intensité du faisceau incident.

5.2.1 Lien entre E et le vecteur de Poynting

Tout d'abord, nous allons exprimer le vecteur de Poynting du faisceau incident, $\mathbf{S}_{e}(\mathbf{r})$. Celui-ci est défini par la relation:

$$\mathbf{S}_e \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_e^* \wedge \mathbf{H}_e \right\}$$

où \mathbf{H}_e désigne le champ excitation magnétique associé à l'onde excitatrice. Etant donné que nous travaillons avec un faisceau laser arbitraire, nous allons définir la direction de propagation du faisceau par l'intermédiaire du vecteur de Poynting à l'origine:

$$\widehat{\mathbf{u}}_e \equiv \mathbf{S}_e\left(\mathbf{0}\right) / \left|\mathbf{S}_e\left(\mathbf{0}\right)\right|$$

Pour un faisceau axisymétrique, le vecteur de Poynting est axiale à l'origine. Ainsi, on retrouve l'égalité:

$$\widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{S}_e\left(\mathbf{0}\right)/\left|\mathbf{S}_e\left(\mathbf{0}\right)\right|$$

Utilisons la relation de Maxwell-Faraday afin d'exprimer \mathbf{H}_e . Cette relation s'écrit:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) = \nabla \wedge \mathbf{E}_{e}\left(k\mathbf{r}\right)$$

avec \mathbf{B}_e champ magnétique associé à l'onde excitatrice. Les champs utilisés sont supposés harmoniques, et leurs dépendances temporelles sont en $\exp(-i\omega t)$. Ainsi, l'opération de dérivation temporelle se réduit à une multiplication par $-i\omega$. De plus, les vecteurs \mathbf{H}_e et \mathbf{B}_e peuvent être reliés par la relation de défintion de \mathbf{H}_e :

$$\mathbf{H}_e \equiv rac{\mathbf{B}_e}{\mu_m \mu_0}$$

expression où on a introduit la perméabilité magnétique du vide μ_0 et la perméabilité magnétique relative du milieu incident μ_m . L'équation de Maxwerll-Faraday devient par conséquent:

$$\begin{split} -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) &= \nabla \wedge \mathbf{E}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) \\ i\omega\mu_{m}\mu_{0}\mathbf{H}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) &= \nabla \wedge \mathbf{E}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) \\ \mathbf{H}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) &= \frac{1}{i\omega\mu_{m}\mu_{0}}\nabla \wedge \mathbf{E}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) \end{split}$$

Les vecteurs de base $\mathbf{M}_{n,m}\left(k\mathbf{r}\right)$ et $\mathbf{N}_{n,m}\left(k\mathbf{r}\right)$ ont leurs rotationnels qui vérifient les relations:

$$\nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$$
$$\nabla \wedge \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

On en déduit ainsi l'expression du rotationnel du champ électrique excitateur:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_{e} (k\mathbf{r}) = \nabla \wedge \left(E \mathcal{R} g \left\{ \mathbf{\Psi}^{t} (k\mathbf{r}) \right\} e \right)$$

$$= E \mathcal{R} g \left\{ \nabla \wedge \mathbf{\Psi}^{t} (k\mathbf{r}) \right\} e$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_{e} (k\mathbf{r}) = k E \mathcal{R} g \left\{ \left[\mathbf{N} (k\mathbf{r}), \mathbf{M} (k\mathbf{r}) \right] \right\} e$$

En outre, si on considère l'équation:

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\epsilon_m \epsilon_0 \mu_m \mu_0}$$

avec ϵ_m permittivité électrique relative du milieu, on obtient finalement l'expression de \mathbf{H}_e :

$$\begin{split} \mathbf{H}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) &= \frac{1}{i\omega\mu_{m}\mu_{0}}\nabla\wedge\mathbf{E}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) \\ &= \frac{E}{i\omega\mu_{m}\mu_{0}}\mathcal{R}g\left\{\nabla\wedge\mathbf{\Psi}^{t}\left(k\mathbf{r}\right)\right\}e \\ &= \frac{kE}{i\omega\mu_{m}\mu_{0}}\left\{\left[\mathbf{N}\left(k\mathbf{r}\right),\mathbf{M}\left(k\mathbf{r}\right)\right]\right\}\,e \\ &= \frac{E}{i}\frac{\sqrt{\epsilon_{m}\epsilon_{0}\mu_{m}\mu_{0}}}{\mu_{m}\mu_{0}}\left\{\left[\mathbf{N}\left(k\mathbf{r}\right),\mathbf{M}\left(k\mathbf{r}\right)\right]\right\}\,e \\ \mathbf{H}_{e}\left(k\mathbf{r}\right) &= -iE\sqrt{\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{\mu_{m}\mu_{0}}}\mathcal{R}g\left\{\left[\mathbf{N}\left(k\mathbf{r}\right),\mathbf{M}\left(k\mathbf{r}\right)\right]\right\}\,e \end{split}$$

Le vecteur de Poynting s'écrit alors:

$$\mathbf{S}_{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_{e}^{*}(k\mathbf{r}) \wedge \mathbf{H}_{e}(k\mathbf{r}) \right\}$$
$$= \frac{1}{2} E^{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \operatorname{Re} \left\{ \left(\mathcal{R}g \left\{ \left[\mathbf{M}(k\mathbf{r}), \mathbf{N}(k\mathbf{r}) \right] \right\} e \right)^{*} \wedge \left(\mathcal{R}g \left\{ \left[\mathbf{N}(k\mathbf{r}), \mathbf{M}(k\mathbf{r}) \right] \right\} e \right) \right\}$$

Nous allons à présent expliciter la valeur à l'origine de S_e . Grâce à celle-ci, nous pourrons donner une valeur en fonction de $||S_e(\mathbf{0})||$ à la constante E.

Mais il va nous falloir exprimer les champs excitateurs à l'origine, et par conséquent, utiliser les limites à l'origine des vecteurs de base \mathbf{M}_{nm} et \mathbf{N}_{nm} . Pour ce, rappelons leurs expressions :

$$Rg\{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})\} = j_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$$

$$Rg\{\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\} = \frac{1}{kr} \left\{ \sqrt{n(n+1)} j_n(kr) \mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) + \left[kr j_n(kr)\right]' \mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi) \right\}$$
Les vecteurs $\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi)$, $\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi)$ et $\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi)$ sont les 3 vecteurs harmoniques sphériques

(VHS) donnés par les relations (cs annexe B):

$$\mathbf{X}_{nm}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi} \wedge \mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\mathbf{Y}_{nm}(\theta,\phi) = Y_{nm}(\theta,\phi)\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{Z}_{nm}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi}Y_{nm}(\theta,\phi)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\nabla_{\theta,\phi} = \hat{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{\sin \theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$Y_{nm}(\theta,\phi) = \gamma_{nm}P_{n}^{m}(\cos \theta)e^{im\phi}$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}$$

$$P_{n}^{m}(\cos \theta) = \frac{(-1)^{m}}{2^{n}n!}(1-\cos^{2}\theta)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^{n}}{\partial \cos^{n}\theta}(\cos^{2}\theta-1)^{n}$$

les 3 vecteurs $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ sont les vecteurs unitaires de la base sphérique que nous utilisons, $\nabla_{\theta,\phi}$ est le laplacien angulaire, γ_{nm} est un coefficient de normalisation et P_n^m désigent les fonctions généralisées de Legendre. Pour obtenir l'expression des vecteurs de base à l'origine, il nous faut faire tendre la coordonnée radiale r vers 0. Seules les fonctions de Bessel contiennent la coordonnée radiale dans les expressions des VHS. La limite de la fonction de Bessel sphérique de premier ordre j_n à l'origine est:

$$\lim_{r \to 0} j_n(kr) = \frac{(kr)^n}{(2n+1)!!}, n > 0$$

limite à partir de laquelle on dérive les formules

$$\lim_{r \to 0} \frac{j_n(kr)}{kr} = \frac{(kr)^{n-1}}{(2n+1)!!}, n > 0$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{[krj_n(kr)]'}{kr} = \frac{(n+1)(kr)^{n-1}}{(2n+1)!!}, n > 0$$

Grâce à ces approximations, et en se rappelant les définitions des vecteurs de base $Rg\{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})\}$ et $Rg\{\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\}$, on obtient:

$$\forall n > 0, \lim_{r \to 0} Rg\{\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})\} = 0$$
$$\forall n > 1, \lim_{r \to 0} Rg\{\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\} = 0$$
$$\lim_{r \to 0} Rg\{\mathbf{N}_{1m}(k\mathbf{r})\} = \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{2} \mathbf{Y}_{1m}(\theta, \phi) + 2\mathbf{Z}_{1m}(\theta, \phi) \right\}$$

L'expression du champ électrique $\mathbf{E}_e(k\mathbf{r})$ quand r tend vers 0 est alors simplement:

$$\lim_{r \to 0} \mathbf{E}_e(k\mathbf{r}) = E \sum_{m=-1}^{m=1} e_{1m}^N Rg\{\mathbf{N}_{1m}(k\mathbf{r})\}$$

Nous avons donc besoin des expressions du type $Rg\{N_{1m}(k\mathbf{r})\}$. A l'aide des relations:

$$\begin{split} \gamma_{11} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} & \gamma_{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{2\pi}} & \gamma_{1-1} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \\ P_1^1(\cos\theta) &= -\sin\theta & P_1^0(\cos\theta) &= \cos\theta & P_1^{-1}(\cos\theta) &= \frac{\sin\theta}{2} \\ Y_{11} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin\theta e^{im\phi} & Y_{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{2\pi}} \cos\theta & Y_{1-1} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sin\theta e^{-im\phi} \end{split}$$

on obtient:

$$\mathbf{Y}_{11}(\theta,\phi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sin\theta e^{im\phi}\widehat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{Y}_{10}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{2\pi}}\cos\theta\widehat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{Y}_{1-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sin\theta e^{-im\phi}\widehat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{Z}_{11}(\theta,\phi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{i\phi}\left((\cos\theta)\widehat{\theta} + i\widehat{\phi}\right)$$

$$\mathbf{Z}_{10}(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}(\sin\theta)\widehat{\theta}$$

$$\mathbf{Z}_{1-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-i\phi}\left((\cos\theta)\widehat{\theta} - i\widehat{\phi}\right)$$

On en déduit les expressions recherchées $Rg\{\mathbf{N}_{1m}(k\mathbf{r})\}$:

$$Rg\{\mathbf{N}_{11}(k\mathbf{r})\} \approx -\frac{1}{\sqrt{12\pi}} ((\cos\phi\sin\theta, \cos\phi\cos\theta, -\sin\phi) + i(\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, \cos\phi)) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

$$Rg\{\mathbf{N}_{10}(k\mathbf{r})\} \approx \frac{1}{r=0} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} (\cos\theta, -\sin\theta, 0) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

$$Rg\{\mathbf{N}_{1-1}(k\mathbf{r})\} \approx \frac{1}{r=0} \frac{1}{\sqrt{12\pi}} ((\cos\phi\sin\theta, \cos\phi\cos\theta, -\sin\phi) - i(\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, \cos\phi)) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}$$

Par définition de la direction $\hat{\mathbf{z}}$ et du vecteur de Poynting, les champs excitateurs vérifient les relations à l'origine:

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{0}) \cdot \widehat{\mathbf{z}} = 0$$
$$\mathbf{H}_e(\mathbf{0}) \cdot \widehat{\mathbf{z}} = 0$$

Ces 2 dernières égalités vont nous permettre d'éliminer certains coefficients. Pour pouvoir utiliser ces relations, il nous faut passer de la base sphérique $\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix}$ à la base cartésienne

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$
. La matrice de passage qui le permet est:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

ce qui entraine:

$$(\cos \phi \sin \theta, \cos \phi \cos \theta, -\sin \phi) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$
$$(\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, \cos \phi) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix} = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$
$$(\cos \theta, -\sin \theta, 0) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{r}} \\ \widehat{\theta} \\ \widehat{\phi} \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

Les nouvelles expressions des vecteurs de base sont alors:

$$Rg\{\mathbf{N}_{11}(k\mathbf{r})\} \underset{r=0}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{12\pi}} \left((1,0,0) + i \left(0,1,0 \right) \right) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

$$Rg\{\mathbf{N}_{10}(k\mathbf{r})\} \underset{r=0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \left(0,0,1 \right) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

$$Rg\{\mathbf{N}_{1-1}(k\mathbf{r})\} \underset{r=0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \left((1,0,0) - i(0,1,0) \right) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

le champ électrique est alors égal à:

$$\mathbf{E}_{e}(\mathbf{0}) = \frac{E}{\sqrt{12\pi}} \left(e_{1-1}^{N} - e_{11}^{N}, -i(e_{1-1}^{N} + e_{11}^{N}), e_{10}^{N} \right) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} \\ \widehat{\mathbf{y}} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

et l'on en déduit que:

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow e_{10}^N = 0$$

 $\mathbf{E}_e(\mathbf{0})\cdot\mathbf{z}=0 \Leftrightarrow e_{10}^N=0$ Le champ excitation magnétique est alors:

$$\mathbf{H}_{e}(\mathbf{0}) = -i\sqrt{\frac{\epsilon_{m}\epsilon_{0}}{\mu_{m}\mu_{0}}} \frac{E}{\sqrt{12\pi}} \left(e_{1-1}^{M} - e_{11}^{M}, -i(e_{1-1}^{M} + e_{11}^{M}), e_{10}^{M} \right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix}$$

ce qui implique:

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow e_{10}^M = 0$$

Le vecteur de Poynting s'écrit:

$$\mathbf{S}_e(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_e^*(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{H}_e(\mathbf{0})\right\}$$

 $\mathbf{S}_e(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_e^*(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{H}_e(\mathbf{0}) \right\}$ avec les expressions que nous avons trouvé pour les champs à l'origine, cela donne:

$$\mathbf{S}_{e}(\mathbf{0}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \frac{E^{2}}{12\pi} \left(\left(e_{1-1}^{N} - e_{11}^{N} \right) \left(e_{1-1}^{M} + e_{11}^{M} \right)^{*} - \left(e_{1-1}^{M} - e_{11}^{M} \right)^{*} \left(e_{1-1}^{N} + e_{11}^{N} \right) \right) \right\} \widehat{\mathbf{z}}$$
on se rend compte que l'on à:

 $\left(e_{1-1}^N - e_{11}^N\right) \left(e_{1-1}^M + e_{11}^M\right)^* - \left(e_{1-1}^M - e_{11}^M\right)^* \left(e_{1-1}^N + e_{11}^N\right) = 2 \left(e_{1-1}^N e_{1-1}^{M*} - e_{11}^N e_{11}^{M*}\right)$ ce qui implique un vecteur de Poynting à l'origine égal à:

$$\mathbf{S}_{e}(\mathbf{0}) = -\frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \frac{E^{2}}{12\pi} \operatorname{Re} \left\{ e_{1-1}^{N} e_{1-1}^{M*} - e_{11}^{N} e_{11}^{M*} \right\} \widehat{\mathbf{z}}$$

Le produit $E^2 \operatorname{Re} \left\{ e_{1-1}^N e_{1-1}^{M*} - e_{11}^N e_{11}^{M*} \right\}$ peut ainsi être déterminé en fonction de la valeur à l'origine du vecteur de Poynting. Ce produit est ainsi égal à:

$$E^{2} \operatorname{Re} \left\{ e_{1-1}^{N} e_{1-1}^{M*} - e_{11}^{N} e_{11}^{M*} \right\} = -12\pi \sqrt{\frac{\mu_{m}\mu_{0}}{\varepsilon_{m}\epsilon_{0}}} \mathbf{S}_{e}(\mathbf{0}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

Nous allons poser:

Nous obtenons ainsi:

$$\operatorname{Re}\left\{e_{11}^{N}e_{11}^{M*} - e_{1-1}^{N}e_{1-1}^{M*}\right\} = 6\pi$$

$$\boxed{|\mathbf{S}_{e}\left(\mathbf{0}\right)| = \frac{1}{2}E^{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_{m}\epsilon_{0}}{\mu_{m}\mu_{0}}}}$$

Conclusion de cette partie:

Ce calcul nous apprend que le vecteur de Poynting a un module à l'origine égal à:

$$|\mathbf{S}_{e}\left(\mathbf{0}\right)| = \frac{1}{2}E^{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_{m}\epsilon_{0}}{\mu_{m}\mu_{0}}}$$

ce qui nous amène alors, à prendre pour E la valeur:

$$E^{2} \equiv 2 \left| \mathbf{S}_{e} \left(\mathbf{0} \right) \right| \sqrt{\frac{\mu_{m} \mu_{0}}{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}}$$

Ces valeurs ne sont pas prises au hasard. En effet, si on considère une onde plane dont les coefficients sont donnés par les formules (cf annexe C):

$$[p]_{n,1}^{\mathbf{M}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \widehat{\boldsymbol{\phi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,1}^{\mathbf{N}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \widehat{\boldsymbol{\phi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,-1}^{\mathbf{M}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(i\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\phi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

$$[p]_{n,-1}^{\mathbf{N}} = i^{n} \sqrt{\pi (2n+1)} \left(-i\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \widehat{\boldsymbol{\phi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{i}$$

on retrouve la relation:

$$\operatorname{Re}\left\{ \left[p\right]_{11}^{N}\left[p\right]_{11}^{M*} - \left[p\right]_{1-1}^{N}\left[p\right]_{1-1}^{M*} \right\} = 6\pi$$

Par ce choix, nous généralisons donc à un faisceau arbitraire la normalisation usuellement utilisée pour une onde plane.

5.2.2 Lien entre le vecteur de Poynting et la puissance du faisceau incident

A présent, si nous relions le vecteur de Poynting à la puissance du faisceau incident, nous pourrons alors avoir des expressions de champs et de force en fonction de cette même intensité, par l'intermédiaire de E. Nous allons définir l'irradiance excitatrice, $I(\mathbf{r})$, du faisceau incident comme le flux de puissance du faisceau dans la direction d'incidence:

$$I(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{S}_e(\mathbf{r}) \cdot \widehat{\mathbf{u}}_e$$

Pour un faisceau arbitraire, le vecteur de Poynting n'est généralement pas dirigé suivant le vecteur unitaire de la direction de propagation $\hat{\mathbf{u}}_e$. C'est pourquoi l'irradiance n'est généralement égale au module du vecteur de Poynting qu'à l'origine de notre repère. Il nous faut relier l'irradiance à la puissance totale du faisceau P_i . L'irradiance à l'origine vérifie la relation:

$$I(\mathbf{0}) \equiv \varphi \frac{k^2 P_i}{\pi} \tag{85}$$

La constante π a été introduite ici pour des raisons calculatoires qui apparaitront par la suite. Le nombre φ est quant à lui un facteur géométrique que nous calculerons à partir du profil de l'irradiance du faisceau incident. Pour un faisceau axisymétrique, la puissance totale du faisceau est définie par la relation:

$$P_{i} = \frac{2\pi}{k^{2}} \int_{0}^{\infty} I(\mathbf{r}) k\rho(kd\rho) \bigg|_{z=cte}$$
(86)

Par conséquent, le facteur géométrique φ s'obtient par la relation:

$$\varphi = \left(2 \int_0^\infty \frac{I(\mathbf{r})}{I(\mathbf{0})} k \rho \left(k d \rho \right) \Big|_{z=cte} \right)^{-1}$$

Les faisceaux lasers dans le cadre des pinces optiques diffèrent du modèle gaussien traditionnellement employé pour décrire un faisceau laser. Une bonne façon de voir cette différence est d'évaluer la valeur du paramètre de normalisation φ pour un faisceau gaussien, et de la comparer à celle obtenue pour des modèles plus réalistes que nous introduirons à cette occasion.

5.2.3 Expression du facteur de normalisation φ - Modèle gaussien

Le modèle gaussien, solution approximée des équations de Maxwell en espace libre, à une irradiance qui suit la relation:

$$I_g\left(\mathbf{r}\right) = I_g\left(\mathbf{0}\right) \left(\frac{w_0}{w\left(z\right)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2\left(z\right)}\right) \qquad ; \qquad w\left(z\right) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

La fonction w(z) est le rayon du faisceau à la cote z, et w_0 est sa valeur minimale: c'est le waist du faisceau, qui a pour autre nom rayon de pincement où rayon de ceinture. La longueur z_R est la longueur de Rayleigh, définie par la relation:

$$z_R = \frac{w_0}{2s}$$

Le nombre s est un paramètre adimensionné, que l'on relie au waist du faisceau grâce à la norme k du vecteur d'onde à l'aide de la relation:

$$s = \frac{1}{kw_0}$$

Il est relié à l'angle de divergence θ_d du faisceau en utilisant la longueur de Rayleigh:

$$s = \frac{1}{kw_0} = \frac{w_0}{2z_r} = \frac{\tan\theta_d}{2}$$

Le modèle gaussien décrit un faisceau axisymétrique. Sa puissance incidente se définit donc suivant la relation (86):

$$P_{i} = \frac{2\pi}{k^{2}} \int_{0}^{\infty} I_{g}(\mathbf{r}) k\rho(kd\rho) \bigg|_{z=cte}$$

$$P_{i} = \frac{2\pi}{k^{2}} \int_{0}^{\infty} I_{g}(\mathbf{0}) \left(\frac{w_{0}}{w(z)}\right)^{2} \exp\left(-\frac{2\rho^{2}}{w^{2}(z)}\right) k\rho(kd\rho) \bigg|_{z=cte}$$

On peut calculer cette puissance dans le plan z=0, et l'intégration est alors triviale:

$$P_{i} = \frac{2\pi}{k^{2}} \int_{0}^{\infty} I_{g}\left(\mathbf{0}\right) \exp\left(-\frac{2\rho^{2}}{w_{0}^{2}}\right) k\rho\left(kd\rho\right)$$
$$= 2\pi I_{g}\left(\mathbf{0}\right) \left[\frac{-w_{0}^{2}}{4} \exp\left(-\frac{2\rho^{2}}{w_{0}^{2}}\right)\right]_{0}^{\infty}$$
$$P_{i} = \frac{\pi}{2} I_{g}\left(\mathbf{0}\right) w_{0}^{2} = \frac{\pi}{2} I_{g}\left(\mathbf{0}\right) \frac{1}{k^{2} s^{2}}$$

On en déduit alors à l'aide de (85) la valeur de φ dans le cadre de l'approximation gaussienne:

$$\varphi = 2s^2$$

La valeur inférieure limite du waist d'un faisceau gaussien est généralement égale à $\lambda/2$, avec λ longueur d'onde du faisceau dans le milieu incident. On a donc une valeur maximale pour s de:

$$s = \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

Pour cette valeur de s, on a $\varphi = 2s^2 \approx 0.2$.

5.2.4 Expression du facteur de normalisation φ - Modèle de Davis

Voyons un autre modèle de faisceau laser, plus réaliste pour modéliser les pinces optiques que les faisceaux gaussiens. Ces derniers ont pour désavantage de ne pas être solution des équations de Maxwell. Ce qui n'est pas le cas du faisceau dont le champ électrique est donné par la décomposition (83). Puisque le faisceau auquel est associé ce champ est axisymétrique, et comme nous avons pris l'origine de notre repère au point d'irradiance maximale, on démontre que les coefficients e du champ excitateur défini selon la relation (83) vérifient la relation:

$$[e]_{n,m}^{\mathbf{A}} = [g]_n [p]_{n,m}^{\mathbf{A}}$$
 $\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$

Les coefficients $[p]_{n,m}^{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}$, \mathbf{N} , ont déja été vus précédemment: ce sont ceux d'une onde plane dont le vecteur d'onde est dirigé suivant le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}_e$. Les coefficients $[g]_n$ ne dépendent que de l'entier n. Suivant la terminologie utilisée par Gouesbet et al [76], nous appelerons ces coefficients beam shape coefficients (BSC). Une onde plane, qui est bien sûr axisymétrique, est donc telle que ses BSC sont égaux à 1. Comme la direction de propagation est suivant le vecteur $\hat{\mathbf{z}}$, on démontre (cf annexe C) que seuls les coefficients de l'onde plane vérifiant ||m|| = 1 sont non nuls. Par conséquent, on a:

$$[e]_{n,\pm 1}^{\mathbf{A}} = [g]_n [p]_{n,\pm 1}^{\mathbf{A}}$$
 $\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$
 $[e]_{n,m}^{\mathbf{A}} = 0 \text{ sinon}$

Pour décrire un faisceau laser de pinces optiques, nous allons utilisé l'approximation de Davis [71, 76]. Cette dernière permet de travailler avec les paramètres utilisées par le modèle gaussien, notamment s. D'autre part, en utilisant l'approximation de localisation décrite dans [58], on peut obtenir de façon simple et direct les valeurs des BSC.

L'approximation de Davis consiste à développer le potentiel vecteur dont sont issus les champs excitateurs en série de s^2 . Sans rentrer dans les détails (la dérivation complète des champs excitateurs est donné annexe D), considérons un potentiel vecteur \mathbf{A} défini par:

$$\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$$

$$A_x(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \exp(ikz) \exp(-i\omega t)$$

C'est la fonction $\Psi(x,y,z)$ que nous développons en série de s^2 :

$$\Psi = \Psi_0 + s^2 \Psi_2 + s^4 \Psi_4 + \dots$$

Les champs électriques et magnétiques excitateurs sont liés à ce potentiel vecteur grâce aux équations:

$$\begin{split} \mathbf{B}_e &= \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \\ \mathbf{E}_e &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U = i\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U \end{split}$$

Le potentiel scalaire U peut être relié au potentiel vecteur avec la condition de jauge de Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \, \mathbf{A} + \frac{\partial U}{c^2 \partial t} &= 0 \\ \mathbf{div} \, \mathbf{A} - \frac{i\omega U}{c^2} &= 0 \\ U &= -\frac{ic}{k} \mathbf{div} \, \mathbf{A} \end{aligned}$$

On a ainsi des champs qui vérifient les équations de Maxwell, ce qui n'est pas le cas des champs donnés par le modèle gaussien. Le fait de développer Ψ en série de s^2 implique que s doit être petit, afin d'avoir un développement qui tende rapidement et ne diverge pas. Malheureusement, les faisceaux lasers utilisés dans le cadre de pinces optiques peuvent avoir des angles de divergence allant jusqu'à 70°. On calcule dans ce cas extrème un paramètre s égal à 1.37, ce qui empêche donc le développement en série du potentiel vecteur de tendre rapidement vers une limite. Mais l'approximation de Davis reste néanmoins plus réaliste que l'approximation gaussienne, puisque les champs excitateurs vérifient dans ce cas les équations de Maxwell.

Les BSC liés aux premier, troisième et cinquième ordre de l'approximation de Davis sont donnés par les formules:

$$[g_{1}]_{n} = \exp\left\{-s^{2}(n-1)(n+2)\right\}$$

$$[g_{3}]_{n} = [g_{1}]_{n} + e^{-s^{2}(n-1)(n+2)}(n-1)(n+2)s^{4}(3-(n-1)(2+n)s^{2})$$

$$[g_{5}]_{n} = [g_{3}]_{n} + e^{-s^{2}(n-1)(n+2)}\left((n-1)^{2}(n+2)^{2}s^{8}(10-5(n-1)(2+n)s^{2}+0.5(n-1)^{2}(n+2)^{2}s^{4}\right)$$

Il nous reste à évaluer φ . Rappelons que ce paramètre est tel que:

$$\varphi = \left(2 \int_0^\infty \frac{I(\mathbf{r})}{I(\mathbf{0})} k \rho (k d\rho) \Big|_{z=cte} \right)^{-1}$$

L'irradiance du faisceau a été définie comme le produit scalaire entre le vecteur de Poynting et le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$. Avec les expressions des différents champs excitateurs en VHS, on trouve:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_{e}^{*} \times \mathbf{H}_{e} \right\} \cdot \widehat{\mathbf{z}}$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} E^{2} \sum_{n,m;\nu\mu} \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{M,*} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} + e_{nm}^{N,*} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\}$$

$$\wedge \left[e_{\nu\mu}^{M} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} + e_{\nu\mu}^{N} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \cdot \widehat{\mathbf{z}}$$

L'intégration sur un plan à z constant revient en coordonnée sphériques, si on prend comme plan d'intégration le plan du waist du faisceau, à prendre une valeur de $\pi/2$ pour θ , et faire varier r entre 0 et l'infini et ϕ entre 0 et 2π . De plus, on se rend compte qu'intégrer l'irradiance reviendra en fait à faire 4 intégrales, suivant les produits vectoriels entre les vecteurs de base:

$$\begin{split} &\int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \, I(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \\ &= \delta P^{\mathbf{MM}} + \delta P^{\mathbf{MN}} + \delta P^{\mathbf{NM}} + \delta P^{\mathbf{NM}} + \delta P^{\mathbf{NN}} \\ &\delta P^{\mathbf{MM}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \, \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{M,*} e_{\nu\mu}^{N} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \wedge \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \\ &\delta P^{\mathbf{MN}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \, \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{M,*} e_{\nu\mu}^{M} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \wedge \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \\ &\delta P^{\mathbf{NN}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \, \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{N,*} e_{\nu\mu}^{N} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \wedge \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \\ &\delta P^{\mathbf{NN}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \, \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{N,*} e_{\nu\mu}^{M} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \wedge \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Dans les expressions des 4 intégrales ci dessus, nous avons omis le terme de sommation $\sum_{n,m;\nu\mu}$. Le vecteur de base \mathbf{M} est par définition transverse. Si on l'évalue en un point H du plan z=0, il sera donc situé dans un plan (P) perpendiculaire à (OH). Comme (OH) est dans le plan du waist, (P) contient l'axe Oz. Par conséquent, le produit vectoriel $\{\mathbf{M}_{nm}^*(k\mathbf{r})\} \wedge \mathcal{R}g \{\mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r})\}$ est, quels que soient n, m, ν et μ perpendiculaire à $\hat{\mathbf{z}}$, et ainsi $\{\mathbf{M}_{nm}^*(k\mathbf{r})\} \wedge \mathcal{R}g \{\mathbf{M}_{\nu\mu}(k\mathbf{r})\} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$: la contribution du terme $\delta P^{\mathbf{MM}}$ est alors nulle. Nous allons voir la méthode utilisée pour expliciter $\delta P^{\mathbf{NN}}$, les deux autres intégrales $\delta P^{\mathbf{MN}}$ et $\delta P^{\mathbf{NM}}$ s'obtenant par des démarches

similaires. L'obtention de ces intégrales nous permettra d'évaluer la valeur de l'intégrale de l'irradiance dans le plan du waist, et ainsi le paramètre φ que nous cherchons à déterminer. L'intégrale $\delta P^{\mathbf{N}\mathbf{N}}$ peut être développée:

 $\delta P^{\mathbf{N}\mathbf{N}}$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \int_{0}^{\infty} r dr \int_{0}^{2\pi} d\phi \operatorname{Re} \left\{ -i \left[e_{nm}^{N,*} e_{\nu\mu}^{M} \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{nm}^{*}(k\mathbf{r}) \right\} \times \mathcal{R}g \left\{ \mathbf{N}_{\nu\mu}(k\mathbf{r}) \right\} \right] \right\} \cdot \hat{\mathbf{z}} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

$$= -E^{2} \frac{\pi}{k^{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{m} \epsilon_{0}}{\mu_{m} \mu_{0}}} \sum_{n,\nu,m=\pm 1} \operatorname{Re} \left[\left[e \right]_{nm}^{N,*} \left[e \right]_{\nu m}^{M} \right] \frac{\overline{u}_{n}^{m}(0) \overline{u}_{\nu}^{m}(0)}{m}$$

$$\wedge \left\{ n \left(n+1 \right) \int_{0}^{\infty} \frac{j_{n}(x)}{x} \left[x j_{\nu}(x) \right]' dx + \nu \left(\nu + 1 \right) \int_{0}^{\infty} \left[x j_{n}(x) \right]' \frac{j_{\nu}(x)}{x} dx \right\}$$

où l'on a posé:

$$\overline{u}_{n}^{m}(\cos\theta) = \gamma_{nm} \frac{m}{\sin\theta} P_{n}^{m}(\cos\theta)$$

utilisé la définition du vecteur de base $\mathbf N$ (cf annexe A), le fait que les coefficients $[e]_{nm}^N$ sont nuls si $||m|| \neq 1$ et effectué l'intégration triviale sur ϕ . On trouve que le produit $\overline{u}_n^m(0)\overline{u}_{\nu}^m(0)$ pour ||m|| = 1 est non nul si et seulement si n et ν sont simultanément impairs. Dans ce cas, on obtient:

$$\overline{u}_{n}^{m}\left(0\right)\overline{u}_{\nu}^{m}\left(0\right) = \frac{\left(-1\right)^{\frac{n-\nu}{2}}}{4\pi}\sqrt{\left(2n+1\right)\left(2\nu+1\right)}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}\frac{(\nu-2)!!}{(\nu+1)!!}$$

L'intégration des fonctions de Bessel donne après calcu

$$n(n+1) \int_{0}^{\infty} \frac{j_{n}(x)}{x} \left[x j_{\nu}(x)\right]' dx + \nu(\nu+1) \int_{0}^{\infty} \left[x j_{n}(x)\right]' \frac{j_{\nu}(x)}{x} dx = (-1)^{\frac{n-\nu}{2}}$$

et l'on obtient:

$$\delta P^{\mathbf{NN}} = -\frac{|I(\mathbf{0})|}{2k^2} \sum_{p,q=0}^{\frac{N_{\text{max}}-1}{2}} \sum_{m=\pm 1} \frac{\text{Re}\left[[e]_{2p+1,m}^{\mathbf{N},*} [e]_{2q+1,m}^{\mathbf{M}}\}\right]}{m} \wedge \sqrt{(4p+3)(2q+3)} \frac{(2p-1)!!}{(2p+2)!!} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2)!!}$$

Puisque l'on a:

$$[e]_{n,m}^{\mathbf{A}} = [g]_n [p]_{n,m}^{\mathbf{A}}$$
 $\mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$

 $[e]_{n,m}^{\mathbf{A}} = [g]_n [p]_{n,m}^{\mathbf{A}} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$ on trouve, en utilisant les valeurs des coefficients d'une onde plane (84) :

$$\delta P^{\mathbf{NN}} = I\left(\mathbf{0}\right) \frac{\pi}{k^2} \sum_{p,q=0}^{\frac{N_{\max}-1}{2}} g_{2p+1} g_{2q+1} \left(4p+3\right) \left(4q+3\right) \frac{(2p-1)!!}{(2p+2)!!} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2)!!} (-1)^{p-q}$$

Les évaluations similaires de $\delta P^{\mathbf{MM}}$ et $\delta P^{\mathbf{NM}}$ nous permettent de conclure quant à la valeur de l'intégrale de l'irradiance.

Le calcul précédent nous démontre que dans la modélisation de Davis, le facteur φ s'obtient en fonction des BSC:

$$\varphi = \left(\sum_{p,q=0}^{\frac{N_{\max}-1}{2}} [g]_{2p+1} [g]_{2q+1} (4p+3) (4q+3) \frac{(2p-1)!!}{(2p+2)!!} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2)!!} (-1)^{p-q} + 2 \sum_{p=1}^{\frac{N_{\max}}{2}} \sum_{q=0}^{\frac{N_{\max}-1}{2}} [g]_{2p} [g]_{2q+1} \frac{(2q+1)!!}{(2q)!!} \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{(4p+1)(4q+3)}{2p(2p+1) - (2q+1)(2q+2)} (-1)^{p-q+1}\right)^{-1}$$

Si l'on prend à nouveau $s=1/\pi$, on trouve pour le 5^e ordre de l'approximation de Davis une valeur de φ égale à 0.13 (à mettre en relation avec la valeur de 0.2 trouvée dans le cas d'un faisceau gaussien). Cette différence s'explique par le caractère non gaussien du faisceau modélisé par l'approximation de Davis. De plus, on peut avancer le fait que l'irradiance que nous avons utilisé pour le modèle gaussien est en fait l'intensité lumineuse, égale au module du champ électrique au carré. Cette confusion est généralement faite lorsque l'on traite le faisceau laser à l'aide du modèle gaussien. Nous allons voir à travers un premier exemple numérique qu'elle n'est absolument pas justifiée pour un modèle de Davis.

5.3 Applications numériques.

Considérons dans un premier temps un faisceau laser modélisé par l'approximation au 5^e ordre de Davis. La polarisation est suivant un vecteur $\hat{\mathbf{y}}$, perpendiculaire au vecteur $\hat{\mathbf{z}}$ défini par la direction de propagation du faisceau. Le paramètre s est égal à $1/\pi$, et nous nous proposons de comparer les répartitions dans le plan focal (c'est à dire le plan du waist) de l'irradiance (définie précédemment à l'aide du vecteur de Poynting) et de l'intensité lumineuse (égale au module au carré du champ électrique). Le résultat est donné figure 56.

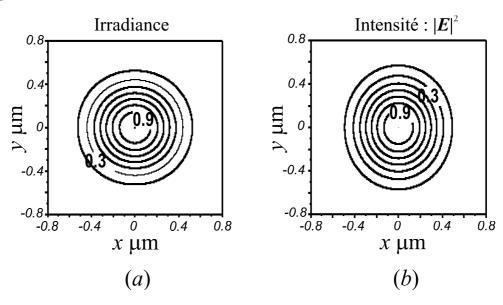


Figure 56: Comparaison entre l'irradiance et l'intensité dans le plan focal avec un faisceau de Davis approximé au cinquième ordre polarisé suivant $\hat{\mathbf{y}}$ et ayant $s=\frac{1}{\pi}$.

Les lignes de niveaux de la répartition de l'irradiance sont circulaires, tandis que celles de l'intensité lumineuse forment des ellipses dont le grand axe est suivant la direction de polarisation y. Ainsi, on se rend compte qu'un faisceau laser modélisé par l'approximation de Davis n'est axisymétrique que pour l'irradiance.

Nous allons à présent nous intéresser au piégeage d'une sphère diélectrique dans un faisceau laser que nous modéliserons avec l'approximation de Davis. Les sphères que nous utiliserons seront soit en silice (indice optique de 1.45) soit en latex (indice optique de 1.59). Le milieu incident sera de l'eau (indice optique de 1.33). Le vecteur d'onde du faisceau incident aura pour longueur d'onde dans le vide $1.064\mu m$, c'est à dire une longueur d'onde de 800nm dans le milieu incident. Nous utiliserons la formule de force axiale donnée par la relation (42):

$$F_z = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ e^\dagger. \Upsilon. T. e \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} (e.T)^\dagger. \Upsilon. T. e$$

où e désigne le vecteur coefficient du champ électrique excitateur et T la matrice de transfert de la sphère. Cette formule est reliée à l'irradiance du faisceau à l'origine $I(\mathbf{0})$ (et ainsi à la puissance du faisceau grâce à notre travail précédent, ce qui nous permet de relier nos calculs à des valeurs expérimentales) par l'intermédiaire de la relation:

 $F_z = \frac{I(\mathbf{0})}{v_m} \pi a^2 Q_p$

où v_m est la vitesse de l'onde incidente dans le milieu incident, et a le rayon de la sphère. C'est à l'efficacité de piégeage Q_p que nous allons nous intéresser. Nous l'avons tracée figure 57 pour des sphères en silice et en latex dont les rayons sont égaux à $2.1\mu m$ (on se place par conséquent dans le cas résonnant).

La position z = 0 correspond au "foyer" du faisceau (c'est à dire au centre de la zone de Rayleigh). Les courbes obtenues prédisent des points de piégeage. En effet, les forces optiques sont positives puis

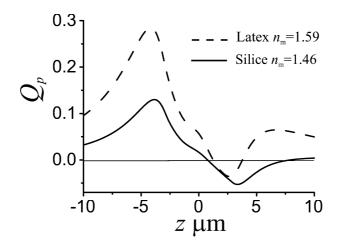


Figure 57: Efficacité de piégeage axiale, $Q_p(z)$, pour des sphères de rayon $R=2.1\mu m$ en silice $(n_s=1.45)$ ou en latex $(n_s=1.59)$ immergées dans de l'eau $(n_m=1.33)$ sous un faisceau de Davis approximé au cinquième ordre polarisé suivant $\hat{\mathbf{y}}$ et ayant $s=\frac{1}{\pi}$.

négatives, c'est à dire que les sphères sont poussées puis ramenées au point où $Q_p = 0$, c'est à dire piégées. Mathématiquement, le point de piégeage $z = z_{tr}$ se traduit sur la fonction $Q_p(z)$ par les conditions:

$$Q_p(z_{tr}) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dz}Q_p(z)\right)_{z=z_{tr}} < 0$$

Suivant l'indice de la sphère, z_{tr} n'est pas le même, mais il est dans les 2 cas compris entre z = 0.7 et $z = 1\mu m$, et surtout placé après le point focal du faisceau. Même si l'approximation dipolaire, qui sépare traditionnellement la force optique en 2 composantes (cf section 2.2) n'est plus vraie ici, elle permet d'expliquer intuitivement cette position de piégeage: les forces optiques trouvent un compromis entre la force de radiation (où pression de radiation) qui tend à pousser la sphère suivant l'axe z, et la force de gradient, qui cherche à la piéger au point d'irradiance maximale, c'est à dire au point focal du faisceau.

Nous allons également mettre en évidence des phénomènes de résonnance. En effet, nous avons grâce à notre calcul rigoureux recherché la position de piégeage d'une sphère diélectrique tout en faisant varier son rayon, entre 0 et $2.1\mu m$. Le résultat est donné figure 58.

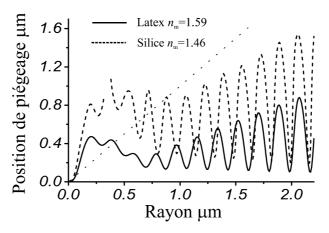


Figure 58: Positions de piégeage pour des sphères en silice dans de l'eau en fonction du rayon de la sphère. Le faisceau incident est un faisceau de Davis approximé au cinquième ordre polarisé suivant $\hat{\mathbf{y}}$ et ayant $s = \frac{1}{\pi}$.

Les sphères sont, comme indiqué sur la figure, soit en silice, soit en latex. Dans les 2 cas, on observe l'apparition d'une oscillation de la position de piégeage en fonction du rayon de la sphère, oscillation

autour d'une valeur moyenne toujours positive (les sphères sont piégées après le point focal du faisceau). Pour des rayons R tels que les positions de piégeage z_{tr} soient inférieures à R, le point focal du faisceau est situé à l'intérieur de la sphère lorsque celle-ci est piégée. Les oscillations dans les positions de piégeages sont la preuve d'effets de résonnances géométriques sur la force optique. Ce résultat peut entrainer d'autres études qui s'attarderaient sur une éventuelle corrélation entre ce phénomène et les valeurs des sections efficaces de diffusion où encore les intensités des énergies diffusées.

Pour conclure, voyons ce qu'il en est des forces radiales. Théoriquement, puisque le faisceau est axisymétrique, on peut s'attendre à des forces radiales qui seraient les mêmes quel que soit la direction perpendiculaire à l'axe de propagation suivant laquelle elles sont évaluées. Nous allons à nouveau discuter en termes d'efficacité de piégeage, paramètre adimensionné, plutot qu'en termes de forces optiques. L'efficacité de piégeage radiale est reliée à la force optique radiale F_r à nouveau suivant la relation:

$$F_r = \frac{I(\mathbf{0})}{v_m} \pi a^2 Q_p$$

Pour calculer cette force radiale, on utilise la formule (44) donnée plus en détails dans la section 2.4.9 et qui permet d'obtenir la force optique dans une direction $\hat{\mathbf{u}}$ quelconque:

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = -\frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}\operatorname{Re}\left\{\left(e\right)^{\dagger}.\Lambda\left(\alpha,\beta,\gamma\right).T.e\right\} - \frac{\epsilon_{0}\epsilon_{m}E^{2}}{2k^{2}}\left(e.T\right)^{\dagger}.\Lambda\left(\alpha,\beta,\gamma\right).T.e\right)$$

Les angles α, β, γ sont les angles d'Euler qui définissent la rotation de centre O dans laquelle $\hat{\mathbf{u}}$ est l'image de $\hat{\mathbf{z}}$.

Nous allons à nouveau considérer un faisceau incident modélisé par l'approximation de Davis au 5^e ordre, avec un paramètre s égal à $1/\pi$ et une longueur d'onde dans le vide de $1.064\mu m$. La direction de propagation de ce faisceau est suivant $\hat{\mathbf{z}}$, et son champ électrique est polarisé suivant un vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ orthogonal à $\hat{\mathbf{z}}$. Le milieu incident est de l'eau (indice optique 1.33). Sur la figure 59a), nous avons tracé l'efficacité de piégeage radiale pour une sphère en silice de rayon $2.1\mu m$. La sphère se déplace dans un plan (P) perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau. Le plan (P) coupe l'axe de propagation en $z_{tr} = 0.75\mu m$: ce point d'intersection est le point de piégeage axial déterminé grâce à la figure 57. Nous avons tracé l'efficacité de piégeage radiale pour des déplacements suivants les directions $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{x}}$, le trièdre $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ étant direct.

La différence entre les 2 courbes figure 59a) est minime: l'asymétrie des forces est donc négligeable; elles sont par conséquent axisymétriques, comme l'irradiance. Puis nous avons changé le rayon de la sphère, le prenant cette fois ci égal à $0.2\mu m$. Sur la figure 59b) nous voyons que l'efficacité de piégeage n'est pas la même selon la direction suivant laquelle elle est évaluée (le plan dans lequel la sphère se déplace la sphère est le plan $z=0.43.\mu m$, la position de piégeage axiale pour une sphère en silice baignant dans de l'eau de $0.2\mu m$ de rayon est en effet $z=0.43\mu m$). Pour des sphères plus petites, notre modèle prédit donc que les forces optiques sont plus sensibles à l'intensité lumineuse $\|\mathbf{E}_e\|^2$ du faisceau, asymétrique, qu'à l'irradiance du faisceau, axisymétrique. Cela rejoint nos conclusions sur le modèle dipolaire données section 2.2.

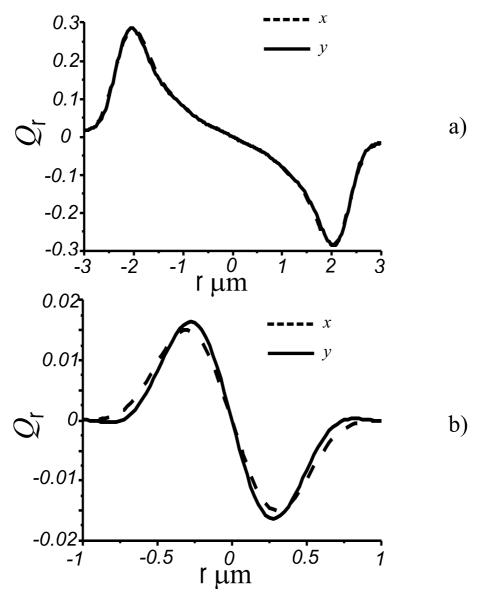


Figure 59: a) Efficacité de piégeage radiale, Q_{ρ} , pour une sphère en silice de rayon $R=2.1\mu m$ en fonction du déplacement radial selon les axes $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{y}}$ autour de la position de piégeage $z_{\rm tr}\simeq 0.75\mu m$. b) Efficacité de piégeage radiale, Q_{ρ} , pour une sphère en silice de rayon $R=0.2\mu m$ en fonction du déplacement radial selon les axes $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{y}}$ autour de la position de piégeage $z_{\rm tr}\simeq 0.43\mu m$.

5.4 Conclusion

La modélisation de pinces optiques n'est donc pas évidente. Bien que nous ayons la formule (44), il nous manque l'essentiel: la décomposition du champ électrique associé au faisceau laser incident en vecteurs harmoniques sphériques. L'approximation de Davis fournit une possibilité de décomposition. Même si le faisceau modélisé a un angle d'ouverture en deça des 70° utilisé par les expérimentateurs dans le cadre des pinces optiques, il offre un faisceau axisymétrique qui permet des premières conclusions: dans le cas résonnant, la force optique est sensible à l'irradiance, directement liée à la puissance incidente du faisceau par l'intermédiaire du vecteur de Poynting. Dans le cas dipolaire, c'est en fonction de l'intensité, c'est à dire du module au carré du champ électrique, que s'exprime les forces optiques. Les termes multipolaires de la force optique, termes qui apparaissent quand l'objet grandit, sont donc plus sensibles à l'irradiance du faisceau laser que le terme dipolaire, plus sensible à l'intensité. Le piégeage se fait, comme on pouvait s'y attendre, sur l'axe du faisceau: les forces radiales sont symétriques de part et d'autre de l'axe du faisceau. Si on oriente l'axe du faisceau positivement suivant le sens de propagation de l'onde incidente, on se rend compte que le point de piégeage se situe après le point focal du faisceau, c'est à dire non pas au point de plus forte intensité lumineuse, mais à coté de ce point: l'objet est poussé par l'onde (terme de pression de radiation), mais le gradient d'intensité lumineuse tend à le ramener au point focal. Nous avons également vu que lorsque le rayon de la sphère augmente, la position du point de piégeage oscille autour d'une position moyenne. Pour des grands rayons, le point de piégeage est tel que le point focal du faisceau est à l'intérieur de la sphère piégée.

6 Conclusion et perspectives

Nous allons dans cette partie faire un récapitulatif des résultats que nous avons exposés dans ce mémoire. Nous verrons dans un premier temps en quoi les objectifs que nous nous étions fixés en introduction ont été remplis. Puis nous donnerons un aperçu des possibilités d'études offertes par le code numérique que nous avons développé.

6.1 Objectifs fixés et résultats obtenus

L'objectif le plus important que nous nous étions fixés était d'établir une formule dans le cas résonnant pour un faisceau arbitraire. Cet objectif a été rempli dans la section 2.4. Rappelons la démarche que nous avons effectué à cette occasion:

- nous avons tout d'abord cherché le champ électrique diffusé par une sphère diélectrique. Pour ce, il nous a fallu introduire la notion de **séries de Lorenz–Mie**: le champ électrique excitateur (c'est à dire le champ électrique associé à l'onde incidente) se décompose sur une base spéciale de vecteurs harmoniques sphériques.
- cette décomposition nous a permis de travailler avec les coefficients e du développement du champ électrique excitateur. Nous avons ainsi relier e aux coefficients f du champ diffusé, par l'intermédiaire de la matrice de transfert de l'objet.
- une fois le champ électrique total (excitateur+diffusé) connu, nous avons effectué un **bilan d'impulsion** microscopique, afin d'obtenir la force optique exercée par l'onde incidente sur la sphère.
- ce bilan a fait intervenir le **tenseur de Maxwell** (où tenseur des contraintes), que nous avons intégré suivant la direction de propagation $\hat{\mathbf{k}}$ du faisceau incident, sur une surface S contenant l'objet.
- pour mener à bien cette intégration, nous avons fait tendre la surface S à l'infini, ce qui nous a permis d'utiliser l'**hypothèse des champs lointains**, simplifiant le calcul.
- nous avons introduit la matrice de force Υ, qui est à la fois indépendante de l'objet et de l'onde incidente.
- nous avons enfin utilisé les matrices de rotation $D(\alpha, \beta, \gamma)$ pour obtenir la force optique dans n'importe qu'elle direction..

La formule que nous avons obtenue est ainsi:

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} \operatorname{Re} \left\{ (e)^{\dagger} . \Lambda (\alpha, \beta, \gamma) . T.e \right\} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_m E^2}{2k^2} (e.T)^{\dagger} . \Lambda (\alpha, \beta, \gamma) . T.e$$

Elle permet de calculer la force optique dans une direction $\hat{\mathbf{u}}$ quelconque si on connait:

- * les angles d'Euler (α, β, γ) permettant de faire pivoter la direction de propagation $\hat{\mathbf{k}}$ sur la direction $\hat{\mathbf{u}}$, le centre du repère étant pris au centre de la sphère. On a: $\Lambda(\alpha, \beta, \gamma) = D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \Upsilon \cdot D(\alpha, \beta, \gamma)$
- * la permittivité diélectrique relative du milieu extérieur à la sphère ϵ_m , la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 .
- * le vecteur d'onde de l'onde incidente k.
- * la norme du champ électrique excitateur E; ses coefficients sur une base de vecteurs harmoniques sphérique e.
- * la matrice de transfert de l'objet T.

Une fois cette relation obtenue, nous l'avons comparée avec les valeurs de forces optiques données par 2 approximations: lorsque le rayon a de la sphère est très inférieur à la longueur d'onde du faisceau incident (régime de Rayleigh), où à l'inverse, lorsque le rayon de la sphère est nettement supérieur à la longueur d'onde du faisceau incident (approximation de l'optique géométrique). Après nous être attaché à démontrer comment dériver ces deux approximations, nous avons déduit leurs domaines de validité dans le cas d'une onde plane incidente.

Nous avons enfin relié ce calcul exact à l'expérience, en modélisant un système à 3 ondes utilisé à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Notre second objectif était l'étude des forces induites dans un système de N sphères. Ce problème est lié à celui de la diffusion multiple par un système à N sphères. Nous avons proposé dans la section 2.4 une **méthode récurrente** permettant de résoudre le problème de multidiffusion. Nous avons pu faire une application numérique concernant un **système de** 27 **sphères**. Enfin, nous avons prouvé l'**existence de forces induites** pour un système à 2 sphères soumis à une onde plane où à une onde stationnaire. Dans les 2 cas, 2 sphères dont les rayons sont petits devant la longueur d'onde λ du faisceau incident (régime de Rayleigh) auront tendance à former un agrégat. Si le rayon a des sphères est du même ordre que la longeur d'onde (régime résonnant), les forces induites séparent un agrégat de 2 sphères. Nous avons à cette occasion découvert que la configuration la plus stable à 2 sphères est un doublet où les 2 sphères sont éloignées bord à bord d'une **distance de** $\lambda/2$. Nous nous sommes également intéressés à l'effet de la polarisation sur les forces induites. Nous avons observé que l'effet lié à la polarisation s'estompait lorsque le rayon des sphères augmentait.

Notre troisième centre d'intéret concernait les sphères enrobées. Après avoir donné un algorithme permettant de calculer la diffusion dans des sphères multicouches, nous avons étudié les effets de l'enrobage sur un système de 2 sphères enrobées. Par effet de l'enrobage, nous entendons influence de l'indice de la sphère intérieure, où de la taille du rayon de la sphère intérieure. Ainsi, lorsque l'on place dans une sphère diélectrique d'indice n_1 une sphère diélectrique intérieure d'indice n_2 , le piégeage peut soit être **amélioré** $(n_2 > n_1)$, soit être **dégradé** $(n_2 < n_1)$, l'effet dans chaque cas s'accentuant avec la taille de la sphère intérieure.

Enfin, notre dernier objectif était de modéliser des pincettes optiques. Nous l'avons fait dans le cas de faisceaux axisymétriques ayant un angle d'ouverture maximal d'environ 30°. Nous avons développé un formalisme pour relier la puissance lumineuse incidente à notre calcul de force, par l'intermédiaire de l'irradiance du faisceau. Nous nous sommes servi de ce formalisme afin de comparer deux modélisations différentes: la modélisation gaussienne et celle de Davis. A l'aide de cette dernière, nous avons démontré la nature axisymétrique des forces optiques pour des grandes sphères.

6.2 Perspectives

L'une des principales ouvertures qui peut suivre ces travaux est une **étude dynamique**. En effet, le point de piégeage est ici déterminé par la position où la force s'annulle. Deux limites à cette modélisation apparaissent: d'une part l'abscence de la prise en compte du **mouvement Brownien**, toujours présent même dans le vide (à cause du rayonnement cosmologique à 3K); d'autre part la **force de viscosité**, proportionnelle à la vitesse et dirigée dans le sens inverse du mouvement. En quoi ces deux éléments peuvent-ils changer notre modélisation?

Le mouvement Brownien empêche tout piégeage; en effet, prenons le cas à une sphère: lorsque celle-ci est piégée, elle se situe dans un puits de potentiel d'une profondeur donnée E_0 . Mais il existe toujours une probabilité non-nulle pour que le milieu transmette à la sphère une énergie cinétique $E > E_0$, et ce quel que soit E_0 : la sphère sort ainsi du piège. Bien sûr cette explication n'est qu'une explication simplifiée, mais on peut démontrer en utilisant la physique statistique qu'en l'absence de viscosité, une sphère est toujours sortie d'un puits de potentiel par le mouvement Brownien.

La viscosité est elle inversement proportionnelle à la vitesse: elle ralentit donc le mouvement, mais a pour effet d'accélérer le piégeage. Lorsqu'une sphère est mue par les forces optiques, elle ne se piège pas directement au point de potentiel le plus bas. Elle le dépasse dans un premier temps, pour ensuite être à nouveau attirée par une force de rappel. La sphère oscille ainsi autour du point de piégeage. La viscosité, en diminuant la vitesse de la sphère, réduit le temps d'oscillation.

Une autre perspective de travail est l'étude du piégeage des **organites biologiques**. En effet, notre code permet de traiter les sphères enrobées, ce qui est le cas d'organites biologiques composées d'une membrane entourant un milieu cellulaire. Modéliser l'absorption, ce qui nous est possible, peut être primordial dans les applications biologiques des forces optiques. En effet, on peut espèrer manipuler une cellule sans la détruire, où bien la détruire sans détériorer le milieu environnant.

La modélisation de **faisceaux pincés** peut s'avérer être un champ d'étude vaste à explorer. En effet, les pincettes optiques peuvent avoir des angles d'ouvertures de l'ordre de 70°, et le modèle de Davis que nous avons utilisé ne permet pas d'obtenir des angles d'ouvertures supérieurs à 30°. Que se passe-t-il lorsque l'intensité lumineuse des lasers est plus localisée? Nous avons vu que le point de piégeage ne se situe pas tout à fait au point focal du faisceau, mais un peu après, avec une modélisation de Davis. Avec un faisceau plus pincé, le gradient d'énergie potentiel plus fort devrait faire en sorte que le point de piégeage se rapproche du point focal du faisceau. Mais une autre conséquence plus importante résulterait dans l'ordre de grandeur des forces, que l'on peut supposer plus élevé dans le cas de faisceaux plus pincés.

Nous pouvons aussi modéliser des métaux, et ainsi étudier les forces optiques dans le cas de **sphères métalliques**. Dans un système interférentiel composé d'une onde stationnaire formant une succession de franges brillantes et de franges sombres dans des plans parallèles, on peut supposer que des sphères métalliques se piégeraient plus volontiers dans des franges sombres que dans des franges brillantes. En effet, un métal à son champ électrique interne nul. Il serait alors logique de trouver des sphères piégées aux points où le champ électrique est minimal.

Notre code numérique modélisant les sphères enrobées nous permettrait alors d'étudier les **plasmons** de surface. Ces derniers apparaissent lorsqu'un diélectrique est recouvert d'une couche métallique.

Enfin, le cas à plusieurs sphères semble celui qui présente le plus de possibilités d'études. En effet, considérons un système interférentiel en 2 dimensions, comme celui proposé par Jean Marc Fournier et modélisé dans la section 2.4.14. Sa structure hexagonale laisse à penser que des sphères diélectriques pourraient reproduire la structure des interférence, et ainsi former des cristaux photoniques bidimensionnels. Une étude théorique permettrait de déterminer le pas d'interférence de façon à ce que la structure soit la plus stable, et ce grâce aux forces induites. Le système une fois stabilisé, notre code permettrait d'évaluer les champs réfléchis et transmis par le cristal ainsi formé: on pourrait quantifier ses capacités en réflexion et en transmission.

Les structures cristallines à 3 dimensions seraient alors l'aboutissement final de notre démarche: on pourrait exécuter le même travail qu'à 2 dimensions, c'est à dire calculer les performances du miroir ainsi formé; mais un autre intéret serait l'étude du guidage de la lumière dans de telles structures.

133

References

- [1] http://www.planetary.org/solarsail/
- [2] http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/Crookes/Crookes.html
- [3] "Die druckraefte des Lichtes auf Gase", PN Lebedev Ann. d. Phys, 1910
- [4] "A Preliminary Communication on the Pressure of Heat and Light Radiation", EF Nichols, GF Hull Physical Review(Series I), 1901
- [5] "Nobel Lecture: The manipulation of neutral particles, Steven Chu", 1998, disponible à l'adresse: http://link.aps.org/abstract/RMP/v70/p685
- [6] Schutze K, Clement-Sengewald A, Ashkin A., "Zona drilling and sperm insertion with combined laser microbeam and optical tweezers.", Fertil Steril. 1994 Apr;61(4):783-6
- [7] Clement-Sengewald A, Schutze K, Ashkin A, Palma GA, Kerlen G, Brem G., "Fertilization of bovine oocytes induced solely with combined laser microbeam and optical tweezers", J Assist Reprod Genet. 1996 Mar;13(3):259-65.
- [8] Steubing RW, Cheng S, Wright WH, Numajiri Y, Berns MW., "Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap", Cytometry. 1991;12(6):505-10.
- [9] Laufer N, Palanker D, Shufaro Y, Safran A, Simon A, Lewis A., "The efficacy and safety of zona pellucida drilling by a 193-nm excimer laser", Fertil Steril. 1993 Apr;59(4):889-95.
- [10] Seeger S, Monajembashi S, Hutter KJ, Futterman G, Wolfrum J, Greulich KO., "Application of laser optical tweezers in immunology and molecular genetics.", Cytometry 1991;12(6):497-504.
- [11] Conia J, Voelkel S., "Optical manipulations of human gametes", Biotechniques. 1994 Dec;17(6):1162-5.
- [12] S Antinori, C Versaci, G Dani, M Antinori, D Pozza and HA Selma, "Fertilization with human testicular spermatids: four successful pregnancies", Human Reproduction, Vol 12, 286-291,1997
- [13] E Yablonovitch, T Gmitter and Kleung, Phys Rev Letter 67,2295 (1991)
- [14] E yablonovitch, "Photonic Crystals", Modern Optics 41,173-194 (1994)
- |15| VP Bykov, Soviet J. Quant Electron.4,861 (1975)
- [16] A Labeyrie, A&AS Suppl. Ser., 118, 517 (1996)
- [17] "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure", A.Ashkin, *Phisical review letters*, volume 24, number 4, pp 156-159.
- [18] A. Ashkin, J.M. Dziedzic, J.E. Bjorkholm and S. Chu. "Observation of a Single-Beam Gradient Force Optical Trap for Dielectric Particles", Opt. Lett. 11, 288-290 (1986).
- [19] "Optical Matter: Crystallization and Binding in Intense Optical Fields", Michael M.Burns, Jean Marc Fournier, Jene A Golovchenko, Science, volume 249, pp. 749-754 (1990).
- [20] "Evanescent Light Scattering: the validity of the dipole approximation", Patrick C Chaumet, Adel Rahmani, Frédérique de Fornel and Jean Paul Dufour, Physical Review B, volume 58, number 4, pp2310-2315 (1998).
- [21] "Coupled dipole method determination of the electromagnetic force on a particle over a flat dielectric surface", Patrick C Chaumet, M Nieto Vesperinas, Physical Review B, volume 61, number 20, pp.14119-14127 (2000).
- [22] "Time averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field", Patrick C Chaumet, M Nieto Vesperinas Optics Letters, Volume 25 number 15, pp.1065-1067 (2000).

- [23] Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen, Ann. D. Physik, 25, 377-442, (1908).
- [24] "Optical force calculations in arbitrary beams using the vector addition theorem", Olivier Moine, Brian Stout, JOSAB, accepted for publication
- [25] "Elementary thory of angular momentum", M.E.Rose, Edition Dover, p53
- [26] Edmonds A.R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1960).
- [27] "Diffusion multiple de la lumière dans les atomes froids", Labeyrie Guillaume, www-lod.inln.cnrs.fr/Articles/SUPOPT.pdf
- [28] Seymour Stein, "Addition theorems for spherical wave function", Quart. Appl. Math. 19, 15-24, (1961).
- [29] O.R. Cruzan, "Translation addition theorems for spherical vector wave functions", Quart. Appl. Math. 19, 15-24, (1962).
- [30] Tsang L., Kong J.A., Shin R.T., "Theory of microwave remote sensing, Wiley Series in Remote Sensing", John Wiley & Sons, (1985).
- [31] W.C. Chew, "Recurrence relations for three-dimensional scalar addition theorem", *Journal of Electr. Waves and Appl.*, **6**, 133-142, (1992).
- [32] J.C. Auger, B.Stout, R.G.Barrera, F.Curiel, J. Quant. Spect. & Rad. Trans., 70, 675-695, (2001).
- [33] B.Stout, J.C. Auger, J.Lafait, "Individual and aggregate scattering matrices and cross sections: conservation laws and reciprocity", *Journal of Modern Optics*, **48** 2105-2128, (2001).
- [34] "A transfert matrix approach to local field calculations in multiple scattering problems", Brian Stout, Jean-Claude Auger and Jacques Lafait, journal of modern optics, 2002, vol 49, no13, 2129-2152
- [35] D. W. Mackowski, 'Calculation of total cross sections of multiple-sphere clusters', J. Opt. Soc. Am. A, 11, 2851-2861, (1994).
- [36] D. W. Mackowski and M.I.Miscshenko, 'Calculation of the T matrix and the scattering matrix for ensembles of spheres', J. Opt. Soc. Am. 13, 2266-2278, (1996).
- [37] Mackowski D.W., "Analysis of radiative scattering for multiple sphere configurations", *Proc. R. Soc. London Ser.* A433, 599-614 (1991)..
- [38] Weng Cho Chew, "Waves and fields in inhomogeneous media"; *IEEE Press Series on Electromagnetic Waves*, IEE Press, New York (1994).
- [39] Siqueira P.R. and Sarabandi K., "T-matrix determination of effective permittivity for three-dimensional dense random media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **48**, Febuary 2000.
- [40] "Absorption in multiple-scattering systems of coated spheres", Sout B., Andraud C., Stout S., Lafait J., JOSA A, vol 20, (2003).
- [41] Johnson B.R., 'Light scattering by a multilayer sphere', Applied Optics, 35, 3286-3296 (1996).
- [42] Onofri F., Gréhan G., Gouesbet G., 'Electromagnetic scattering from a multilayered sphere located in an arbitrary beam', *Applied Optics* **34**, 7113-7124 (1995).
- [43] Kai L., Massoli P., 'Scattering of electromagnetic plane waves by radially inhomogeneous spheres: a finely stratified sphere model', *Applied Optics*, **33**, 501-511 (1994).
- [44] Wu Z.S., Wang Y.P., 'Electromagnetic scattering for multilayed spheres: Recursive algorithms', Radio Science, 26, 1393-1401 (1991).

- [45] Mackowski D.W., Altenkirch R.A., Menguc M.P., 'Internal absorption cross sections in a stratified sphere', *Applied Optics*, **29**, 1551-1559 (1990).
- [46] Toon O.B., Ackerman T.P., 'Algorithms for the calculations of scattering by stratified spheres', *Applied Optics*, 20, 3657-3660 (1981).
- [47] "Electrodynamique Classique", John David Jackson, Edition Dunod
- [48] "Theoretical study of optically induced forces on spherical particles in a single beam trap I: Rayleigh Scattered", K.Visscher, G.J Brakenhoff Optik 89 n°4 (1992), pp174-180.
- [49] "Electromagnetic forces in photonic crystals", M.I.Antonoyannakis and J.B.Pendry, Condensed Matter Theory Group, The Blackett Laboratory Imperial College, London SW7 2BZ,UK (1998).
- [50] "Optical Gradient Forces of Strongly Localized Fields", Tsvi Tlusty, Amit Meller and Roy BarZiv, emphPhysical Review Letters, volume 81, number 8, pp1738-1741 (1998)...
- [51] "Electromagnetic force on a mettalic particle in the presence of a dielectric surface", Patrick C Chaumet, M Nieto Vesperinas, Physical Review B, volume 62, number 16, pp.11185-11191 (2000).
- [52] "Optical binding of particles with or without the presence of a dielectric surface", Patrick C Chaumet, M Nieto Vesperinas, Physical Review B, volume 64, (2001).
- [53] "Optical trapping of dielectric particles in arbitrary field" Alexander Rohrbach and Ernst H.K.Stelzer, Optical society of america, volume 18, numéro 4, pp 839-853 (2000).
- [54] "Generalized Lorenz Mie Theories, from past to future", G.Gouesbet and G Gréhan, Atomization and Sprays, volume 10, pp 277-333 (2000).
- [55] "Partial waves representations of laser beams for use il light-scattering calculations", G.Gouesbet, James A Lock, and G Gréhan, Applied Optics, volume 34 numéro 12, pp.2133-2143 (2000).
- [56] Xu Y.L, 'Electromagnetic scattering by an aggregate of spheres', Applied Optics, **34**, 4573-4588, (1995).
- [57] C.F.Bohren and D.R. Huffman, "Absorption and scattering of light by small particles", Wiley-Interscience Publication. J.Wiley & Sons, (1983).
- [58] Van de Hulst H.C., "Light Scattering by small Paricles", Dover Publications, Inc., New York.
- [59] Sitarski M., "Internal Heating of Multilayered Aerosol Particles by Electromagnetic Radiation", Langmuir 3, 85-93 (1987).
- [60] Wiscombe W.J., "Improved Mie Scattering Algorithms" Applied Optics, 19, 1505-1509, (1980).
- [61] Y.C. Tzeng and A.K.Fung, "T-matrix approach to multiple scattering of EM waves from N-spheres", Journal of Electr. Waves and Appl., 8, (1994)..
- [62] John Bruning, and Yuen T. Lo "Multiple scattering of EM Waves by spheres part I-multipole expansion and ray-optical solutions", *IEEE Transaction on antennas and propagation*, Vol. AP-19, N°3, 378-390, (1971).
- [63] J.C. Crocker, J.A. Matteo, A.D. Dinsmore and A.G. Yodh "Entropic Attraction and Repulsion in Binary Colloids Probed with a Line Optical Tweezer", PRL 82, 4352-4355 (1999).
- [64] L.Paterson, M.P. Mac Donald, J.Arit, W.Dultz, H.Schmitzer, W.Sibett and K.Dholakia, "Controlled simultaneous rotation of multiple optically trapped particles", J. Mod. Opt., **50**, 1591-1601 (2003).
- [65] H.Melville, G.F.Milne, G.C.Spalding, W.Sibbett, K.Dholakia and D.McGloin, "Optical Trapping of three dimensional structures using dynamic holograms", 1, Opt. Exp., 3562 3567, (2003).
- [66] G.Sinclair, J.Leach, P.Jordan, G.Gibson, E.YaoZ., J.Laczik, M.J.Padgett, J.Courtial, "Interactive application in holographic optical tweezers of a multi plane Gerchberg Saxton algorithm for three dimensionnal light shaping", Opt. Exp., 1665-1670, 12, (2004).

- [67] J.Leach, G.Sinclair, P.Jordan, J.Courtil, M.J.Padgett, "3D manipulation of particles into crystal structures using holographic optical tweezers", Opt. Exp. 12, 220-226 (2004).
- [68] Ashkin A., Dziedzic JM., "Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria", Science 2335, 1517-20, (1987).
- [69] Ashkin A., "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime", Biophys J **61**, 569-82, (1992).
- [70] Lenormand G., Hénon S., Richert A., Siméon J., and Gallet F., "Direct measurement of the are expansion and shear moduli of the human red blood cell membrane skeleton", Biophys. J 81, 43-56 (2001).
- [71] Davis L.W., "Theory of Electromagnetic Beams" Phys. Rev. A, 19, 1177-1179 (1979).
- [72] Debye P., "Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material", Ann. Phys. 30, 57-136 (1909).
- [73] Mishchenko M.I., "Radiation force caused by scattering, absorption, and emission of light by non-spherical particles", J. Quant. Spect. Rad. Tr. 70, 811-816 (2001).
- [74] Herwig Kogelnik, "Imaging of Optical Modes- Resonators with Internal Lenses", The Bell System Technical Journal, 1965
- [75] B.D.Popovic, "Electromagnetic field theorems", IEE Proc, vol 128, 1981
- [76] G.Gouesbet, G.Gréhan, B.Maheu, "Localized interpretation to compute all the coefficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory", JOSA A, Vol7, No6,1990
- [77] James A Lock, G.Gouesbet, "Rigorous Justification of the localized approximation to the beam shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. On axis beams", JOSA A, Vol 11, No9, 1994
- [78] J M Fournier, M. Burns, Jene Golovchenko, "Writing diffractives structures by Optical Trapping", SPIE Vol. 2406,1995
- [79] K.F.Ren, G.Gréhan, G.Gouesbet, "Prediction of reverse radiation Pressure by generalized Lorenz Mie theory", Applied optics, Vol 35 No 15, 1996
- [80] J.Ludman et al, "very thick holographic nonspatial filtering of laser beams", Opt.Eng 36, 1997
- [81] H.Polaert, G.Gréhan, G.Gouesbet, "Improved standart beams with application to reverse radiation pressure", Applied Optics, Vol 37, No12,1998
- [82] D.Boiron et al, "Cold and dense cesium clouds in far-detuned dipole traps", Physical Review A, rapid communications, june 1998
- 83 S.Smith et al, "Inexpensive optical tweezers for undergraduate laboratories", Am. J.Phys. 67 (1),1999
- [84] B.Brown, P.Brown, "Optical tweezers: theory and current applications", American Laboratory, 13, 2001
- [85] H.Xu, M.Kall, "Surface Plasmon enhanced optical forces in silver nanoaggregates", phys.rev.letters, Vol 89,No24,2002
- [86] A.S. van de Nes et al,"Calculation of the vectorial field distribution in a stratified focal region of hugh numerical aperture imaging system", optics express, Vol 12, No7,2004

Appendices

A Théorème de translation addition

Le théorème de translation-addition est l'équivalent en géomètrie sphérique du théorème de Graf en géomètrie cylindrique. Si l'on connait le développement en vecteurs harmoniques sphériques (VHS) centré sur une origine O associée à un repère \Re_0 d'une fonction vectorielle $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, il permet de connaître le développement en VHS de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ dans tout repère $\Re_{\mathbf{u}}$ image de \Re_0 par une translation \mathbf{u} connue. Considérons le développement en (VHS) de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Psi}^t(\mathbf{r}) \cdot a^t$$

Le vecteur coefficient a contient l'information relative à la fonction $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. La base infinie $\mathbf{\Psi}^t(\mathbf{r})$ répond à la définition:

$$oldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{r}
ight)\equiv\left[egin{array}{c} \mathbf{M}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{N}\left(\mathbf{r}
ight) \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} \mathbf{M}_{11}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{M}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{N}_{11}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight) \end{array}
ight].$$

où les vecteurs $\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$ sont définis à partir des VHS \mathbf{X}_{nm} , \mathbf{Y}_{nm} et \mathbf{Z}_{nm} (cf annexe B). Ce que nous voulons, c'est l'expression de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ dans le repère $\Re_{\mathbf{u}}$ image de \Re_{0} par la translation suivant le vecteur \mathbf{u} , c'est à dire le développement:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}^{'}) = \mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r}^{'}) \cdot a^{'t}$$

$$\mathbf{r}^{'} = \mathbf{r} - \mathbf{u}$$

La seule inconnue est donc ici le vecteur coefficient a'. Il est relié à a par une simple relation matricielle

$$a' = A \cdot a$$

où A est une matrice que nous allons déterminer. Pour ce, on démontre les relations de changement de base suivantes, avec (u, θ_u, ϕ_u) coordonnées sphériques du vecteur \mathbf{u} :

$$\Psi^{t}(\mathbf{r}) = \Psi^{t}(\mathbf{r}') \cdot J(\mathbf{u}) \qquad r' > u \qquad (1)$$

$$\Psi^{t}(\mathbf{r}) = \mathcal{R}g \left\{ \Psi^{t}(\mathbf{r}') \right\} \cdot H(\mathbf{u}) \qquad r' < u \qquad (2)$$

$$\mathcal{R}g \left\{ \Psi^{t}(\mathbf{r}) \right\} = \mathcal{R}g \left\{ \Psi^{t}(\mathbf{r}') \right\} \cdot J(\mathbf{u}) \qquad \forall r \qquad (3)$$

Le terme $\mathcal{R}g$ stipule qu'il faut prendre la partie dite régulière du développement quand le problème l'exige, c'est à dire pour éviter que le développement de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ tende vers l'infini en des points où il devrait avoir une valeur finie. Les relations (1) et (2) correspondent donc à des fonctions développées sur des bases irrégulières, et la relation (3) à des fonctions développées sur une base régulière. C'est le cas avec n'importe quelle onde incidente. Les matrices J et H sont les matrices de translation-addition régulières et irrégulières. Nous reviendrons par la suite sur leurs expressions. Considérons par exemple l'expression (3):

$$\mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r})\right\} = \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r}')\right\} \cdot J(\mathbf{u})$$
 $\forall r$

On a en un point M auquel sont associés dans nos 2 repères les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' l'expression, pour une fonction vectorielle $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ régulière:

$$egin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \mathbf{a}(\mathbf{r}^{'}) \\ \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r})\right\} \cdot a^{t} &= \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r}^{'})\right\} \cdot a^{'t} \\ \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r}^{'})\right\} \cdot J(\mathbf{u}) \cdot a^{t} &= \mathcal{R}g\left\{\mathbf{\Psi}^{t}(\mathbf{r}^{'})\right\} \cdot a^{'t} \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour une fonction vectorielle $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ régulière:

$$a^{t'} = J(\mathbf{u}) \cdot a^t$$

Pour une fonction irrégulière, on a, grâce aux relation (1) et (2):

$$a^{t'} = J(\mathbf{u}) \cdot a^{t}$$
 $r' > u$ (1)
 $a^{t'} = H(\mathbf{u}) \cdot a^{t}$ $r' < u$ (2)

Voyons l'expression de $J(\mathbf{u})$. Elle se déduit de celle de $H(\mathbf{u})$. Cette dernière est définie par:

$$H(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \overline{A}(\mathbf{u}) & \overline{B}(\mathbf{u}) \\ \overline{B}(\mathbf{u}) & \overline{A}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \qquad J(\mathbf{u}) = \mathcal{R}g\{H(\mathbf{u})\}$$

Les blocs $\overline{A}(\mathbf{u})$ et $\overline{B}(\mathbf{u})$ sont des sous matrices de même dimension, qui se calculent selon les formules:

$$\overline{A}_{(\nu,\mu);(n,m)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\nu(\nu+1)n(n+1)}} [2\mu m \overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^s + \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \sqrt{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)} \overline{\alpha}_{(\nu,\mu+1);(n,m+1)}^s + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \sqrt{(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)} \overline{\alpha}_{(\nu,\mu-1);(n,m-1)}^s]$$

$$B_{(\nu,\mu);(n,m)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\nu-1} \frac{1}{\nu(\nu+1)n(n+1)}} [2m\sqrt{(\nu-\mu)(\nu+\mu)} \overline{\alpha}_{(\nu-1,\mu);(n,m)}^s + \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \sqrt{(\nu-\mu)(\nu-\mu-1)} \overline{\alpha}_{(\nu-1,\mu+1);(n,m+1)}^s + \sqrt{(n+m)(n-m+1)} \sqrt{(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)} \overline{\alpha}_{(\nu-1,\mu-1);(n,m-1)}^s]$$

Le coefficient $\overline{A}_{(\nu,\mu);(n,m)}$ est en fait le coefficient \overline{A}_{ij} de la i-eme ligne et j-ieme colonne de la matrice $\overline{A}(\mathbf{u})$, sachant que:

$$i = \nu^2 + 2\nu$$
$$j = \mu^2 + 2\mu$$

les nombres du genre $\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^s$ étant définis grâce aux relations de récurrence suivantes, pour m positif:

$$a_{n-1,m}^+ \overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^s = -a_{n-1,m}^- \overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n-2,m)}^s + a_{\nu-1,\mu}^+ \overline{\alpha}_{(\nu-1,\mu);(n-1,m)}^s + a_{\nu+1,\mu}^+ \overline{\alpha}_{(\nu+1,\mu);(n-1,m)}^s \\ b_{n-1,n-1}^+ \overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,n)}^s = b_{\nu-1,\mu-1}^+ \overline{\alpha}_{(\nu-1,\mu-1);(n-1,n-1)}^s + b_{\nu+1,\mu-1}^- \overline{\alpha}_{(\nu+1,\mu-1);(n-1,n-1)}^s$$

$$a_{n,m}^{+} = -\left[\frac{(n+m+1)(n-m+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$a_{n,m}^{-} = \left[\frac{(n+m)(n-m)}{(2n+1)(2n-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_{n,m}^{-} = \left[\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(2n+1)(2n-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Les premiers termes étant donnés par:

$$\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(0,0)}^{s} = \sqrt{4\pi} \left(-1\right)^{\nu+\mu} Y_{\nu,-\mu} \left(\theta_{u},\phi_{u}\right) h_{\nu}(u)$$

C'est à cet endroit qu'intervient la différence entre $J(\mathbf{u})$ et $H(\mathbf{u})$. En effet, nous avons la relation: $J(\mathbf{u})=$ $\mathcal{R}g\{H(\mathbf{u})\}$; les fonctions de Hankel h_{ν} ne sont pas régulières: elles tendent vers l'infini à l'origine. Ainsi, la première ligne de la récurrence sur les coefficients $\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^s$ pour calculer $J(\mathbf{u})$ est:

$$\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(0,0)}^{s} = \sqrt{4\pi} \left(-1\right)^{\nu+\mu} Y_{\nu,-\mu} \left(\theta_{u}, \phi_{u}\right) j_{\nu}(u)$$

où les fonctions de Bessel de premier ordre j_{ν} sont elles régulières.

Les relations ci dessus ne marchent que pour les valeurs positives du coefficients m. Pour les valeurs négatives, il faut utiliser la relation:

$$\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^{s}(\mathbf{u}) = -(-1)^{\mu+m+\nu+n} \overline{\alpha}_{(\nu,-\mu);(n,-m)}^{s*}(-\mathbf{u}^{*}) \text{ si on calcule } H(\mathbf{u})$$

$$\overline{\alpha}_{(\nu,\mu);(n,m)}^{s}(\mathbf{u}) = (-1)^{\mu+m} \overline{\alpha}_{(\nu,-\mu);(n,-m)}^{s*}(\mathbf{u}^{*}) \text{ si on calcule } J(\mathbf{u})$$

et recommencer la récurrence en calculant $\overline{\alpha}_{(\nu,-\mu);(n,-m)}^{s*}(-\mathbf{u}^*)$ et $\overline{\alpha}_{(\nu,-\mu);(n,-m)}^{s*}(\mathbf{u}^*)$. Si le programme informatique à élaborer pour utiliser le théorème de translation-addition est hardi, il en est également de la théorie sur laquelle sont basées ces quelques explications qui n'ont pas vocation à démontrer cette théorie, mais juste à expliquer les étapes indispensables à la programmation du théorème.

B Les vecteurs harmoniques sphériques.

Nous allons à présent voir précisément la définition de la base $\Psi(\mathbf{r})$ sur laquelle nous avons développé les champs électriques et magnétiques lors de cette thèse. Pour son établissement, nous considérerons la résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques et verrons que les vecteurs de base que nous utilisons vérifient cette relation.

Pour le moment, nous allons donner quelques définitions "fonctionnelles", qui permettent la programmation numérique de la base $\Psi^t(\mathbf{r})$ sans s'intéresser à sa provenance. Tout d'abord, considérons sur cette base d'une fonction vectorielle quelconque $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Psi}^t(\mathbf{r}) \cdot a^t$$

Comme nous l'avons déja vu, le vecteur coefficient a contient l'information relative à la fonction $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Changer de fonction vectorielle revient à changer de vecteur coefficient. La base $\Psi^t(\mathbf{r})$ est une base infinie dont les éléments sont:

$$oldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{r}
ight)\equiv\left[egin{array}{c} \mathbf{M}\left(\mathbf{r}
ight)\ dots\ \mathbf{N}\left(\mathbf{r}
ight) \end{array}
ight]=\left[egin{array}{c} \mathbf{M}_{11}\left(\mathbf{r}
ight)\ dots\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ dots\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ dots\ \mathbf{N}_{nm}\left(\mathbf{r}
ight)\ dots\ \end{array}
ight].$$

L'entier n peut varier entre 0 et l'infini. A chaque entier n est associé 2n+1 entiers m. L'entier n désignent l'ordre multipolaire de la fonction à laquelle il est associé. Ainsi, pour l'ordre dipolaire, on a n=1 et m=-1,0,1. La base $\Psi^t(\mathbf{r})$ réduite à ses termes dipolaires s'écrit par conséquent:

$$egin{aligned} \Psi\left(\mathbf{r}
ight) \equiv \left[egin{array}{c} \mathbf{M}\left(\mathbf{r}
ight) \ \mathbf{N}\left(\mathbf{r}
ight) \end{array}
ight] = \left[egin{array}{c} \mathbf{M}_{11}\left(\mathbf{r}
ight) \ \mathbf{M}_{1-1}\left(\mathbf{r}
ight) \ \mathbf{N}_{11}\left(\mathbf{r}
ight) \ \mathbf{N}_{10}\left(\mathbf{r}
ight) \ \mathbf{N}_{1-1}\left(\mathbf{r}
ight) \end{array}
ight]. \end{aligned}$$

Pour n=1, elle contient 6 éléments. On démontre que pour un développement multipolaire d'ordre n, la base $\Psi(\mathbf{r})$ contient $2(n^2+2n)$ éléments. Les vecteurs $\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})$ sont définis à partir des vecteurs harmoniques sphériques(VHS) \mathbf{X}_{nm} , \mathbf{Y}_{nm} et \mathbf{Z}_{nm} :

$$\mathbf{M}_{nm}(\mathbf{r}) \equiv h_n(r) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{n(n+1)} h_n(r) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + \left[kr h_n(r)\right]' \mathbf{Z}_{nm}(\hat{\mathbf{r}}\theta, \phi) \right\}$$

Le point M formant avec l'origine O le vecteur \mathbf{r} est défini par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Les VHS sont quant à eux déterminés à partir de l'harmonique scalaire $Y_{n,m}(\theta, \phi)$:

$$\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \mathbf{r}Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

$$\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi}Y_{n,m}(\theta,\phi) \wedge \mathbf{r}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi}Y_{n,m}(\theta,\phi)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

où $\nabla_{\theta,\phi}$ est le laplacien angulaire défini par la relation $\nabla_{\theta,\phi} = \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ et $Y_{n,m}(\theta,\phi)$ défini par:

$$Y_{nm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

avec \mathbb{P}_n^m fonction de Legendre généralisée telle que:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

Ce formulaire permet la programmation des éléments de notre base $\Psi(\mathbf{r})$. Voyons à présent d'où vient cette base à travers la résolution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées sphériques.

B.1 Equation d'Helmholtz: cas scalaire

Considérons l'équation scalaire d'Helmholtz, en coordonnées sphériques, décrivant la propagation d'un champ à valeurs réelles $\Psi(\mathbf{r},t)$ dont l'onde qui l'accompagne a pour vitesse v:

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\Psi(\mathbf{r},t) = 0$$

En se plaçant dans le cas d'un régime harmonique, qui se traduit pour le champ par une dépendance en $exp(-i\omega t)$ et une pulsation spatiale $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$, l'équation devient:

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},\omega) + k^2\Psi(\mathbf{r},\omega) = 0$$

L'expression du laplacien en coordonnées sphériques est:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

On démontre que puisqu'il n'y a pas de dérivées croisées, il est possible de rechercher des solutions avec des variables séparées de la forme: $\Psi(\mathbf{r}) = f(r)g(\theta, \phi)$.

Il est à ce moment utile de séparer le laplacien en deux, avec d'un coté le laplacien radial Δ_r , et d'un autre le laplacien angulaire $\Delta_{\theta,\phi}$. Ces derniers ont alors pour expression:

$$\Delta_r \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi)$$

$$\Delta_{\theta,\phi} \Psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

et ainsi on a:

$$\Delta\Psi = \Delta_r \Psi + \Delta_{\theta,\phi} \Psi$$

D'où les équations:

$$\Delta\Psi = \Delta[f(r)g(\theta,\phi)] = \{\Delta_r + \Delta_{\theta,\phi}\}[f(r)g(\theta,\phi)] = g(\theta,\phi)\Delta_r[f(r)] + f(r)\Delta_{\theta,\phi}[g(\theta,\phi)].$$

Puisque résoudre l'équation d'Helmholtz revient à retrouver des fonctions Ψ vecteurs propres de valeur propre $-k^2$ pour le laplacien, on doit avoir :

$$\Delta[f(r)q(\theta,\phi)] = -k^2 f(r)q(\theta,\phi)$$

et par conséquent:

$$\Delta_r[f(r)] = \alpha f(r)$$
 et $\Delta_{\theta,\phi}[g(\theta,\phi)] = \beta g(\theta,\phi)$ avec $\alpha\beta = -k^2$

On revient donc à un problème de recherche de fonction vecteurs propres pour les laplaciens radial et angulaire, $\alpha = \alpha(\theta, \phi)$ n'étant pas dépendant de r et $\beta = \beta(r)$ n'étant dépendant ni de θ , ni de ϕ .

B.1.1 Laplacien angulaire

Etudions pour commencer les fonctions vecteur propre du **laplacien angulaire.** La géométrie du système impose aux solutions $g(\theta, \phi)$ la relation de périodicité sur ϕ : $g(\theta, \phi) = g(\theta, \phi + 2\pi)$. On recherche alors la solution sous la forme d'un développement de Fourier:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g_m(\theta)e^{im\phi}$$

les coefficients du développement étant calculables à partir de la relation :

$$g_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta, \phi) e^{-im\phi} d\phi$$

L'équation $\Delta_{\theta,\phi}[g(\theta,\phi)] = \beta g(\theta,\phi)$ devient alors, par projection sur la base de Fourier, pour tout m:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \{g_m(\theta)e^{im\phi}\}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \{g_m(\theta)e^{im\phi}\}}{\partial \phi^2} = \beta g_m(\theta)e^{im\phi}$$

Le terme de gauche peut êtrer exprimé sous la forme $D(\theta)e^{im\phi}$ après avoir exécuté la dérivation sur $e^{im\phi}$. On peut ainsi simplifier par $e^{im\phi}$, et de ce fait éliminer la dépendance en ϕ . L'équation précédente devient:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial g_m(\theta)}{\partial \theta}) - \frac{m^2 g_m(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = \beta g_m(\theta)$$
(A2)

Pour m=0, l'équation est:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial g_m(\theta)}{\partial \theta}) = \beta g_m(\theta) \tag{A3}$$

Nous allons voir qu'une telle équation a pour solutions une famille de polynômes appelée famille des polynômes de Legendre. Dans ce but, considérons un polynôme de Legendre quelconque d'ordre n. Celui-ci est défini par la formule de Rodrigue:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Il vérifie la relation:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] = -n(n+1)P_n(x) \tag{A4}$$

Posons $x = \cos\theta$ et donc $dx = -\sin\theta d\theta$. Ainsi, $\frac{d}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}$ et $(1 - x^2) = \sin^2\theta$, ce qui fait que la relation précédente devient:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}) = -n(n+1) P_n(\cos \theta)$$

Les polynômes de Legendre $P_n(\cos\theta)$ sont donc vecteurs propres de l'équation (A3), associés aux valeurs propres $\frac{-n(n+1)}{r^2}$. Il y a donc dans ce cas une infinité de solution.

Pour résoudre (A2) avec un coefficient m non nul, utilisons les fonctions de Legendre généralisées définies à partir des polynômes de Legendre selon la relation suivante:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

Il est intéressant de remarquer dès maintenant que les fonctions de Legendre généralisées bâties à partir du polynôme de Legendre d'ordre n sont au nombre de (2n+1). En effet, en utilisant la formule de Rodrigue définissant les polynômes de Legendre, on se rend compte que la formule précédente donne des résultats nuls pour m > n et n'est pas définie pour m < -n. Cette formule donnent donc un ensemble de fonctions P_n^m pour une valeur n donnée telles que l'entier m appartient à l'intervalle [-n;n].

de fonctions P_n^m pour une valeur n donnée telles que l'entier m appartient à l'intervalle [-n; n]. En prenant la relation (A4), en lui appliquant membre à membre la dérivation $\frac{d^m}{dx^m}$ avec $x = \cos\theta$ et en la multipliant par $(-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$, on obtient:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}) - \frac{m^2 P_n^m(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} = -n(n+1) P_n^m(\cos \theta)$$

Les fonctions P_n^m sont donc solutions de l'équation (A2), associées aux valeurs propres $\frac{-n(n+1)}{r^2}$; chaque valeur propre $\frac{-n(n+1)}{r^2}$ correspondant à une valeur de n est donc dégénérée, avec un espace de solutions de dimensions 2n+1. Ce qui nous amène à conclure que les fonctions généralisées de Legendre multipliées par $e^{im\phi}$ sont bien les fonctions vecteur propre du Laplacien angulaire en coordonnées sphériques. On obtient:

$$\Delta_{\theta,\phi}[P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}] = -\frac{n(n+1)}{r^2}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

En définissant les harmoniques sphériques par: $Y_{nm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$, la famille de fonctions $\{Y_{nm}\}_{n\in N, m\in [-n;n]}$ forme une base de fonctions vecteur propre du laplacien angulaire. Le terme multiplicatif $\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ est un terme de normalisation.

B.1.2 Cas du laplacien radial:

Comme dans le cas des coordonnées cylindriques, des fonctions spéciales appelées fonctions de Bessel sphériques sont les solutions de ce laplacien. La forme la plus générale est la fonction de Hankel définie à partir des fonctions de première espèce j_n et N_n par la relation $h_n(r) = j_n(r) + iN_n(r)$.

Des considérations physiques peuvent cependant appeler à éliminer comme solution du laplacien radial la fonction $N_n(r)$. C'est le cas par exemple lorsque l'on veut une solution qui ne diverge pas à l'origine: comme la divergence de N_n à l'origine est avérée, on ne considère comme seule solution du laplacien radial que la fonction de première espèce j_n .

La solution du laplacien radial est donc de la forme:

$$f(r) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} h_n(r)$$

Nous avons séparé la fonction solution en deux fonctions $f(r)g(\theta,\phi)$ à priori indépendantes. Nous allons voir qu'il n'en est rien. En effet, la solution du laplacien angulaire vérifie:

$$\Delta_{\theta,\phi}[Y_{n,m}(\theta,\phi)] = -\frac{n(n+1)}{r^2}Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

On a donc, lorsque l'on décompose le laplacien:

$$\begin{split} \Delta\left[f(r)g(\theta,\phi)\right] &= g(\theta,\phi)\Delta_r[f(r)] + f(r)\Delta_{\theta,\phi}[g(\theta,\phi)] \\ &= g(\theta,\phi)\left[\Delta_r[f(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}f(r)]\right] \\ \Delta\left[f(r)g(\theta,\phi)\right] &= -k^2f(r)g(\theta,\phi) \text{ par d\'efinition.} \end{split}$$

d'où:

$$\Delta_r[f(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}f(r)] = -k^2f(r)$$

L'indice n de l'équation précédente est ainsi fixé par la solution du laplacien angulaire. La seule solution de laplacien radial qui peut convenir est alors $h_n(r)$, n étant fixé par la donnée de $Y_{n,m}(\theta,\phi)$. De plus, n est pour les solutions du laplacien angulaire, positif.

La solution la plus générale à l'équation d'Helmholtz scalaire en coordonnées sphériques sera par conséquent la sommation suivante:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_n^m h_n(r) Y_{n,m}(\theta, \phi)$$

les termes a_n^m étant les coefficients du développement.

B.2 Equation d'Helmholtz: cas vectoriel

Nous allons à présent passer à la résolution de l'équation vectorielle de propagation en coordonnées sphériques.

A partir de l'harmonique sphérique $Y_{n,m}(\theta,\phi)$, construisons les trois vecteurs harmoniques sphériques (VHS) suivants :

$$\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \widehat{\mathbf{r}} Y_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi) \wedge \widehat{\mathbf{r}}}{\sqrt{n(n+1)}}$$
$$\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi)}{\sqrt{n(n+1)}}$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur radial unitaire et avec $\nabla_{\theta,\phi} = \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ gradient angulaire, $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ formant la base orthonormée usuellement utilisée en coordonnées sphériques. Le VHS $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$ est par construction orthogonal à $\hat{\mathbf{r}}$ qui lui-même est un vecteur radial On en déduit que $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$ est transverse; de plus sa divergence est nulle. A partir de ces vecteurs harmoniques sphériques, on construit les deux vecteurs:

$$\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = h_n(kr)\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr}\{[n(n+1)]^{\frac{1}{2}}h_n(kr)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + [krh_n(kr)]'\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)\}$$

Démontrons que ces deux vecteurs sont solutions de l'équation d'Helmholtz vectorielle, c'est à dire qu'ils vérifient:

$$\Delta \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$
$$\Delta \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Pour ce, il nous faut calculer leurs laplaciens. Nous le ferons en calculant leurs rotationnels et leurs divergences, puis nous utiliserons la relation $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$. Commençons par leurs divergences.

Il est intéressant de remarquer que $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$ est dirigé selon l'harmonique transverse $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$. En effet, cette propriété va se révéler fort utile quand on écrira la continuité tangentielle des champs dans la théorie de Mie, puisque cette continuité s'exprime par le fait que la divergence des champs est nulle au sens des fonctions. Pour l'instant, elle nous permet d'affirmer que la divergence du vecteur $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$ est nulle. Nous allons à présent démontrer qu'il en est de même en ce qui concerne la divergence de $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$. Pour ce, on calcule, en utilisant la formule de la divergence en coordonnées sphériques:

$$\nabla \cdot \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 Y_{n,m}(\theta,\phi)) = 2 \frac{Y_{n,m}(\theta,\phi)}{r}$$

on rappelle à cette occasion que $Y_{n,m}(\theta,\phi)$ ne dépend pas de r. On a ensuite la relation:

$$\nabla \cdot \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = -\nabla \cdot (\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi))$$

qui peut se développer grâce à la relation $div(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{b})$, et en tenant compte du fait que $\nabla \wedge \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$:

$$\begin{split} \nabla \cdot \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) &= -\nabla \cdot (\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)) \\ &= \widehat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)) - \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) \cdot (\nabla \wedge \widehat{\mathbf{r}}) \\ &= \widehat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)) \\ &= -\frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} \widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) \\ \nabla \cdot \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) &= -\frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} Y_{n,m}(\theta,\phi) \end{split}$$

La définition du vecteur $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ montre que celui ci est de la forme:

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \left\{ \frac{1}{(kr)} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} g(r) \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + [g(r)]' \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) \right\}$$

ou l'on a posé $g(r) = krh_n(kr)$. En utilisant la relation $div(\alpha \mathbf{a}) = \alpha div(\mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}(\alpha)$, on développe la divergence du vecteur $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$:

$$\begin{split} \nabla \cdot \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) &= \frac{1}{(kr)^2} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} g(r) \nabla \cdot \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) \cdot \mathbf{grad}(\frac{1}{(kr)^2} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} g(r)) \\ &+ \frac{1}{kr} [g(r)]' \nabla \cdot \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) + \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) \cdot \mathbf{grad}(\frac{1}{kr} [g(r)]') \end{split}$$

[g(r)]' est une fonction de r: son gradient sera donc dirigé selon le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$. Or, le vecteur $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$ est par définition transverse. On en déduit donc que $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) \cdot \mathbf{grad}(\frac{1}{kr}[g(r)]') = 0$. Grâce aux expressions de $\nabla \cdot \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$ et $\nabla \cdot \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ que nous avons développé, la relation précédente devient:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) \left[\frac{2}{k^2 r^3} g(r) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(kr)^2} g(r) \right] - \frac{[g(r)]'}{kr^2} \right]$$
$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(kr)^2} g(r) \right] = -\frac{2}{k^2 r^3} g(r) + k \frac{[g(r)]'}{k^2 r^2}$$

On obtient la relation désirée:

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Nous allons à présent calculer les rotationnels de ces deux vecteurs. Dans ce but, calculons les 3 rotationnels des vecteurs $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$, $\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ et $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$ qui les composent.

$$\nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \nabla \wedge (\widehat{\mathbf{r}}Y_{n,m}(\theta,\phi))$$

A l'aide de $\nabla \wedge (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \wedge \mathbf{a} + \psi \nabla \wedge \mathbf{a}$ et $\nabla \wedge \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, on a:

$$\nabla \wedge (\widehat{\mathbf{r}}Y_{n,m}(\theta,\phi)) = \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) \wedge \widehat{\mathbf{r}}$$

Puis on utilise les deux relations $\nabla \psi = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\theta,\phi} \psi$ et $\frac{\partial Y_{n,m}(\theta,\phi)}{\partial r} = 0$ pour développer le gradient de $Y_{n,m}(\theta,\phi)$, ce qui permet d'obtenir:

$$\nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) \wedge \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} \left[\nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi) \right] \wedge \hat{\mathbf{r}}$$

soit l'égalité:

$$\nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{r} \left[\nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi) \right] \wedge \hat{\mathbf{r}}$$

en utilisant la définition de $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$, on en arrive à l'égalité:

$$\nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

De même, calculons le rotationnel de $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$:

$$\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla \wedge \nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

Or, puisque $\nabla \psi = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\theta,\phi} \psi$, on a en tenant compte du fait que $\frac{\partial Y_{n,m}(\theta,\phi)}{\partial r} = 0$:

$$\nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi) = r \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

Donc

$$\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla \wedge (r \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi))$$

Utilisons $\nabla \wedge (\alpha \Psi) = \nabla \alpha \wedge \Psi + \alpha \nabla \wedge \Psi$ ce qui nous donne, avec $\alpha = r$ et $\Psi = \nabla Y_{n,m}(\theta, \phi)$:

$$\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\nabla r \wedge \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) + r \nabla \wedge \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) \right]$$

Comme $\nabla \wedge \nabla \Psi = \mathbf{0}$, $r \nabla \wedge \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) = \mathbf{0}$. De plus, on a: $\nabla r = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\theta,\phi}(r) = \hat{\mathbf{r}}$. On obtient alors:

$$\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \nabla Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

Nous avons déjà vu que $\nabla Y_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{r} \nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi)$. Finalement, le rotationnel du vecteur harmonique sphérique $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$ s'écrit, en utilisant la définition de $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$:

$$\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{1}{r\sqrt{n(n+1)}} \widehat{\mathbf{r}} \wedge \nabla_{\theta,\phi} Y_{n,m}(\theta,\phi) = -\frac{1}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

Les rotationnels de $\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$ et $\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ sont ainsi dirigés selon $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$, donc selon $\mathbf{M}_{n,m}(\theta,\phi)$. Or, $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ est par définition de la forme $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + g(r)\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$. Il est donc raisonnable de penser que le rotationnel de $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ sera donc orienté selon $\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$, donc colinéaire à $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$. Il faut pour le calculer précisément calculer des rotationnels du type $\nabla \wedge f(r)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ et $\nabla \wedge g(r)\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$. Nous démontrerons de cette façon que le rotationnel de $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ est en fait égal à $k\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$. Prenons pour commencer la relation:

$$\nabla \wedge (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \wedge \mathbf{a} + \psi \nabla \wedge \mathbf{a}$$

qui implique:

$$\nabla \wedge f(r) \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \nabla f(r) \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + f(r) \nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$\nabla \wedge g(r) \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = \nabla g(r) \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) + g(r) \nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$$

Le VHS $\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ est par définition radial. De plus, le gradient de f(r) l'est aussi. Le produit vectoriel $\nabla f(r) \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$ est donc nul. On en déduit la simplification:

$$\nabla \wedge f(r)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = f(r)\nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi)$$

soit combiné avec le résultat $\nabla \wedge \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$ l'égalité:

$$\nabla \wedge f(r)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) = f(r)\frac{\sqrt{n(n+1)}}{r}\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

De plus, on vérifie aisément à partir de leurs définition que:

$$\widehat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = -\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

En utilisant le fait que $\nabla g(r) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\theta,\phi}(g) = g'(r) \hat{\mathbf{r}}$ et que $\nabla \wedge \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = -\frac{1}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$, on arrive à:

$$\nabla \wedge g(r)\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi) = -\frac{g(r)}{r}\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) - g'(r)\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

on peut ainsi calculer le rotationnel de $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$. En effet, ce vecteur est de la forme:

$$\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + g(r)\mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$$

d'où:

$$\nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = f(r) \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) - \frac{g(r)}{r} \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) - g'(r) \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$= (f(r) \frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} - \frac{g(r)}{r} - g'(r)) \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$= F(r) \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$

où l'on a posé:

$$F(r) = (f(r)\frac{\sqrt{n(n+1)}}{r} - \frac{g(r)}{r} - g^{'}(r))$$

Ici, on a, pour respecter la définition de $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$:

$$f(r) = \frac{1}{kr} [n(n+1)]^{\frac{1}{2}} h_n(kr)$$
$$g(r) = \frac{1}{kr} [krh_n(kr)]'$$

on en déduit:

$$F(r) = -\frac{1}{kr^2} [n(n+1)]h_n(kr) + \frac{1}{kr^2} [krh_n(kr)]' + \left(\frac{1}{kr} [krh_n(kr)]'\right)'$$

Puis on développe le terme:

$$\left(\frac{1}{kr}[krh_n(kr)]'\right)' = \frac{1}{kr}[krh_n(kr)]'' - \frac{1}{kr^2}[krh_n(kr)]'$$

donc:

$$F(r) = -\frac{1}{kr^2}n(n+1)h_n(kr) + \frac{1}{kr}[krh_n(kr)]''$$

On développe alors le terme dérivé deux fois par rapport à r en utilisant la relation:

$$[xh_n(x)]^{"} = x[h_n(x)]^{"} + 2[h_n(x)]^{"}$$

relation qui pour x = kr donne:

$$\frac{\partial^2}{\partial (kr)^2}[krh_n(kr)] = kr\frac{\partial^2}{\partial (kr)^2}[h_n(kr)] + 2.\frac{\partial}{\partial (kr)}[h_n(kr)]$$

donc

$$\begin{split} \frac{1}{kr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[krh_n(kr)] &= \frac{1}{kr}k^2\frac{\partial^2}{\partial (kr)^2}[krh_n(kr)] \\ &= \frac{k}{r}[kr\frac{\partial^2}{\partial (kr)^2}[h_n(kr)] + 2.\frac{\partial}{\partial (kr)}[h_n(kr)]] \\ &= \frac{k}{r}[\frac{kr}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[h_n(kr)] + \frac{2}{k}\frac{\partial}{\partial r}[h_n(kr)]] \\ \frac{1}{kr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[krh_n(kr)] &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}[h_n(kr)] + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[h_n(kr)] \end{split}$$

ainsi, on finit par obtenir la relation:

$$F(r) = -k \left[-\frac{1}{k^2 r^2} n(n+1) h_n(kr) + \frac{2}{kr} [h_n(kr)]' + [h_n(kr)]'' \right]$$

La fonction $h_n(r)$ est par définition la solution de l'équation différentielle:

$$h_n''(r) + \frac{2}{r}h_n'(r) + \left[1 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]h_n(r) = 0$$

$$h_n''(r) + \frac{2}{r}h_n'(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}h_n(r) = -h_n(r)$$

Grâce à cette équation, on obtient:

$$F(r) = kh_n(kr)$$

et ainsi:

$$\nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = kh_n(kr)\mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$= k\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

On démontre par une démarche analogue la relation:

$$\nabla \wedge \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

à partir des deux relations calculées:

$$\nabla \wedge \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) = \sqrt{n(n+1)} \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$$
$$\nabla \wedge f(r) \mathbf{X}_{n,m}(\theta,\phi) = \frac{f(r)}{r} \sqrt{n(n+1)} \mathbf{Y}_{n,m}(\theta,\phi) + \left[\frac{f(r)}{r} + f'(r) \right] \mathbf{Z}_{n,m}(\theta,\phi)$$

Les relations sur les rotationnels des vecteurs de base donnent, lorsqu'on les combine:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k^2 \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$$
$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = k^2 \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$$

De plus on a d'une part la relation $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}$, et d'autre part des divergences nulles pour les vecteurs $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ d'après ce qui a été dit précédemment. Donc:

$$\Delta \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$
$$\Delta \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

les vecteurs $\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})$ et $\mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r})$ sont solutions transverses de l'équation de propagation vectorielle.

Toute solution $\mathbf{E}(k\mathbf{r})$ de l'équation de propagation vectorielle telle que sa divergence est nulle s'écrit donc sous la forme:

$$\mathbf{E}(k\mathbf{r}) = E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (\mathbf{M}_{n,m}(k\mathbf{r})[a]_{n,m}^{M} + [a]_{n,m}^{N} \mathbf{N}_{n,m}(k\mathbf{r}))$$

C Décomposition d'une onde plane en harmoniques sphériques

Afin de décomposer une onde plane vectorielle en harmoniques sphériques, nous allons tenter de généraliser la décomposition d'une onde plane scalaire:

$$\exp\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = \sum_{q=0}^{\infty} i^{q}(2q+1)j_{q}(kr)P_{q}\left(\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right)$$
(A5)

qui, si on utilise la relation suivante sur les polynômes de Legendre:

$$P_q\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = \frac{4\pi}{2q+1} \sum_{m=-q}^{q} Y_{qm}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{qm}(\theta, \phi)$$
(A6)

donne:

$$\exp\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = 4\pi \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=-q}^{q} i^{q} j_{q}(kr) Y_{qm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) Y_{qm}(\theta, \phi)$$

Les coordonnées (θ_k, ϕ_k) sont les coordonnées angulaire du vecteur d'onde incident \mathbf{k} , (θ, ϕ) celles du vecteur position \mathbf{r} . On définit les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ et $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Définissons les 3 vecteurs suivants:

$$\widehat{\chi}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{\mathbf{x}} + i\widehat{\mathbf{y}})$$

$$\widehat{\chi}_0 = \widehat{\mathbf{z}}$$

$$\widehat{\chi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\widehat{\mathbf{x}} - i\widehat{\mathbf{y}})$$

Ces 3 vecteurs forment une base, puisqu'ils vérifient les relations de fermeture et de complétude:

$$\sum_{\mu=-1}^{1} \widehat{\chi}_{\mu}^* \widehat{\chi}_{\mu} = 1 \|, \quad \widehat{\chi}_{\mu}^* \cdot \widehat{\chi}_{\tau} = \delta_{\mu,\tau}$$

où 1 désigne le tenseur identité d'ordre 2. A partir de ces vecteurs, et en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordon, on peut définir d'autres vecteurs harmoniques sphériques que ceux que nous utilisons habituellement:

$$\mathbf{Y}_{nq}^{m} = \sum_{\mu=-1}^{1} (q, m-\mu; 1, \mu + n, m) Y_{q, m-\mu} \widehat{\chi}_{\mu}, \qquad q = n-1, n, n+1$$

Ces 3 vecteurs forment eux aussi une base:

$$\int_{\Omega} d\Omega \left(\mathbf{Y}_{n'q'}^{m'}(\widehat{\mathbf{r}}) \right)^* \cdot \mathbf{Y}_{nq}^{m}(\widehat{\mathbf{r}}) = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{qq'}$$
$$\sum_{n,m,q} \left(\mathbf{Y}_{nq}^{m}(\widehat{\mathbf{r}}) \right)^* \cdot \mathbf{Y}_{nq}^{m}(\widehat{\mathbf{r}}') = 1 \|$$

Si l'on multiplie le développement (A6) par le tenseur identité d'ordre 2:

$$1||P_q\left(\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = \frac{4\pi}{2q+1} \sum_{n,m} \mathbf{Y}_{nq}^{m*}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{Y}_{nq}^m(\theta, \phi)$$

On peut faire pareil avec le (A5):

$$1\|\exp\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = 4\pi \sum_{n,m,q} i^q j_q(kr) \mathbf{Y}_{nq}^{m*}(\theta_k,\phi_k) \mathbf{Y}_{nq}^m(\theta,\phi)$$

Si l'onde plane est polarisée suivant un vecteur $\hat{\mathbf{e}}_i$, et que l'on multiplie chaque terme de l'équation ci dessus scalairement par ce vecteur de polarisation:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{i} \exp\left(i\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}\right) = 4\pi \sum_{n m, q} i^{q} j_{q}(kr) \mathbf{Y}_{nq}^{m*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \mathbf{Y}_{nq}^{m}(\theta, \phi) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{i}$$
(A7)

C'est le développement en vecteurs harmoniques sphériques que nous recherchons. Il faut juste le réécrire, afin de faire ressortir les vecteurs de base \mathbf{M}_{nm} et \mathbf{N}_{nm} :

$$\mathbf{X}_{nm} = \frac{1}{i} \mathbf{Y}_{nn}^{m}$$

$$\mathbf{Z}_{nm} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{n,n-1}^{m} + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{n,n+1}^{m}$$

$$\mathbf{Y}_{nm} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{n,n-1}^{m} - \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{n,n+1}^{m}$$

soit:

$$\mathbf{Y}_{nn}^{m} = i\mathbf{X}_{nm}$$

$$\mathbf{Y}_{n,n-1}^{m} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_{nm} + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{nm}$$

$$\mathbf{Y}_{n,n-1}^{m} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_{nm} - \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{nm}$$

D'après la définition des vecteurs \mathbf{Y}_{nq}^m , q peut valoir n-1, n et n+1. La relation (A7) donne pour q=n-1:

$$4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} j_{n-1}(kr) \mathbf{Y}_{nn-1}^{m*}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{Y}_{nn-1}^m(\theta, \phi)$$

$$= 4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} j_{n-1}(kr) \left(\frac{n+1}{2n+1} \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k)\right)$$

$$+ \frac{n}{2n+1} \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k) + \frac{(n(n+1))^{\frac{1}{2}}}{2n+1} \left(\mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k) + \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k)\right)$$
pour $q = n$:

$$4\pi \sum_{n,m} i^n j_n(kr) \mathbf{Y}_{nn}^{m*}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{Y}_{nn}^m(\theta, \phi) = 4\pi \sum_{n,m} i^n j_n(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{X}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k)$$

et pour q = n + 1:

$$4\pi \sum_{n,m} i^{n+1} j_{n+1}(kr) \mathbf{Y}_{nn+1}^{m*}(\theta_k, \phi_k) \mathbf{Y}_{nn+1}^{m}(\theta, \phi)$$

$$= 4\pi \sum_{n,m} i^{n+1} j_{n+1}(kr) \left(\frac{n}{2n+1} \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_k, \phi_k)\right)$$

$$+ \frac{n+1}{2n+1} \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_k, \phi_k) - \frac{(n(n+1))^{\frac{1}{2}}}{2n+1} \left(\mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_k, \phi_k) + \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_k, \phi_k)\right)$$

Ainsi, le développement (A7) se réécrit:

$$1\|\exp\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right)$$

$$= 4\pi \sum_{n,m} i^{n} j_{n}(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} \frac{i^{n-1}}{2n+1} \left[(n+1) j_{n-1}(kr) - n j_{n+1}(kr) \right] \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} \frac{i^{n-1}}{2n+1} \left[n j_{n-1}(kr) - (n+1) j_{n+1}(kr) \right] \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} \frac{i^{n-1}}{2n+1} \sqrt{n(n+1)} \left[j_{n-1}(kr) + j_{n+1}(kr) \right] \left[\mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) + \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \right]$$

Utilisons les relations de réccurence sur les fonctions de Bessel:

$$j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x)$$

$$nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x) = (2n+1)j'_n(x)$$

$$(n+1)j_{n-1}(x) - nj_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} [xj_n(x)]'$$

notre développement devient:

$$1 \| \exp \left(i \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right)$$

$$= 4\pi \sum_{n,m} i^{n} j_{n}(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \left[\frac{1}{kr} \left[x j_{n}(kr) \right]' \right] \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \left[j_{n}'(kr) \right] \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$+ 4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \sqrt{n(n+1)} \left[\frac{1}{kr} j_{n}(kr) \right] \left[\mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) + \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \right]$$

$$= 4\pi \sum_{n,m} i^{n} j_{n}(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \frac{1}{kr} \left(\sqrt{n(n+1)} j_{n}(kr) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + \left[x j_{n}(kr) \right]' \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \right) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

$$4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \frac{1}{kr} \left(\sqrt{n(n+1)} j_{n}(kr) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) + \left[x j_{n}(kr) \right]' \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \right) \mathbf{Y}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k})$$

Cette dernière relation sera multiplié scalairement par $\hat{\mathbf{e}}_i$ pour obtenir une onde plane vectorielle. Cette onde est transverse, et puisque $\mathbf{Y}_{nm}^*(\theta_k, \phi_k)$ est radial, on trouvera:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{i} \exp\left(i\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}\right) = 4\pi \sum_{n,m} i^{n} j_{n}(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{i} + 4\pi \sum_{n,m} i^{n-1} \frac{1}{kr} \left(\sqrt{n(n+1)} j_{n}(kr) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + \left[x j_{n}(kr)\right]' \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi)\right) \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{i}$$

Rappelons la définition de nos vecteurs de base:

$$\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}) = j_n(kr)\mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \left(\sqrt{n(n+1)} j_n(kr) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) + \left[x j_n(kr) \right]' \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \right)$$

nous obtenons finalement la reltion désirée:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{i} \exp\left(i\widehat{\mathbf{k}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}\right) = \sum_{n,m} \mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}) \left(4\pi i^{n} \mathbf{X}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{i}\right) + \sum_{n,m} \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r}) \left(4\pi i^{n-1} \mathbf{Z}_{nm}^{*}(\theta_{k}, \phi_{k}) \cdot \widehat{\mathbf{e}}_{i}\right)$$

Si l'on définit notre repère sphérique en prenant le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{z}}$ tel que:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}$$

on en déduit tout naturellement les coordonnées du vecteur d'onde (k,0,0). Les fonctions $\mathbf{X}_{nm}^*(\theta_k,\phi_k)$ et $\mathbf{Z}_{nm}^*(\theta_k,\phi_k)$ sont alors nulles pour $||m|| \neq 1$ du fait des polynomes de Legendre qu'elles contiennent. On démontrent que le développement d'une onde plane sur une base de vecteurs harmoniques sphériques devient alors:

$$\widehat{\mathbf{e}}_{i} \exp\left(i\widehat{\mathbf{k}} \cdot \widehat{\mathbf{r}}\right) = \sum_{n, ||m||=1} i^{n} \delta_{m,1} \sqrt{\pi \left(2n+1\right)} e^{-i\phi} \left[i\theta + \phi\right] \bullet \widehat{\mathbf{e}}_{i} \left(\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}) + \mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r})\right)$$

D modélisation d'un faisceau laser selon l'approximation de Davis.

D.1 Généralités sur les faisceaux lasers.

Nous allons tout d'abord utiliser le modèle gaussien d'un faisceau laser et sa terminologie afin de définir certains paramètres. L'axe z du repère sera l'axe de propagation du faisceau. Ainsi, les plans transverses seront perpendiculaires à cet axe z.

Le faisceau considéré est caractérisé par :

• Le rayon du faisceau w(z), qui est un indicateur pour savoir si oui ou non le faisceau est large. Si E(r,z) est l'amplitude du champ électrique associé à l'onde incidente, w(z) est défini par la relation:

$$E(w(z), z) = \frac{1}{e}E(0, z)$$

La valeur minimale de ce rayon est appelée le 'waist', où rayon de ceinture, du faisceau, et sera appelée w_0 .

• La divergence ou longueur de diffraction du faisceau l; elle est liée au waist du faisceau et à la norme du vecteur d'onde incident par la relation:

$$l = kw_0^2$$

• Le paramètre s, qui est défini à partir du waist et de la longueur de diffraction grâce au rapport:

$$s = \frac{w_0}{l} = \frac{1}{kw_0} = \frac{\lambda}{2\pi w_0}$$

il apparaı̂t ainsi comme étant la longueur d'onde divisée par la circonférence du faisceau dans le plan du waist. Le paramètre s est par conséquent sans dimension.

Après cette introduction, nous allons décrire les différents champs associés au faisceau laser grâce à l'introduction du potentiel vecteur $\bf A$ dont ils dérivent.

D.2 Calcul des coefficients de la décomposition

La formulation de Davis permet d'obtenir une bonne approximation des faisceaaux laser. On part du potentiel vecteur dont sont issus les champs:

$$\mathbf{A} = (A_x, 0, 0)$$
 (A8)
$$A_x(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \exp(ikz) \exp(-i\omega t)$$

Les champs électriques et magnétiques sont liés à ce potentiel vecteur grâce aux équations:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U = i\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U \end{aligned}$$

La fonction U est le potentiel scalaire que la condition de jauge de Lorentz nous permet de relier au potentiel vecteur:

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \, \mathbf{A} + \frac{\partial U}{c^2 \partial t} &= 0 \\ \mathbf{div} \, \mathbf{A} - \frac{i\omega U}{c^2} &= 0 \\ U &= -\frac{ic}{k} \mathbf{div} \, \mathbf{A} \end{aligned}$$

On rappelle à cette occasion que toutes les dépendances temporelles sont en $\exp(-i\omega t)$. Ainsi, dériver par rapport au temps revient à multiplier par $-i\omega$. De plus, la norme du vecteur d'onde k est liée à la pulsation temporelle ω du vecteur potentiel par la relation $k = \omega/c$. Nous allons à présent utiliser le fait

que le vecteur potentiel \mathbf{A} vérifie l'équation d'Helmholtz. Cela nous permettra d'exprimer la fonction inconnue $\Psi\left(x,y,z\right)$ et par la suite calculer les différents champs. Enfin, nous ferons les approximations qui nous permettrons d'aboutir à l'expression des champs du faisceau laser.

Comme nous venons de le dire, le vecteur potentiel satisfait l'équation d'Helmholtz:

$$\Delta A_x + k^2 A_x = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x + k^2 A_x = 0$$
(A9)

Développons le terme suivant z:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}A_{x}=\exp\left(ikz\right)\left\{ \frac{\partial^{2}\Psi\left(x,y,z\right)}{\partial z^{2}}-k^{2}\Psi\left(x,y,z\right)+2ik\frac{\partial\Psi\left(x,y,z\right)}{\partial z}\right\}$$

développement où on a négligé comme il est de coutume la dépendance temporelle. Réinjecté dans l'équation de propagation, tout cela donne, après simplification par le terme propagif $\exp(ikz)$:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\Psi\left(x,y,z\right) + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\Psi\left(x,y,z\right) + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\Psi\left(x,y,z\right) + 2ik\frac{\partial}{\partial z}\Psi\left(x,y,z\right) = 0 \tag{A10}$$

Nous allons à cet instant du calcul introduire les paramètres sans dimensions:

$$\xi = \frac{x}{w_0}, \qquad \eta = \frac{y}{w_0}, \qquad \zeta = \frac{z}{l}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{s^2}{w_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Cette introduction n'est pas fortuite: elle va nous permettre d'utiliser le paramètre sans dimensions s, qui va être déterminant dans le cadre des approximations que nous aurons à faire par la suite. Pour l'instant, en multipliant l'équation de propagation par le waist au carré w_0^2 , on obtient:

$$w_{0}^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\Psi\left(x,y,z\right)+w_{0}^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\Psi\left(x,y,z\right)+w_{0}^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\Psi\left(x,y,z\right)+2ikw_{0}^{2}\frac{\partial}{\partial z}\Psi\left(x,y,z\right)=0$$

équation qui a pour suite, en utilisant donc les paramètres sans dimensions :

$$\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} \Psi\left(\xi, \eta, \zeta\right) + \frac{\partial^{2}}{\partial \eta^{2}} \Psi\left(\xi, \eta, \zeta\right) + 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi\left(\xi, \eta, \zeta\right) + s^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial \zeta^{2}} \Psi\left(\xi, \eta, \zeta\right) = 0 \tag{A11}$$

Cette équation comporte une infinité de solutions. Nous allons rechercher des fonctions Ψ telles que:

$$\Psi = \Psi_0 + s^2 \Psi_2 + s^4 \Psi_4 + \dots$$

Le fait de rechercher une solution sous cette forme est liée à la présence du terme en s^2 dans l'équation précédente. En effet, cette équation s'écrit, lorsque l'on remplace Ψ par l'expression recherchée:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} \Psi_{0}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial^{2}}{\partial \eta^{2}} \Psi_{0}(\xi, \eta, \zeta) + 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{0}(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial \eta^{2}} + 2i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Psi_{2n+2} = -\frac{\partial^{2}}{\partial \zeta^{2}} \Psi_{2n} \qquad n \geq 0$$
(A12)

On a ainsi une équation simplifiée permettant de calculer le terme Ψ_0 . De plus, on remarque que même si on peut calculer les termes du développement de façon récursive à partir de Ψ_0 grâce à l'équation (A12), il est facile de faire des approximations à condition que s << 1, soit $\lambda << w_0$.

Le nombre des fonctions Ψ_0 solutions de l'équation (A12) est infini. Nous allons en choisir une telle qu'elle soit solution du mode 0 d'un laser. La fonction Ψ_0 s'écrit ainsi:

$$\Psi_0 = -iQ \exp(iQh^2)$$

avec

$$Q = \frac{1}{i + 2\zeta} \qquad \qquad h^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Vérifions dans un premier temps que cette fonction est bien solution de l'équation (A12). Calculons dans un premier temps $\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \xi^2}$:

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} = Q^2 2\xi \exp\left(iQh^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Q^2 2\xi \exp\left(iQh^2\right) = Q^2 2\exp\left(iQh^2\right) + iQ^3 4\xi^2 \exp\left(iQh^2\right)$$

$$\operatorname{donc} \qquad \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \xi^2} = 2Q^2 \exp\left(iQh^2\right) + i4Q^3 \xi^2 \exp\left(iQh^2\right)$$

On obtient donc, en tenant compte du rôle symétrique joué par ξ et η et découlant du fait que le faisceau est transverse:

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \eta^2} = 4Q^2 \exp\left(iQh^2\right) + i4Q^3h^2 \exp\left(iQh^2\right) \tag{A13}$$

Accomplissons à présent les dérivées par rapport à ζ :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} Q = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{i + 2\zeta} = -\frac{2}{(i + 2\zeta)^2} = -2Q^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \exp(iQh^2) = -i2h^2Q^2 \exp(iQh^2)$$

pour aboutir finalement à l'égalité

$$2i\frac{\partial}{\partial \zeta}(-iQ\exp\left(iQh^2\right)) = -4Q^2\exp\left(iQh^2\right) - i4Q^3h^2\exp\left(iQh^2\right) \tag{A14}$$

En sommant (A13) et (A14), on vérifie donc de cette façon le fait que Ψ_0 est bien solution de l'équation (A12):

$$\begin{split} &\frac{\partial^{2}\Psi_{0}}{\partial\xi^{2}} + \frac{\partial^{2}\Psi_{0}}{\partial\eta^{2}} + 2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\Psi_{0}\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ &= 4Q^{2}\exp\left(iQh^{2}\right) + i4Q^{3}h^{2}\exp\left(iQh^{2}\right) - 4Q^{2}\exp\left(iQh^{2}\right) - i4Q^{3}h^{2}\exp\left(iQh^{2}\right) \\ &= 0 \end{split}$$

Nous allons ainsi faire une approximation au premier ordre en s du potentiel vecteur, c'est à dire prendre $\Psi = \Psi_0$. Le potentiel vecteur sera donc défini par:

$$\begin{split} \mathbf{A} &= (A_x, 0, 0) \\ A_x \left(x, y, z, t \right) &= \Psi_0 \exp \left(ikz \right) \exp \left(-i\omega t \right) \\ A_x \left(x, y, z, t \right) &= -iQ \exp \left(iQ \left(\frac{x+y}{w_0} \right)^2 \right) \exp \left(ikz \right) \exp \left(-i\omega t \right) \end{split}$$

A présent, calculons les champs électriques et magnétiques découlant de ce potentiel (on se place dans le repère $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, avec z direction de propagation du faisceau incident et O point de l'axe optique tel que $w(z) = w_0$):

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$
$$= \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial z} A_x - \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial y} A_x$$

ce qui donne, en posant $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$:

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x$$

$$B_z = -\frac{\partial}{\partial y} A_x$$

relations à partir desquelles on calcule, en tenant compte du fait que Q ne dépend pas de y:

$$B_z = -\frac{\partial}{\partial y} \Psi_0 \exp(ikz) = \frac{\partial}{\partial y} iQ \exp\left(iQ \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp(ikz)$$
$$= -2y \frac{Q^2}{w_0^2} \exp\left(iQ \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp(ikz) = -2y \frac{Q}{w_0^2} \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

où l'on a posé $\widetilde{\Psi}_0 = Q \exp \left| iQh^2 \right|$. En ce qui concerne B_y :

$$B_{y} = \frac{\partial}{\partial z} A_{x}$$

$$B_{y} = \frac{\partial \Psi_{0}}{\partial z} \exp(ikz) + ik\Psi_{0} \exp(ikz)$$

Il nous faut alors évaluer $\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} iQ \exp\left(iQh^2\right)$$

$$= -i\frac{\partial Q}{\partial z} \exp\left(iQh^2\right) - iQ\frac{\partial(\exp\left(iQh^2\right))}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -i\frac{\partial Q}{\partial z} \exp\left(iQh^2\right) - iQ\frac{\partial Q}{\partial z} ih^2 \exp\left(iQh^2\right)$$

Comme on sait que:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}Q = -2Q^2$$

$$\zeta = \frac{z}{l}$$

on trouve pour $\frac{\partial}{\partial z}Q$:

$$\frac{\partial}{\partial z}Q = \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta}Q = -\frac{2Q^2}{l}$$

ce qui nous permet de calculer $\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -i \frac{\partial Q}{\partial z} \exp\left(iQh^2\right) - iQ \frac{\partial Q}{\partial z} ih^2 \exp\left(iQh^2\right)$$
$$= i \frac{2Q^2}{l} \exp\left(iQh^2\right) - \frac{2Q^3}{l} h^2 \exp\left(iQh^2\right)$$
$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = -\frac{2Q}{l} \Psi_0 + i \frac{2Q^2}{l} h^2 \Psi_0$$

On trouve ainsi, pour B_y :

$$B_y = \left(ik - \frac{2Q}{l} + i\frac{2Q^2h^2}{l}\right)\Psi_0 \exp(ikz)$$

$$B_y = \left(\frac{s^{-1}}{w_0} + i\frac{2Q}{w_0}s - \frac{2Q^2h^2}{w_0}s\right)\widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

expression dans laquelle on a bien sûr utilisé la définition du paramètre s et celle de $\widetilde{\Psi}_0$ donnée précédemment:

$$s = \frac{w_0}{l}$$

Prenons comme valeur pour l'amplitude B_0 du champ magnétique $B_0 \equiv \frac{s^{-1}}{w_0}$. On peut ainsi écrire:

$$B_{y} = \frac{s^{-1}}{w_{0}} \left(1 + i2Qs^{2} - 2Q^{2}h^{2}s^{2} \right) \widetilde{\Psi}_{0} \exp(ikz)$$

$$= B_{0} \left(1 + i2Qs^{2} - 2Q^{2}h^{2}s^{2} \right) \widetilde{\Psi}_{0} \exp(ikz)$$

$$= B_{0} \widetilde{\Psi}_{0} \exp(ikz) + O(s^{2})$$

et puisque $l = kw_0^2$ et $s^{-1} = kw_0$:

$$B_z = -2y \frac{Q}{w_0^2} \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

$$= -2y \frac{w_0 k}{w_0} \frac{1}{k w_0^2} Q \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

$$= -2 \frac{s^{-1}}{w_0} \frac{Qy}{l} \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

$$B_z = -\frac{2Qy}{l} B_0 \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz)$$

Le champ magnétique devient, en négligeant le terme en s^2 de sa composante radiale B_y :

$$\mathbf{B} = (0, B_0 \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz), -\frac{2Qy}{l} B_0 \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz))$$
(A15)

Pour le champ électrique, la démarche est analogue même si les calculs sont un peu plus fastidieux. En effet, on part à nouveau de l'expression de ${\bf E}$ à partir des potentiels vecteurs et scalaires:

$$\mathbf{E} = -rac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U = i\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,U$$
 $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A} + rac{ic}{k}\mathbf{grad}(\mathbf{div}\,\mathbf{A})$

expression de ${\bf E}$ dans laquelle on a utilisé la condition de jauge de Lorentz, puis le fait que la norme du vecteur d'onde est constante spatialement. Calculons les différents termes de l'expression du champ électrique en évaluant $i\omega {\bf A}$ et $\frac{ic}{k}{\bf grad}({\bf div}\,{\bf A})$. Comme on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_x, 0, 0) \\ A_x \left(x, y, z, t \right) &= \Psi_0 \exp \left(ikz \right) \exp \left(-i\omega t \right) \\ A_x \left(x, y, z, t \right) &= -iQ \exp \left(iQ \left(\frac{x+y}{w_0} \right)^2 \right) \exp \left(ikz \right) \exp \left(-i\omega t \right) \end{aligned}$$

on en déduit les expressions, avec $s^{-1} = kw_0$ et en tenant compte de l'invariance en x de Q:

$$i\omega \mathbf{A} = \left[ckQ \exp\left[iQ\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right] \exp\left(ikz\right)\right] \mathbf{x} = \left[\frac{c}{w_0}s^{-1}Q \exp\left[iQh^2\right] \exp\left(ikz\right)\right] \mathbf{x}$$
$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0 = -iQ\frac{\partial}{\partial x} \exp\left(iQ\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) = \frac{2xQ^2}{w_0^2} \exp\left(iQ\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) = \frac{2\xi Q^2}{w_0} \exp\left[iQh^2\right] \exp\left(ikz\right)$$

dernière expression où l'on a réutilisé le paramètre h:

$$h^2 = \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}$$

On peut ainsi exprimer les différentes composantes du gradient de la divergence du potentiel vecteur. Sa composante suivant x est alors:

$$\begin{split} \left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{x} &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}\exp\left[iQh^{2}\right]\right)\right\} \\ &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}\right)\exp\left[iQh^{2}\right] + \frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left[iQh^{2}\right]\right)\right\} \\ &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xQ^{2}}{w_{0}^{2}}\right)\exp\left[iQ\frac{x^{2}+y^{2}}{w_{0}^{2}}\right] + \frac{2xQ^{2}}{w_{0}^{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp{iQ\frac{x^{2}+y^{2}}{w_{0}^{2}}}\right)\right\} \\ &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\left\{\frac{2Q^{2}}{w_{0}^{2}}\exp\left(iQ\frac{x^{2}+y^{2}}{w_{0}^{2}}\right) + \frac{4ix^{2}Q^{3}}{w_{0}^{4}}\exp\left(iQ\frac{x^{2}+y^{2}}{w_{0}^{2}}\right)\right\} \\ &\left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{x} = \frac{2cQ^{2}}{w_{0}}\left(i-2\xi^{2}Q\right)s\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right) \end{split}$$

Le raisonnement est le même pour les autres composantes:

$$\begin{split} \left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{y} &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}\exp\left[iQh^{2}\right]\right)\right\} \\ &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\exp\left[iQh^{2}\right]\right) \\ &= \frac{ic}{k}\exp\left(ikz\right)\frac{2\xi Q^{2}}{w_{0}}iQ\frac{2y}{w_{0}^{2}}\exp\left[iQh^{2}\right] \\ \left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{y} &= -c\frac{4\xi\eta Q^{3}}{w_{0}}s\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right) \\ \left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{z} &= \frac{ic}{k}\frac{2\xi}{w_{0}}\frac{\partial}{\partial z}\left\{Q^{2}\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right)\right\} \\ &= \frac{ic}{k}\frac{2\xi}{w_{0}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}Q^{2} + Q^{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(iQh^{2} + ikz\right)\right\}\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right) \\ &= \frac{ic}{k}\frac{2\xi}{w_{0}}\left\{ikQ^{2} + \frac{2Q}{l}\left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right) + \frac{iQ^{2}h^{2}}{l}\left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)\right\}\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right) \\ \left[\frac{ic}{k}\nabla\left(\nabla\bullet\mathbf{A}\right)\right]_{z} &= \frac{2\xi Q^{2}c}{w_{0}}\left(-1 - \frac{4iQ}{kw_{0}}s + \frac{2Q^{2}h^{2}}{kw_{0}}s\right)\exp\left[iQh^{2}\right]\exp\left(ikz\right) \end{split}$$

ce qui nous donne finalement:

$$E_{x} = \left\{ \frac{c}{w_{0}} s^{-1} Q \exp\left[iQ\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)\right] + \frac{ic2Q^{2}}{w_{0}} s \exp\left[iQ\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)\right] - \frac{4c\xi^{2}Q^{3}}{w_{0}} s \exp\left[iQ\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)\right] \right\} \exp\left(ikz\right)$$

$$E_{y} = -\frac{4c\xi\eta Q^{3}}{w_{0}} s \exp\left[iQ\left(\xi^{2} + \eta^{2}\right)\right] \exp\left(ikz\right)$$

$$E_{z} = \frac{2\xi Q^{2}c}{w_{0}} \left(-1 - \frac{4iQ}{kw_{0}} s + \frac{2Q^{2}h^{2}}{kw_{0}} s\right) \exp\left[iQh^{2}\right] \exp\left(ikz\right)$$

En utilisant la fonction $\widetilde{\Psi}_0 = Q \exp \left[iQh^2\right]$ et en définissant l'amplitude du champ électrique $E_0 \equiv \frac{c}{w_0} s^{-1}$, on obtient:

$$E_{x} = \{E_{0}Q \exp \left[iQh^{2}\right] + 2E_{0}s^{2}Q^{2} \exp \left[iQh^{2}\right] (i - 2\xi^{2}Q)\} \exp (ikz)$$

$$= E_{0}Q \exp \left[iQh^{2}\right] \exp (ikz) + O(s^{2})$$

$$= E_{0}\widetilde{\Psi}_{0} \exp (ikz)$$

$$E_{y} = -4E_{0}\xi\eta Q^{3}s^{2} \exp \left[iQh^{2}\right] \exp (ikz)$$

$$= O(s^{2})$$

$$E_{z} = 2\xi Q^{2}E_{0}\left(-s - \frac{4iQ}{kw_{0}}s^{2} + \frac{2Q^{2}h^{2}}{kw_{0}}s^{2}\right) \exp \left[iQh^{2}\right] \exp (ikz)$$

$$= -2\xi QsQE_{0} \exp \left[iQh^{2}\right] \exp (ikz) + O(s^{2})$$

$$= -s2Q\xi\widetilde{\Psi}_{0} \exp (ikz) + O(s^{2})$$

$$= -s\frac{2Qx}{w_{0}}\widetilde{\Psi}_{0} \exp (ikz) + O(s^{2}) = -\frac{2Qx}{l}\widetilde{\Psi}_{0} \exp (ikz) + O(s^{2})$$

On aboutit finalement à l'approximation suivante du champ électrique (avec bien sur la dépendance temporelle):

$$\mathbf{E} = (E_0 \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz), 0, -\frac{2Qx}{I} \widetilde{\Psi}_0 \exp(ikz))$$
(A16)

Dans les deux expressions (A15) et (A16), nous avons conservé les termes longitudinaux qui sont pourtant en s. Généralement, ces deux termes sont négligés, assurant ainsi la transversalité de notre modèle. Nous avons décidé de les garder puisque notre approximation du développement $\Psi = \Psi_0 + s^2\Psi_2 + ... = \Psi_0 + O\left(s^2\right)$ est une approximation négligeant les termes du second ordre mais rien indique que nous négligeons ceux du premier

E Polarisabilité d'un dipôle