Mathématiques pour la physique

1. Résoudre l'équation différentielle et vérifier la solution :

$$y' = 2xy$$

Par séparation de variables.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx$$
$$\ln y = x^2 + C'$$

Solution :

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{x^2+C'} = e^{C'}e^{x^2} = Ce^{x^2}$$
$$\Rightarrow y = C\exp x^2$$

Vérification en prenant la dérivée des deux cotés :

$$y' = 2xC\exp x^2 = 2xy$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$xy' = (1-2x^2)\tan y$$
$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = (1-2x^2)\tan y \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}dy = \frac{(1-2x^2)}{x}dx$$
$$= \frac{\cos y}{\sin y}dy = \frac{dx}{x} - 2xdx$$
$$\Rightarrow \ln\sin y = \ln x - x^2 + C'$$
$$e^{\ln\sin y} = e^{\ln x - x^2 + C} = e^{\ln x}e^{-x^2}e^{C'}$$
$$\sin y = Cxe^{-x^2}$$

Vérification en prenant la dérivée des deux cotés :

$$\cos y dy = \left[Ce^{-x^2} - C2x^2e^{-x^2}\right]dx = Ce^{-x^2}\left(1-2x^2\right)dx$$
$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = Cxe^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\frac{1}{\cos y}$$
$$\Rightarrow xy' = \left(1-2x^2\right)\frac{\sin y}{\cos y} = \left(1-2x^2\right)\tan y$$

3. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^3y' = y$$
$$\Rightarrow x^3\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^3}$$
$$\Rightarrow \ln y = -\frac{1}{2}x^{-2} + C'$$
$$y = Ce^{-\frac{1}{2x^2}}$$

Vérification en prenant la dérivée des deux cotés :

$$y' = C\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{2x^2}} \Rightarrow y' = Ce^{-\frac{1}{2x^2}} = y$$

4. Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{x}$$

par séparation de variables en se servant du fait que le deuxième membre est homogène de degré 0.

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 3\frac{y}{x}$$

$$u = \frac{y}{x} \qquad y = xu \qquad dy = dxu + xdu \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} &= 2 + 3u \\ x\frac{du}{dx} &= 2 + 2u \\ \frac{du}{2+2u} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} &= \ln x \end{aligned}$$

avec

$$w = 2 + 2u \qquad dw = 2du$$

On a

$$\begin{aligned} \ln w &= \ln x^2 + B = \ln Cx^2 \\ w &= Cx^2 \\ 2 + 2u &= Cx^2 \\ \frac{y}{x} &= Dx^2 - 1 \\ y &= Dx^3 - x \end{aligned}$$

Vérification

$$y' = 3Dx^2 - 1 = \frac{3(Dx^3 - x)}{x} + 2 = 2 + 3\frac{y}{x}$$

5. Résoudre l'équation

$$y' - \frac{3}{x}y = 2$$

en se servant du fait qu'il s'agit d'une équation linéaire de premier ordre.

$$y' - \frac{3}{x}y = 2$$

$$P(x) = -\frac{3}{x} \qquad Q(x) = 2$$

$$\begin{aligned} v' - \frac{3}{x}v &= 0 \\ \frac{v'}{v} &= \frac{3}{x} \\ \ln v &= 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln x \\ v &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx = \int 2x^{-3}dx = -x^{-2} + C \\ y(x) &= v(x)\,u(x) = -x + Cx^3 \end{aligned}$$

Vérification :

$$y'(x) = 3Cx^2 - 1 = 3\frac{(Cx^3 - x)}{x} + 2$$

6. Résoudre l'équation différentielle linéaire de premier ordre :

$$y' + 2xy = x$$

$$y' + Pv'(x)\, y = Q(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -2xdx \Rightarrow \ln v = -x^2 \\ v &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= u'v + v'u \\ duv + u\left(dv + 2xv\right) &= xdx \\ du &= \frac{x}{v}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C = \int xe^{x^2}dx + C \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} + C \\ y &= e^{-x^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2} + C\right) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= -2xCe^{-x^2} + 2x\left[\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}\right] \\ &= -2xCe^{-x^2} + x + 2xCe^{-x^2} = x \end{aligned}$$

7. Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2y' + xy = x^2 \sin x$$

En divisant les deux membres par x^2, on obtient

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Ceci est une équation différentielle de premier ordre

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

avec

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad Q(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \exp\left(-\int P(x)\, dx\right) = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = \exp\left(-\ln x\right) = \frac{1}{x} \\ u(x) &= \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C = \int x \sin x dx + C = \int x \sin x dx + C \end{aligned}$$

On remarque que :

$$-d\left(x \cos x\right) = -\cos x dx + x \sin x dx$$

et

$$d\left(\sin x\right) = \cos x dx$$

Donc

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int d\left[-x \cos x + \sin x\right] \\ &\Rightarrow \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

$$u\left(x\right) = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \frac{1}{x}\left[-x\cos x + \sin x + C\right] \\ &= -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} y' &= \sin x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - \frac{C}{x^2} \\ \frac{y}{x} &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

Donc

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$