Examen Mathématiques pour la physique PAI

5 novembre 2018 : 7 exercices recto-verso

Durée de l'épreuve 2 heures.

1. Calculer les différentielles dg et dh respectives des fonctions suivantes :

   (a) $g(x, y, z) = \frac{x^3}{z \ln|y|}$

$$dg = \frac{3x^2}{z \ln|y|}dx - \frac{x^3}{yz}\frac{dy}{[\ln|y|]^2} - \frac{x^3}{z^2 \ln|y|}dz$$

   (b) $h(\rho, \phi) = \cos\phi\sqrt{\sinh(\rho^2)}$

$$dh = \frac{\cos\phi \cosh(\rho^2)}{[\sinh(\rho^2)]^{1/2}}\rho d\rho - \sin\phi\sqrt{\sinh(\rho^2)}d\phi$$

2. Série de Taylor

   (a) Trouver le développement de Taylor $f(x) = \sin(x) - x$ juqsu'à l'ordre 5.

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

   (b) Utiliser le résultat de (a) afin de trouver la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x) - x)^3}{x^9}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x) - x)^3}{x^9} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}$$

3. On considère deux résistances R_1 et R_2 en parallèle (avec $R_1 = 50\Omega \pm 10\Omega$ et $R_2 = 150\Omega \pm 30\Omega$). On se rappelle que la résistance équivalente vaut :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(a) Trouver la résistance équivalente, R_{eq}, du circuit.

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{4}{150} = \frac{2}{75} \quad \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{75}{2} = 37,5\,\Omega$$

(b) Trouver l'incertitude relative, $\Delta R_{\text{eq}}/R_{\text{eq}}$, de la résistance équivalente.

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R_{\text{eq}}^2} &= \frac{dR_1}{R_1^2} + \frac{dR_2}{R_2^2} \quad \Rightarrow \frac{\Delta R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{\Delta R_1}{R_1}\frac{R_{\text{eq}}}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\frac{R_{\text{eq}}}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{\Delta R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} &= \frac{1}{5}\frac{75}{2\times 50} + \frac{3}{15}\frac{75}{2\times 150} \\ &= \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(c) Trouver l'incertitude absolue, ΔR_{eq}, de la résistance équivalente.

$$\Delta R_{\text{eq}} = \frac{1}{5}R_{\text{eq}} = \frac{1}{5}\frac{3\times 25}{2} = \frac{3\times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5\Omega$$

4. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$2\frac{dy}{dx} + 4xy = 0\ .$$

(a) Trouver la solution générale de cette équation par séparation de variables.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -2\int xdx \Rightarrow \ln y = -x^2 + C \\ \Rightarrow y\left(x\right) &= D\exp\left(-x^2\right) \end{aligned}$$

(b) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= D\exp\left(-x^2\right) \\ \frac{dy}{dx} &= -2xD\exp\left(-x^2\right) \\ 2\frac{dy}{dx} + 4xy &= -4xD\exp\left(-x^2\right) + 4xD\exp\left(-x^2\right) = 0 \end{aligned}$$

(c) Trouver la solution particulière ayant la condition initale de $y_0 = 2$ quand $x_0 = 0$.

$$y\left(0\right) = D = y_0 = 2\ .$$

5. Trouver la solution générale de l'équation linéaire de premier ordre suivante :

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 \ln|x| \ .$$

En divisant par x, on peut la réécrire l'équation :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x \ln|x|$$

La solution homogène est :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \exp\left(2\int \frac{dx}{x}\right) = \exp\left(\ln|x|^2\right) \\ &= x^2 \ . \end{aligned}$$

La solution particulière est :

$$\varphi(x) = \int \frac{x \ln|x|}{v(x)} dx = \int \frac{\ln|x|}{x} dx$$

Integration par parties

$$\begin{aligned} u &= \ln|x| \qquad & dv &= \frac{dx}{x} \\ du &= \frac{dx}{x} \qquad & v &= \ln|x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int u dv = uv - \int v du \\ &\Rightarrow 2\int \frac{\ln|x|}{x} dx = (\ln|x|)^2 \\ &\Rightarrow \int \frac{\ln|x|}{x} dx = \frac{(\ln|x|)^2}{2} \end{aligned}$$

La solution générale est,

$$y(x) = x^2\varphi(x) + Cx^2 = x^2\frac{(\ln|x|)^2}{2} + Cx^2$$

Verification :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^2\frac{(\ln|x|)^2}{2} &= x\ln|x| + x(\ln|x|)^2 \\ -\frac{2}{x}y &= -x(\ln|x|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{(\ln|x|)^2}{2} - \frac{2}{x}y &= x\ln|x| + x(\ln|x|)^2 - x(\ln|x|)^2 \\ &= x\ln|x| \end{aligned}$$

6. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime : $\rho(r,\theta,\phi) = \rho_0\left[\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]\cos^2\theta\sin^2\phi$.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint \rho(r,\theta,\phi)\, d\mathcal{V} \\
&= \iiint \rho_0\left[\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]\cos^2\theta\sin^2\phi r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{\rho_0}{R^3}\int_0^R r^5 dr\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi \\
\\
&= \frac{\rho_0}{R^3}\int_0^R r^5 dr\int_{-1}^1 u^2 du\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi \\
&= \frac{\rho_0}{R^3}\int_0^R r^5 dr\int_{-1}^1 u^2 du\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\, d\phi \\
&= \pi\frac{\rho_0}{R^3}\int_0^R r^5 dr\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 = \pi\frac{\rho_0}{R^3}\frac{2}{3}\int_0^R r^5 dr \\
M &= \pi\frac{\rho_0}{R^3}\frac{2}{3}\frac{R^6}{6} = \frac{\pi\rho_0 R^3}{9}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé,

$$\sin^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\ .$$

7. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{y+1-\frac{2}{3}x^3}$$

(a) Réecrire cette équation dans la forme suivante :

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0 \tag{1}$$

$$x^2 y dx + \left(-y-1+\frac{2}{3}x^3\right) dy = 0$$

Par identification, on a,

$$M(x,y) = x^2 y \qquad N(x,y) = \left(\frac{2}{3}x^3 - y - 1\right)$$

(b) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial x^2 y}{\partial y} = x^2 \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2x^2
\end{aligned}$$

(c) Montrer que la fonction $g(y)$, définit tel que,

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

est uniquement une fonction de y.

$$g(y) = \frac{1}{M}\left(2x^2 - x^2\right) = \frac{x^2}{x^2 y} = \frac{1}{y}$$

(d) Trouver le facteur intégrant de l'éq.(1), $\mu(y)$, qui s'obtient de la façon suivante :

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) .$$

$$\begin{aligned}\mu(y) &= \exp\left(\int \frac{dy}{y}\right) = \exp(\ln y) \\ &= y\end{aligned}$$

(e) Démontrer qu'en multipliant l'éq.(1) par $\mu(y)$, on obtient une équation de la forme :

$$\widetilde{M}(x,y)\,dx + \widetilde{N}(x,y)\,dy = 0 \; , \tag{2}$$

et que cette nouvelle équation est une différentielle exacte.

$$x^2y^2dx + \left(\frac{2}{3}x^3y - y^2 - y\right)dy = 0$$

par identification, on a

$$\widetilde{M}(x,y) = x^2y^2 \qquad \widetilde{N}(x,y) = \frac{2}{3}x^3y - y^2 - y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}x^3y - y^2 - y\right) = 2x^2y \\ \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y} &= 2x^2y^2\end{aligned}$$

(f) Trouver la solution de l'équation (2) par intégration.

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \int \left(\frac{2}{3}x^3y - y^2 - y\right)dy \\ &= \frac{x^3y^2}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \phi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) &= x^2y^2 + \phi'(x) \\ &= \widetilde{M}(x,y) = x^2y^2 \Longrightarrow \phi'(x) = 0 \Longrightarrow \phi(x) = C\end{aligned}$$

La solution est donc,

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C$$

ou

$$f(x,y) = x^3y^2 - y^3 - \frac{3}{2}y^2 = C'$$

(g) **Bonus** Démontrer que votre résultat est bien une solution de l'équation (1).

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 = 3x^2y^2dx + \left(2x^3y - 3y^2 - 3y\right)dy$$

On déduit donc

$$\left(-2x^3y + 3y^2 + 3y\right)dy = 3x^2y^2dx$$

et en divisant les deux cotés par $3y$

$$\left(y + 1 - \frac{2}{3}x^3\right)dy = x^2ydx$$

ce qui donne,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{\left(y + 1 - \frac{2}{3}x^3\right)}$$