Examen Mathématiques pour la physique PAI

5 novembre 2018 : 7 exercices recto-verso

Durée de l'épreuve 2 heures.

1. Calculer les différentielles dg et dh respectives des fonctions suivantes :
   (a) $g(x, y, z) = \frac{x^3}{z \ln|y|}$.
   (b) $h(\rho, \phi) = \cos\phi\sqrt{\sinh(\rho^2)}$.

2. Série de Taylor
   (a) Trouver le développement de Taylor $f(x) = \sin(x) - x$ juqsu'à l'ordre 5.
   (b) Utiliser le résultat de (a) afin de trouver la limite
   $$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) - x)^3}{x^9}$$

3. On considère deux résistances R_1 et R_2 en parallèle (avec $R_1 = 50\Omega \pm 10\Omega$ et $R_2 = 150\Omega \pm 30\Omega$). On se rappelle que la résistance équivalente vaut :
   $$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
   (a) Trouver la résistance équivalente, R_{eq}, du circuit.
   (b) Trouver l'incertitude relative, $\Delta R_{\text{eq}}/R_{\text{eq}}$, de la résistance équivalente.
   (c) Trouver l'incertitude absolue, ΔR_{eq}, de la résistance équivalente.

4. Considérer l'équation différentielle suivante :
   $$2\frac{dy}{dx} + 4xy = 0 \ .$$
   (a) Trouver la solution générale de cette équation par séparation de variables.
   (b) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.
   (c) Trouver la solution particulière ayant la condition initale de $y_0 = 2$ quand $x_0 = 0$.

5. Trouver la solution générale de l'équation linéaire de premier ordre suivante :
   $$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 \ln|x| \ .$$

6. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime : $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^3\right] \cos^2\theta \sin^2\phi$.

7. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{y + 1 - \frac{2}{3}x^3}$$

(a) Réecrire cette équation dans la forme suivante :

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

(b) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.

(c) Montrer que la fonction $g(y)$, définit tel que,

$$g(y) \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

est uniquement une fonction de y.

(d) Trouver le facteur intégrant de l'éq.(1), $\mu(y)$, qui s'obtient de la façon suivante :

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) \ .$$

(e) Démontrer qu'en multipliant l'éq.(1) par $\mu(y)$, on obtient une équation de la forme :

$$\widetilde{M}(x, y)\,dx + \widetilde{N}(x, y)\,dy = 0 \ , \tag{2}$$

et que cette nouvelle équation est une différentielle exacte.

(f) Trouver la solution de l'équation (2) par intégration.

(g) **Bonus** Démontrer que votre résultat est bien une solution de l'équation (1).