Examen Mathématiques pour la physique PAI

7 novembre 2017 : 5 exercices recto-verso

Durée de l'épreuve 2 heures.

Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

1. Calculer les différentielles, dg et dh respectivement des fonctions suivantes :

   (a) $g(x,y,z) = \frac{x^2 \ln y}{z}$.

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \\ &= 2x\frac{\ln y}{z}dx + \frac{x^2}{zy}dy - \frac{x^2 \ln y}{z^2}dz \end{aligned}$$

   (b) $h(\rho,\phi) = \sinh(\rho^2)\sqrt{\cos\phi}$.

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial h}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial h}{\partial \phi}d\phi \\ &= 2\rho\cosh\left(\rho^2\right)\sqrt{\cos\phi}\,d\rho - \sinh\left(\rho^2\right)\frac{\sin\phi}{2\sqrt{\cos\phi}}\,d\phi \end{aligned}$$

2. On mesure le périmetre d'une sphère à $P = 84$cm avec une erreur possible de $\Delta P = 0.5$ cm.

   (a) Utilise la différentielle afin d'estimer l'erreur (relative et absolue) dans le calcul de sa surface S.

   Puisque $P = 2\pi r$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{0.5}{84} = \frac{1}{168}$$

$$\begin{aligned} S = 4\pi r^2 &\Rightarrow \frac{dS}{S} = 2\frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = 2\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{84} \simeq 0.0119 \\ &\Rightarrow \Delta S = \frac{1}{84}S = \frac{1}{84}\frac{P^2}{\pi} = \frac{84}{\pi} \simeq 26,7\text{cm}^2 \\ S &= \frac{P^2}{\pi} \simeq 2246\text{cm}^2 \end{aligned}$$

   (b) Utilise la différentielle afin d'estimer l'erreur, (relative et absolue) dans le calcul du volume, V.

$$\begin{aligned} V = \frac{4\pi}{3}r^3 &\Rightarrow \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta r}{r} = \frac{3}{168} = \frac{1}{56} \simeq 0.0179 \\ &\Rightarrow \Delta V = V\frac{1}{56} \simeq 179\text{cm}^3 \\ V &= \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{P^3}{6\pi^2} = \frac{84^3}{6\pi^2} \simeq 10\,009\text{cm}^3 \end{aligned}$$

3. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx}\sin y + x^2 = 0 \ .$$

   (a) Trouver la solution générale de cette équation par séparation de variables.

$$\sin y dy = -x^2 dx$$
$$\int \sin y dy = -\int x^2 dx$$

$$\Longrightarrow \cos y = \frac{x^3}{3} + C$$
$$\Longrightarrow y(x) = \arccos\left[\frac{x^3}{3} + C\right]$$

   (b) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.
   On considère

$$\cos y = \frac{x^3}{3} + C$$

   et on prend la différentielle de chaque coté,

$$\Longrightarrow \sin y dy = -x^2 dx$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}\sin y + x^2 = 0$$

   (c) Trouver la solution particulière ayant la condition initale de $y_0 = 0$ quand $x_0 = 0$.
   Il faut choisir la branche positive de y.

$$y_0 = y(x_0) = y(0) = \cos y_0 = 1 = \frac{x_0^3}{3} + C = C$$

$$\Longrightarrow C = 1$$
$$\Longrightarrow y(x) = \arccos\left[\frac{x^3}{3} + 1\right]$$

4. Trouver la solution générale de l'équation linéaire de première ordre suivante :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x \ .$$

Il y a en fait deux façons de résoudre cette équation. D'abord il y a la technique standard pour résioudre une équation linéaire d'ordre 1. Avec cette approche, on définit :

$$y(x) \equiv u(x)v(x)$$

et l'équation devient

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = 2x$$

et on cherch v comme la solution de l'équation homogène :

$$\frac{dv}{dx} + 2xv = 0$$

ceci est séparable

$$\int \frac{dv}{v} = \int -2xdx = -x^2$$

$$\Longrightarrow \ln v = -x^2$$
$$\Longrightarrow v(x) = \exp\left(-x^2\right)$$

Avec v comme une solution de l'équation homogèen, l'équation pour u devient

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{v(x)} = 2x \exp\left(x^2\right)$$

qui est de nouveau separable et la solution est

$$\int du = \int 2x \exp\left(x^2\right) dx$$

$$\Longrightarrow u(x) = \exp\left(x^2\right) + C$$

On remonte maintenant à la solution complète :

$$\begin{aligned} y = uv &= \left(\exp\left(x^2\right) + C\right) \exp\left(-x^2\right) \\ &= 1 + C \exp\left(-x^2\right) \end{aligned}$$

On peut vérifier la solution

$$\frac{dy}{dx} = -2xC \exp\left(-x^2\right) + 2x\left(1 + C \exp\left(-x^2\right)\right) = 2x$$

L'autre technique est de remarquer qu'il s'agit d'une équation séparable. On peut réécrire l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1-y) \ .$$

et résoudre par intégration :

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{(1-y)} = 2xdx \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{(1-y)} = \int 2xdx + C_1 \\ &\Longrightarrow -\ln(1-y) = x^2 + C_1 \\ &\Longrightarrow \ln(1-y) = -x^2 + C_2 \end{aligned}$$

où $C_2 = -C_1$. On prend l'exponentiel de chaque côté de la dernière ligne et on trouve :

$$\begin{aligned} &1 - y = C_3 \exp(-x^2) \\ &\Longrightarrow y = 1 + C \exp(-x^2) \ , \end{aligned}$$

où $C = -C_3 = -\exp(C_2)$ est une constante arbitraire et ce qui nous donne le même résultat que par la première méthode.

5. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime :

$$\rho(r,\theta,\phi) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right] \cos^2\theta \sin^2\phi \ .$$

On se rappel la relation :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \\ &\Longrightarrow \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 1 - 2\sin^2\phi \\ &\Longrightarrow \sin^2\phi = \frac{1}{2}(\cos 2\phi + 1) \end{aligned}$$

L'élément de volume en coordonnées sphériques est :

$$d\mathcal{V} = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \ ,$$

et on obtient la masse totale par intégration :

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho d\mathcal{V} = \int_0^R r^2 dr \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi \\ &= \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(1 - \frac{r}{R}\right) \int_{-1}^1 u^2 du \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2\phi + 1) d\phi = \pi\rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 \\ &= \pi\rho_0 \frac{2}{3} \int_0^R r^2 dr \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \pi\rho_0 \frac{2}{3} \left[\int_0^R r^2 dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R dr r^4\right] \\ &= \frac{2}{3}\pi\rho_0 \left[\frac{R^3}{3} - \frac{1}{R}\frac{R^4}{4}\right] = \frac{2}{3}\pi\rho_0 R^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] \\ &= \frac{\pi\rho_0 R^3}{18} \ . \end{aligned}$$

où nous avons aussi fait un changement de variables dans la deuxième ligne :

$$u = \cos\theta \qquad du = -\sin\theta d\theta$$

6. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$(x+y)\sin y dx + (x\sin y + \cos y)\, dy = 0 \tag{1}$$

(a) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.

$$\begin{aligned} M(x,y) &= (x+y)\sin y \\ N(x,y) &= (x\sin y + \cos y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x+y)\cos y + \sin y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \sin y$$

(b) Montrer que la fonction, g , définit tel que,

$$g \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) ,$$

est une fonction uniquement de la variable y.

Par substitution directe, on obtient :

$$g = \frac{1}{(x+y)\sin y}\left(\sin y - \sin y - (x+y)\cos y\right) = -\frac{\cos y}{\sin y}$$

ce qui est bien une fonction de y.

(c) Trouver le facteur intégrant de l'éq.(1), $\mu(y)$, qui s'obtient de la façon suivante :

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) .$$

$$\int g(y)dy = -\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = -\ln|\sin y| = \ln|\sin y|^{-1}$$
$$\Longrightarrow \mu(y) = \exp \ln|\sin y|^{-1} = \frac{1}{\sin y}$$

(d) Démontrer qu'en multipliant l'éq.(1) par $\mu(y)$, on obtient une équation de la forme :

$$\widetilde{M}(x,y)\,dx + \widetilde{N}(x,y)\,dy = 0 , \qquad (2)$$

et que cette nouvelle équation est une différentielle exacte.

On multiple l'éq.(1) par $\mu(y)$ et on trouve :

$$\mu(y)\left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = \frac{1}{\sin y}\left[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\right] = 0$$
$$\Longrightarrow (x+y)\,dx + \left(x + \frac{\cos y}{\sin y}\right)dy = 0$$

ce qui nous donne

$$\widetilde{M}(x,y) = (x+y)$$
$$\widetilde{N}(x,y) = x + \frac{\cos y}{\sin y}$$

C'est bien une différentielle exacte car

$$\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{M}(x,y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{N}(x,y)$$

(e) Trouver la solution de l'équation (2) par intégration, c'est-à-dire trouver,

$$f(x,y) = \int \widetilde{M}(x,y)\,dx + \phi(y)$$

où la fonction d'intégration $\phi(y)$ est déterminée par la contrainte que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) .$$

Par intégration on trouve,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (x+y)\,dx + \phi(y) \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + \phi(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \phi'(y) = x + \frac{\cos y}{\sin y} \Longrightarrow \phi'(y) = \frac{\cos y}{\sin y} \Longrightarrow \frac{d\phi}{dy} = \frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow d\phi = \frac{\cos y}{\sin y} dy \Longrightarrow \int d\phi = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy \\ &\Longrightarrow \phi\,(y) = \ln|\sin y| + C \end{aligned}$$

Mettant $\phi\,(y)$ dans $f(x,y)$, on a la solution

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \ln|\sin y| = C$$

(f) Montrer que l'équation $f(x,y) =$ Cte est une solution de l'équation différentielle de l'équation (2). Autrement dit, démontrer que l'équation $df = 0$ est identique à l'éq.(2).

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= (x+y)\,dx + \left(x + \frac{\cos y}{\sin y}\right) dy = 0 \\ &= (x+y)\sin y dx + (x \sin y + \cos y) = 0 \end{aligned}$$

ce qui est bien l'éq.(2) et (1).