Examen Mathématiques pour la physique PAI

7 novembre 2017 : 6 exercices recto-verso

Durée de l'épreuve 2 heures.

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

1. Calculer les différentielles, dg et dh respectivement des fonctions suivantes :
   (a) $g(x, y, z) = \frac{x^2 \ln y}{z}$.
   (b) $h(\rho, \phi) = \sinh(\rho^2)\sqrt{\cos\phi}$.

2. La circonférence d'une sphère est mesurée à $C = 84\text{cm} \pm \Delta C$ avec $\Delta C = 0,5$ cm.
   (a) Utilise la différentielle afin d'estimer l'erreur (relative et absolue) dans le calcul de sa surface S.
   (b) Utilise la différentielle afin d'estimer l'erreur, (relative et absolue) dans le calcul du volume, V.

3. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx}\sin y + x^2 = 0 \ .$$

   (a) Trouver la solution générale de cette équation par séparation de variables.
   (b) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.
   (c) Trouver la solution particulière ayant la condition initale de $y_0 = 0$ quand $x_0 = 0$.

4. Trouver la solution générale de l'équation linéaire de première ordre suivante :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x \ .$$

5. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime :

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right] \cos^2\theta \sin^2\phi \ .$$

6. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$(x+y)\sin y dx + (x\sin y + \cos y)\, dy = 0 \tag{1}$$

(a) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.

(b) Montrer que la fonction, g , définit tel que,

$$g \equiv \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \ ,$$

est une fonction uniquement de la variable y.

(c) Trouver le facteur intégrant de l'éq.(1), $\mu\,(y)$, qui s'obtient de la façon suivante :

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) \ .$$

(d) Démontrer qu'en multipliant l'éq.(1) par $\mu(y)$, on obtient une équation de la forme :

$$\widetilde{M}\,(x,y)\, dx + \widetilde{N}\,(x,y)\, dy = 0 \ , \tag{2}$$

et que cette nouvelle équation est une différentielle exacte.

(e) Trouver la solution de l'équation (2) par intégration, c'est-à-dire trouver,

$$f(x,y) = \int \widetilde{M}\,(x,y)\, dx + \phi(y) \ ,$$

où la fonction d'intégration $\phi(y)$ est déterminée par la contrainte que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \widetilde{N}(x,y) \ .$$

(f) Montrer que l'équation $f(x,y) =$ Cte est une solution de l'équation différentielle de l'équation (1). Autrement dit, démontrer que l'équation $df = 0$ est identique à l'éq.(1) ou l'éq.(2).