Examen Mathématiques pour la physique PAI
9 novembre 2015 : 8 problèmes recto-verso.
Durée de l'épreuve 3 heures.
Calculettes standards autorisées

1. Nombre complexes :

(a) Mettre $z = \frac{i-4}{2i-3}$ sous la forme $z = a + ib$.

$$z = \frac{(i-4)}{2i-3}.\frac{(-2i-3)}{-2i-3} = \frac{(i-4)(-2i-3)}{13} = \frac{(2-3i+8i+12)}{13}$$
$$= \frac{(5i+14)}{13}$$

(b) Mettre $z = 6 + 6i$ sous la forme $z = re^{i\theta}$.

$$z = 6 + 6i = 6\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

(c) Mettre $\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7$ sous la forme $z = a + ib$.

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^7 = \left(e^{-i7\pi/3}\right) = e^{-2i\pi}e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = \ln\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$

$$df = \frac{1}{2}d\ln\left|x^2 + y^2\right|$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

(b) $h(r, \theta, z) = r^2\sinh(z/l)\cos^2\theta$

$$h(r, \theta, z) = r^2\sinh(z/l)\cos^2\theta = \frac{\partial h}{\partial r}dr + \frac{\partial h}{\partial z}dz + \frac{\partial h}{\partial \theta}d\theta$$
$$= 2rdr\sinh(z/l)\cos^2\theta + \frac{1}{l}r^2\cosh(z/l)\cos^2\theta dz - 2r^2\sinh(z/l)\cos\theta\sin\theta d\theta$$

3. Considérer un parallélépipède rectangle : $V(a,b) = a^2 b$ avec $a = 20$cm et $b = 25$cm.
   (a) Trouver les valeurs exactes de la variation du volume ΔV et la variation relative $\Delta V/V$ si a s'augmente de $0,2$cm et b diminue de 1cm.

$$V = 20^2.25 = 10000\text{cm}^3$$
$$V' = (20+0,2)^2.(25-1) = 9792,96$$
$$\Delta V = V' - V = -207,04\text{cm}^3 \quad , \quad \frac{\Delta V}{V} = -0,0207$$

   (b) Estimer $\Delta V/V$ et ΔV à partir du calcul de dV/V et dV et comparer avec le résultat exact.

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{dV}{V} = 2\frac{da}{a} + \frac{db}{b} = 2\frac{0,2}{20} - \frac{1}{25} = \frac{2}{100} - \frac{4}{100} = -\frac{2}{100} = -0.02$$
$$dV = -200\text{cm}^3$$

4. Effectuer le développement de Taylor de la fonction $f(x) = \sin x - x\cos x$ autour de l'origine jusqu'à l'ordre 5 en x.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \quad , \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
$$\begin{aligned} \sin x - x\cos x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + ... \\ &= x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \frac{x^5}{4!}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5}\right) + ... = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4!}\frac{4}{5} + ... \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + ... \end{aligned}$$

Ou de façon usuelle :

$$f(x) = \sin x - x\cos x \ , f'(x) = x\sin x \ , f''(x) = \sin x + x\cos x \ ,$$
$$f'''(x) = 2\cos x + -x\sin x \ , f^4(x) = -3\sin x - x\cos x \ , \ f^5(x) = -4\cos x + x\sin x$$
$$\Rightarrow f(0) = 0 \ , f'(0) = 0 \ , f''(0) = 0 \ , f'''(0) = 2 \ , f^4(0) = 0 \ , f^5(0) = -4$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{5!}f^5(0)x^5 + ...$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + ...$$

5. Considérer un cylindre de rayon a et de longueur l dont l'axe est confondu avec l'axe Oz et sa base se trouve sur le plan xOy. La densité du cylindre s'exprime : $\rho(r,\theta,z) = Cr^2\cosh(z/l)\sin^2\theta$.
   (a) Quelle est la dimension de C ? kgm^{-5}.
   (b) Calculer la masse totale du cylindre. $d\mathcal{V} = rdrd\theta dz$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a rdr \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho(r,\theta,z) = C\int_0^a r^3 dr \int_0^l \cosh(z/l)\, dz \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \\ &= C\frac{a^4 l}{4}(\sinh 1 - \sinh 0)\,\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\, d\theta \\ &= C\frac{a^4 l\pi}{4}\sinh 1 \end{aligned}$$

(c) Calculer le gradient de ρ en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, Cr^2\cosh(z/l)\sin^2\theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\, C\cosh(z/l)\sin^2\theta r^2 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\, Cr^2\cosh(z/l)\sin^2\theta \\ \frac{\partial}{\partial z}\, Cr^2\sin^2\theta\cosh(z/l) \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \cosh(z/l)\sin^2\theta 2r \\ r\cosh(z/l)2\sin\theta\cos\theta \\ r^2\sin^2\theta\frac{1}{l}\sinh(z/l) \end{pmatrix}$$

$$= Cr\sin^2\theta\cosh(z/l)\begin{pmatrix} 2 \\ 2\cot\theta \\ \frac{r}{l}\tanh(z/l) \end{pmatrix}$$

6. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} - x^2y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 + x^2y^2 = x^2\left(1+y^2\right) \Rightarrow \frac{dy}{(1+y^2)} = x^2dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int x^2dx \Rightarrow \arctan y = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\Rightarrow y = \tan\left[\frac{x^3}{3} + C\right]$$

Vérification :

$$dy = d\tan\left[x^3 + C\right] = \left(1 + \tan^2\left[x^3 + C\right]\right) d\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = \left(1+y^2\right)x^2dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2x^2 + x^2$$

7. Considérer l'équation :

$$\left(4x^3y^5 + y\right)dx + \left(5x^4y^4 + x + y^2\right)dy = 0$$

(a) Montrer que le membre de gauche est une différentielle totale.

$$M(x,y) = \left(4x^3y^5 + y\right) \qquad N(x,y) = \left(5x^4y^4 + x + y^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 20x^3y^4 = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

(b) Résoudre l'équation différentielle.

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \left(4x^3y^5 + y\right)dx = x^4y^5 + xy + \phi(y)$$

On détermine $\phi(y)$ en remarquant

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 5x^4y^4 + x + \phi'(y) = N(x,y) = \left(5x^4y^4 + x + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \phi'(y) = y^2 \Rightarrow \frac{d\phi}{dy} = y^2 \Rightarrow \int d\phi = \int y^2dy \Rightarrow \phi(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

Donc on a la solution

$$f(x,y) = x^4y^5 + xy + \frac{y^3}{3} = C$$

Vérification :

$$\begin{aligned} df(x,y) &= 4x^3y^5dx + 5x^4y^4dy + dxy + xdy + y^2dy = 0 \\ &\Rightarrow \left(4x^3y^5 + y\right)dx + \left(5x^4y^4 + x + y^2\right)dy = 0 \end{aligned}$$

8. Considérer l'équation :

$$(y\ln x - 2)\,ydx = xdy$$

(a) Montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^2$$

Après des manipulations algébriques :

$$\begin{aligned} (y\ln x - 2)\,\frac{y}{x} &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} &= \frac{\ln x}{x}y^2 \end{aligned}$$

(b) Montrer qu'en introduisant le changement de variable $z = 1/y$, ceci se transforme en équation linéaire de la forme :

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\,z = Q(x)$$

$$\begin{aligned} z = y^{-1} &\Rightarrow dz = -y^{-2}dy \Rightarrow dz = -y^{-2}dy \\ &\Rightarrow dy = -dzy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{-dz}{dx}y^2 + 2\frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}y^2 \;\Rightarrow -\frac{dz}{dx} + 2\frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x} \;\Rightarrow -\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = \frac{\ln x}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -\frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

(c) Résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

$$v(x) = \exp\left(2\int\frac{dx}{x}\right) = \exp(2\ln x) = x^2$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\int\frac{\ln x}{x}\frac{1}{v(x)}dx \\ &= \int x^{-3}\ln x dx \end{aligned}$$

Intégrations par parties

$$u = \ln x \qquad dv = x^{-3}dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}x^{-2}$$

ce qui nous donne :

$$\Rightarrow \phi(x) = -\int x^{-3}\ln x dx = \frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^{-3}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \frac{1}{4}x^{-2} + D$$

Donc

$$u(x) = \frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \frac{1}{4}x^{-2} + D$$

et

$$z(x) = uv = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Dx^2 = \frac{2\ln x + 1 + Cx^2}{4}$$

La solution de (a) est donc :

$$y = \frac{1}{z} = \frac{4}{2\ln x + 1 + Cx^2} \tag{1}$$

Vérification :

$$dy = -\frac{4}{(2\ln x + 1 + Cx^2)^2}\left(\frac{2}{x} + 2Cx\right)dx$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{(2\ln x + 1 + Cx^2)^2}\left(\frac{2}{x} + 2Cx\right) = -y^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + Cx\right)$$
$$x\frac{dy}{dx} = -y^2\frac{1}{2}\left(1 + Cx^2\right)$$

Sachant que la solution de (1) nous donne :

$$\frac{1}{2}\left(1 + Cx^2\right) = \frac{2}{y} - \ln x$$

ce que nous donne

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -y^2\left(\frac{2}{y} - \ln x\right) \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -2y + y^2\ln x$$