Examen Mathématiques pour la physique PAI
6 janvier 2016 : 6 problèmes
Durée de l'épreuve 2 heures.

Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

1. (2pts) Calculer la différentielle de la fonction suivante :
$$g(x,y) = \frac{x}{y}$$

2. (4pts) Résoudre l'équation différentielle suivante par séparation de variables.
$$\frac{dy}{dt} = -y\frac{1+2t^2}{t}, \quad y(1) = 2$$
Vérifier votre résultat.

3. (3pts) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver des expressions alternatives (simplifiées) faisant apparaître $\sin x$ et $\cos x$ des expressions suivantes :
   (a) $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{ix}}\right]$
   (b) $\mathrm{Im}\left[\frac{1}{1-e^{ix}}\right]$

4. (3pts) Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime : $\rho(r,\theta,\phi) = \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\sin^2\theta$.

5. (3pts) Considérer l'équation différentielle suivante :
$$\left(3x^2y + 2xy + y^3\right)dx + \left(x^2+y^2\right)dy = 0$$
   (a) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.
   (b) Montrer que le facteur intégrant de cette équation est , $\mu(x) = e^{3x}$, et démontrer que ceci rend l'équation intégrable.

6. (5pts) La période des oscillations de faible amplitude d'un pendule de longueur l est $T(l,g) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
   (a) Calculer T pour un pendule de longueur $l = 1\text{m}$ avec $g = 9,807\,\text{m/s}^2$.
   (b) Ecrire dT/T (où $dT(l,g)$ est une fonction dépendant de l, et de g).
   (c) Utiliser le résultat de (b) afin d'approximer la variation de la période du pendule par rapport à une variation de la longueur du pendule de $\delta l = +1\text{cm}$.
   (d) Utiliser le calcul différentiel afin d'estimer la variation en δg qui donnerait la même variation en période.
   (e) La «constante» gravitationnelle, g, est en réalité une fonction de l'altitude h, plus précisément : $g(h) = \frac{GM_{\text{terre}}}{(R_{\text{terre}}+h)^2}$. Trouver la variation en altitude δh nécessaire d'obtenir la variation δT déterminée en (d) (le rayon de la terre est $R_{\text{terre}} = 6\,371$ km).