Examen Mathématiques pour la physique PAI
9 janvier 2019 : 6 exercices ***recto-verso***
Durée de l'épreuve 1h30.

1. Calcul différentiel

   (a) Utiliser la différentielle pour dériver la formule :

$$\sqrt[n]{a^n + h} \simeq a + \frac{h}{na^{n-1}} \ .$$

On commence avec

$$f_n(x) = (x)^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Une utilisation principale pour la différentiel est l'approximation

$$f_n(y+h) \simeq f_n(y) + h \left.\frac{df_n}{dx}\right|_y$$

with

$$\left.\frac{df_n}{dx}\right|_y = \frac{1}{n}(x)^{1/n-1}\Big|_{x=a^n} = \frac{1}{n}(a^n)^{1/n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{a^{n-1}}$$

So

$$f_n(a^n + h) \simeq f(a^n) + \frac{h}{n}\frac{1}{a^{n-1}} = a + \frac{h}{n}\frac{1}{a^{n-1}} \qquad \text{CQFD}$$

   (b) Utiliser cette formule afin de calculer sans calculette :

$$\sqrt[8]{252} \ .$$

sachant que $2^8 = 256$.

$$\sqrt[8]{252} = (x)^{1/n} = f(252) \simeq f\left(2^8 - 4\right) = 2 - \frac{4}{8}\frac{1}{2^7} = 2 - \frac{1}{256} \simeq 2 - \frac{4}{1000}$$
$$\simeq 2 - \frac{4}{1000} = 1.996$$

2. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$2xy^2 + 4 = 2\left(3 - x^2 y\right)\frac{dy}{dx} \ . \qquad (1)$$

   (a) Trouver la solution générale de cette équation avec $y(x)$ comme une fonction implicite.

   On peut mettre l'équation (1) en forme d'une différentielle totale :

$$\left(2xy^2 + 4\right)dx + 2\left(x^2 y - 3\right)dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy^2 + 4$$
$$N(x,y) = 2x^2 y - 6$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Donc la solution

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)\,dx + \phi(y) = \int \left(2xy^2+4\right)dx + \phi(y) \\ &= x^2y^2 + 4x + \phi(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2x^2y + \phi'(y) = 2x^2y - 6 \\ &\Longrightarrow \phi'(y) = -6 \Longrightarrow \phi(y) = -6y + C \end{aligned}$$

Donc solution générale :

$$f(x,y) = x^2y^2 + 4x - 6y = C$$

(b) Trouver la solution avec la condition initiale $y(-1) = 8$.

$$f(-1,8) = 64 - 4 - 48 = 12 = C$$

(c) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \left(2xy^2+4\right)dx + \left(2x^2y-6\right)dy = 0 \\ &\Longrightarrow \left(2xy^2+4\right) = \left(6-2x^2y\right)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

(d) Mettre la solution particulière avec $y(-1) = 8$ dans la forme d'une équation $y(x)$.

$$x^2y^2 - 6y + 4x - 12 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow y(x) = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4x^2(4x-12)}}{2x^2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{9 - 4x^3 + 12x^2}}{x^2} \end{aligned}$$

Il fallait adopter la signe + de la racine afin d'être cohérent avec la condition initiale $y(-1) = 8$. La solution va diverger quand $x \to 0$. Valide dans la région $x < 0$.

$$\begin{aligned} \frac{36}{4x^2} - (4x-12) &> 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2} + 12\right) &> x \\ &\Longrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ .$$

On prend

$$p \equiv \frac{dy}{dx}$$

L'équation devient donc :

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = adx \Longrightarrow \text{asinh}\,(p) = ax + C$$
$$\Longrightarrow p = \sinh\,(ax + C)$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh\,(ax + C) \Longrightarrow \int dy = \int \sinh\,(ax + C)\,dx$$
$$y = \frac{\cosh\,(ax + C)}{ax + C} + C_2$$

4. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où sa densité s'exprime : $\rho\,(r, \theta, \phi) = \rho_0 \frac{R}{r} \cos^2\theta \cos^2\phi$.

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho\,(r, \theta, \phi)\, d\mathcal{V} = \iiint \rho_0 \frac{R}{r} \cos^2\theta \cos^2\phi r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \rho_0 R \int_0^R r dr \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \\ &= \rho_0 R \int_0^R r dr \int_{-1}^1 u^2 du \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\phi)\, d\phi \\ &= \rho_0 \frac{\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

5. Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \ .$$

Avec une solution teste de la forme :

$$y = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

with solutions

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm i4}{2} \\ &= 3 \pm 2i \end{aligned}$$

La solution generale est donc

$$y\,(x) = e^{3x}\,(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$
$$y'\,(x) = 2e^{3x}\,(-C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$$

(a) Trouver la solution particulière ayant la condition initiale de $y_0 = 2$ quand $y_0' = 0$.

$$y_0 = y(0) = C_1 = 2$$
$$y_0' = y'(0) = 2C_2 = 0$$

Donc la solution particulière est :

$$y(x) = 2e^{3x}\cos 2x$$

6. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$x^4 y'' - 2x^3 y' - x^8 y = 0 \ . \tag{2}$$

Indice : On se rappelle que pour une équation d'ordre 2 de la forme :

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0 \ ,$$

le Wronskien de ses deux solutions indépendantes y_1 et y_2 est :

$$W = C \exp\left(-\int P(x)\, dx\right) \ .$$

(a) Sans trouver les solutions de l'éq.(2), déterminer le Wronskien de l'éq.(2)

Divisant les deux cotés L'équation peut être écrite

$$y'' - 2\frac{1}{x}y' - x^4 y = 0 \ . \tag{3}$$

One finds

$$W(x) = C\exp\left(2\int \frac{dx}{x}\right) = C\exp\left(\ln|x|^2\right)$$
$$= x^2 \ .$$

(b) Vérifier que :

$$y_1(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right) \ .$$

est une solution de l'équation différentielle de l'éq.(2).

$$y_1(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$y_1'(x) = x^2 C_1 \sinh\left(\frac{x^3}{3}\right)$$
$$y_1''(x) = 2xC_1 \sinh\left(\frac{x^3}{3}\right) + x^4 C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

and

$$y'' - 2\frac{1}{x}y' - x^4 y = 0$$

Mettant tout ceci ensemble on vérifie bien :

$$x^4 C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right) + 2xC_1 \sinh\left(\frac{x^3}{3}\right) - 2\frac{1}{x}x^2 C_1 \sinh\left(\frac{x^3}{3}\right) - x^4 C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right) = 0$$

(c) Utiliser le Wronskien pour trouver une deuxième solution, y_2. (Considérer la différentielle de $\tanh(\frac{x^3}{3})$).

Si on trouve une solution, $y_1(x)$ de l'éq.(2), une deuxième solution se trouve avec la formule :

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{W(s)}{y_1^2(s)} ds$$

Puisque on a $y_1(s) = \cosh\left(\frac{s^3}{3}\right)$ et $W(s) = s^2$,

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{s^2}{\cosh^2(\frac{s^3}{3})} ds$$

On fait la substitution de variables

$$u = \frac{s^3}{3} \Longrightarrow du = s^2 ds$$

$$\int \frac{s^2}{\cosh^2(\frac{s^3}{3})} ds \Longrightarrow \int \frac{du}{\cosh^2(u)}$$

$$\begin{aligned} d\tanh(u) = d\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} &= 1 - \frac{\sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} \\ &= \frac{\cosh^2(u) - \sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} = \frac{1}{\cosh^2(u)} \end{aligned}$$

donc

$$\int^x \frac{s^2}{\cosh^2(\frac{s^3}{3})} ds = \tanh(\frac{x^3}{3})$$

$$y_2(x) = \cosh(\frac{x^3}{3}) \tanh(\frac{x^3}{3}) = \sinh(\frac{x^3}{3})$$

(d) Exprimer la solution générale de l'équation différentielle (2).

$$y_2(x) = C_1 \cosh(\frac{x^3}{3}) + C_2 \sinh(\frac{x^3}{3})$$