Examen Mathématiques pour la physique PAI

9 janvier 2019 : 6 exercices ***recto-verso***

Durée de l'épreuve 1h30.

Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

1. Utiliser la différentielle pour dériver la formule :

$$\sqrt[n]{a^n + h} \simeq a + \frac{h}{na^{n-1}} \, .$$

   (a) Utiliser cette formule afin d'approximer (sans calculette) :

$$\sqrt[8]{252} \, .$$

   sachant que $2^8 = 256$.

2. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$2xy^2 + 4 = 2\left(3 - x^2 y\right)\frac{dy}{dx} \, .$$

   (a) Trouver la solution générale de cette équation avec $y(x)$ comme une fonction implicite.

   (b) Trouver la solution avec la condition initiale $y(-1) = 8$.

   (c) Démontrer que votre solution est bien une solution de l'équation différentielle.

   (d) Mettre la solution particulière avec $y(-1) = 8$ dans la forme d'une équation $y(x)$.

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, .$$

   Indice : faîtes la substitution : $p = dy/dx$.

4. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où sa densité s'exprime :
   $\rho\,(r, \theta, \phi) = \rho_0 \frac{R}{r} \cos^2\theta \cos^2\phi$.

5. Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \, .$$

   (a) Trouver la solution particulière ayant la condition initiale de $y_0 = 2$ quand $y'_0 = 0$.

6. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$x^4 y'' - 2x^3 y' - x^8 y = 0 \ . \tag{1}$$

Indice : On se rappelle que pour une équation d'ordre 2 de la forme :

$$y'' - P\left(x\right) y' - Q\left(x\right) y = 0 \ ,$$

le Wronskien de ses deux solutions indépendantes y_1 et y_2 est :

$$W = C \exp\left(-\int P\left(x\right) dx\right)$$

(a) Sans trouver les solutions de l'éq.(1), déterminer le Wronskien de l'éq.(1)

(b) Vérifier que :

$$y_1(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x^3}{3}\right) \ ,$$

est une solution de l'équation différentielle de l'éq.(1).

(c) Utiliser le Wronskien pour trouver une deuxième solution, y_2. (Indice : Considérer la différentielle de $\tanh(\frac{x^3}{3})$)

(d) Exprimer la solution générale de l'équation différentielle (1).