

Examen Mathématiques pour la physique PAI

6 janvier 2016 : 6 problèmes

Durée de l'épreuve 2 heures.



1. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

(a) $g(x, y) = \frac{x}{y}$

$$dg \equiv \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

(b) $h(x) = \sqrt{x^2(1 - \cos x)}$

Par calcul direct on obtient :

$$\begin{aligned} h &= \left(x^2(1 - \cos x)\right)^{1/2} \\ dh &= \frac{1}{2} \left(x^2(1 - \cos x)\right)^{-1/2} d\left(x^2(1 - \cos x)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2(1 - \cos x)\right)^{-1/2} \left[2x(1 - \cos x) + x^2 \sin x\right] dx \\ &= x \frac{(1 - \cos x) + \frac{x \sin x}{2}}{(x^2(1 - \cos x))^{1/2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= x \left[\frac{(1 - \cos x) + \frac{x \sin x}{2}}{x^2(1 - \cos x)} \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} \right] dx \end{aligned}$$

On aurait pu également utiliser la formule en cours :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d(x^2(1 - \cos x))}{x^2(1 - \cos x)} \right] = \frac{1}{2} \left[2 \frac{dx}{x} + \frac{d((1 - \cos x))}{(1 - \cos x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \frac{dx}{x} + \frac{\sin x}{(1 - \cos x)} dx \right] \\ &= \left[\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} \right] dx \end{aligned}$$

2. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = -y \frac{1 + 2t^2}{t}, \quad y(1) = 2$$

(a) Résoudre l'équation par séparation de variables.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -\frac{1 + 2t^2}{t} dt \\ \ln y &= -\int \frac{1 + 2t^2}{t} dt = -\ln t - \int 2t dt = -\ln t - t^2 + C' \\ y &= \exp(-\ln t - t^2 + C') = C \exp(\ln t^{-1}) \exp(-t^2) \\ y(t) &= \frac{C}{t} \exp(-t^2) \end{aligned}$$

On détermine la constante C à partir des conditions limites :

$$\begin{aligned} y(t=1) &= Ce^{-1} = 2 \\ \Rightarrow C &= 2e \end{aligned}$$

et la solution particulière est :

$$y(t) = \frac{2}{t} \exp(1 - t^2)$$

(b) Vérifier votre résultat :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= C \frac{1}{t} \exp(-t^2) = -\frac{C}{t^2} \exp(-t^2) - 2C \exp(-t^2) \\ &= -\frac{C}{t} \exp(-t^2) \left[\frac{1}{t} + 2t \right] = -y \left[\frac{1}{t} + 2t \right] \\ &= -y \frac{1 + 2t^2}{t} \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver des expressions alternatives faisant apparaître $\sin x$ et $\cos x$ des expressions suivantes :

(a) $\operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right]$ et $\operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right]$

$$\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{(1-e^{-ix})}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})} = \frac{(1-e^{-ix})}{2-e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{(1-\cos x + i \sin x)}{2(1-\cos x)}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{(1-\cos x + i \sin x)}{2(1-\cos x)} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{(1-\cos x + i \sin x)}{2(1-\cos x)} \right] = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} = \frac{\cos x/2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \tan x/2}$$

(b) $\operatorname{Re} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right]$ et $\operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right]$

$$\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix}(1-e^{-ix})}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})} = \frac{(e^{ix}-1)}{2(1-\cos x)} = \frac{(\cos x - 1 + i \sin x)}{2(1-\cos x)}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{(\cos x - 1 + i \sin x)}{2(1-\cos x)} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{(1-\cos x + i \sin x)}{2(1-\cos x)} \right] = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

(c) Utiliser les relations obtenues en 2(a) et 2(b) afin de démontrer que $\operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right] = \frac{1}{2 \tan x/2}$. On voit directement avec 2(a) et 2(b) que

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{ix}}{1-e^{ix}} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{1-e^{ix}} \right] = \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$

et avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin x/2 \cos x/2 \\ (1 - \cos x) &= 2 \sin^2 \frac{x}{2}\end{aligned}$$

On trouve que

$$\frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} = \frac{\sin x/2 \cos x/2}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x/2}{2 \sin x/2} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}}$$

4. Trouver la masse d'une sphère de rayon R où la densité de la sphère s'exprime : $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sin^2 \theta$.

$$\begin{aligned}dV &= r^2 dr \sin \theta d\theta \\ M &= \iiint \rho dV = \int_0^R r^2 dr \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(1 - \frac{r}{R}\right) \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8\pi}{3} \rho_0 \int_0^R r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = \frac{8\pi}{3} \rho_0 \left[\int_0^R r^2 dr - \frac{1}{R} \int_0^R r^3 dr\right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \rho_0 R^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{8\pi}{3} \rho_0 R^3 \frac{1}{12} = \frac{2\pi R^3 \rho_0}{9}.\end{aligned}$$

5. Considérer l'équation différentielle suivante :

$$(3x^2y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0 \quad (1)$$

- (a) Montrer qu'il ne s'agit pas d'une différentielle exacte.

$$\begin{aligned}M(x, y) &= (3x^2y + 2xy + y^3) \\ N(x, y) &= (x^2 + y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= (3x^2 + 2x + 3y^2) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x \neq \frac{\partial M}{\partial y}\end{aligned} \quad (2)$$

- (b) Démontrer que le facteur intégrant, $\mu(x) = e^{3x}$ transforme l'équation (1) en différentielle exacte.

Comme sur la page 41 du chapitre au lien <http://www.fresnel.fr/perso/stout/maths/Equadiff.pdf>, on peut toujours multiplier l'équation $Mdx + Ndy = 0$ par une fonction $\mu(x, y)$ tel que,

$$\mu M dx + \mu N dy = 0, \quad (3)$$

est une différentielle exacte.

Bien qu'un facteur intégrant existe toujours, il n'est pratique de chercher un facteur intégrant que dans les cas où le facteur intégrant est une fonction de x tout seul ou de y tout seul (écritent respectivement $\mu(x)$ et $\mu(y)$).

Dans le cas présent, l'énoncé dit que $\mu(x) = e^{3x}$ est un facteur intégrant, et il suffit de le vérifier.

Par définition, la fonction $\mu(x)$ est un facteur intégrant si

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x) M] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x) N] .$$

On vérifie par calcul directe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \mu(x) M &= \frac{\partial}{\partial y} e^{3x} (3x^2 y + 2xy + y^3) = e^{3x} \left(3x^2 \frac{d}{dy} y + 2x \frac{d}{dy} y + \frac{d}{dy} y^3 \right) \\ &= e^{3x} (3x^2 + 2x + 3y^2) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mu(x) N &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{3x} x^2 + e^{3x} y^2) \\ &= \left(\frac{d}{dx} x^2 e^{3x} + y^2 \frac{d}{dx} e^{3x} \right) \\ &= e^{3x} (3x^2 + 2x + 3y^2) = \frac{\partial}{\partial y} \mu(x) M \end{aligned}$$

Donc, l'éq.(3) avec $\mu(x) = e^{3x}$ s'agit bien d'une différentielle exacte.

- (c) Utiliser la technique standard de page 41 de la référence <http://www.fresnel.fr/perso/stout/maths/Equadiff.pdf> afin de trouver le facteur intégrant.

Sur cette page, on trouve qu'un facteur intégrant, $\mu(x)$, dépendant uniquement de x existe si :

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right]$$

est uniquement une fonction de x (et pas de y). Ceci est vérifié ici puisque on voit avec l'éq.(2) que :

$$\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] = \frac{1}{(x^2 + y^2)} [(3x^2 + 2x + 3y^2) - 2x] = 3 .$$

Un facteur intégrant, $\mu(x)$ s'obtient ensuite par intégration :

$$\begin{aligned} \ln \mu(x) &= \int \frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] dx \\ \Rightarrow \ln \mu(x) &= \int 3 dx = 3x \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{3x} \end{aligned}$$

(d) Résoudre l'équation différentielle :

$$e^{3x} (3x^2y + 2xy + y^3) dx + e^{3x} (x^2 + y^2) dy = 0$$

On peut écrire ceci $\widetilde{M}dx + \widetilde{N}dy = 0$ avec

$$\widetilde{M} = e^{3x} (3x^2y + 2xy + y^3) \quad \text{et} \quad \widetilde{N} = e^{3x} (x^2 + y^2)$$

Puisque qu'on sait qu'il s'agit d'une équation différentielle exacte, on peut trouver $f(x, y)$ par intégration :

$$f(x, y) = \int \widetilde{M}(x, y) dx + g(y)$$

où la « constante » d'intégration est maintenant remplacée par une fonction de y , $g(y)$ (pusique $\frac{\partial g(y)}{\partial x} = 0$). On obtient donc,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int (3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}) dx + g(y) \\ &= \int 3x^2ye^{3x} dx + \int 2xye^{3x} dx + \int y^3e^{3x} dx + g(y) \\ &= y \int 3x^2e^{3x} dx + y \int 2xe^{3x} dx + \frac{y^3e^{3x}}{3} + g(y) \end{aligned}$$

On peut résoudre chacune des ces intégrales par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int 2xe^{3x} dx &= \int u dv = uv - \int v du = \frac{2}{3}e^{3x}x - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{2}{3}e^{3x}x - \frac{2}{9}e^{3x} \end{aligned} \tag{4}$$

où nous avons posé les définitions de u et dv suivantes :

$$\begin{aligned} u &= 2x & dv &= e^{3x} dx \\ du &= 2dx & v &= \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned}$$

On fait l'autre intégrale aussi par parties :

$$\int 3x^2e^{3x} dx = \int u dv = uv - \int v du = x^2e^{3x} - 2 \int e^{3x} x dx$$

avec vette fois les définitions :

$$\begin{aligned} u &= 3x^2 & dv &= e^{3x} dx \\ du &= 6x dx & v &= \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned}$$

mais on a déjà trouvé dans l'éq.(4) que

$$\int xe^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}x - \frac{1}{9}e^{3x},$$

donc

$$\int 3x^2e^{3x} dx = x^2e^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x}x + \frac{2}{9}e^{3x}.$$

Notre solution par intégration pour $f(x, y)$ est donc :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= yx^2e^{3x} - y\frac{2}{3}e^{3x}x + y\frac{2}{9}e^{3x} + y\frac{2}{3}e^{3x}x - y\frac{2}{9}e^{3x} + \frac{y^3e^{3x}}{3} + g(y) \\ &= yx^2e^{3x} + \frac{y^3e^{3x}}{3} + g(y) \end{aligned}$$

On peut déterminer une equation pour $g(y)$ en se rappelant qu'on doit retrouver $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = N(x, y)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) &= x^2e^{3x} + y^2e^{3x} + \frac{d}{dy}g(y) = e^{3x}(x^2 + y^2) + \frac{d}{dy}g(y) \\ &= N(x, y) = e^{3x}(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dy}g(y) &= 0 \Rightarrow g(y) = Cte \end{aligned}$$

Notre solution finale est bien

$$f(x, y) = ye^{3x}\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = Cte.$$

6. La période des oscillations de faible amplitude d'un pendule de longueur l est $T(l, g) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

(a) Calculer T pour un pendule de longueur $l = 1\text{m}$ avec $g = 9,807\text{m/s}^2$.

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.807}} = 2,006$$

(b) Ecrire dT/T (où $dT(l, g)$ est une fonction dépendant de l , et de g).

Avec la formule vue en cours que pour une fonction de type $f = g^\alpha h^\beta$, la différentielle satisfait la relation :

$$\frac{df}{f} = \alpha \frac{dg}{g} + \beta \frac{dh}{h},$$

on peut trouver directement

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} - \frac{1}{2} \frac{dg}{g}$$

puisque

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$$

Si on a oublié cette formule, on peut trouver la différentielle par calcul directe :

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial l} dl + \frac{\partial T}{\partial g} dg \\ \Rightarrow dT &= 2\pi \frac{1}{2} l^{-1/2} g^{-1/2} dl - 2\pi \frac{1}{2} l^{1/2} g^{-3/2} dg = \pi \left[\frac{dl}{\sqrt{gl}} - \frac{dg}{g} \sqrt{\frac{l}{g}} \right] \\ \Rightarrow \frac{dT}{T} &= \frac{\pi \sqrt{g}}{2\pi l^{1/2}} \left[\frac{dl}{\sqrt{gl}} - \frac{dg}{g} \sqrt{\frac{l}{g}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{dl}{l} - \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \end{aligned}$$

- (c) Utiliser le résultat de (b) afin d'approximer la variation de la période du pendule par rapport à une variation de la longueur du pendule de $\delta l = +1\text{cm}$.

$$\begin{aligned}\frac{\delta T}{T} &\simeq \frac{1}{2} \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{2} 10^{-2} \\ \delta T &\simeq 10^{-2} \text{s}\end{aligned}$$

- (d) Utiliser le calcul différentiel afin d'estimer la variation en δg qui donnerait la même variation en période.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \frac{\delta g}{g} &= \frac{1}{2} 10^{-2} \Rightarrow \frac{\delta g}{g} = -\frac{1}{100} \\ \Rightarrow \delta g &= -\frac{g}{100} = -\frac{9,807}{100} \simeq -0,09\end{aligned}$$

- (e) La «constante» gravitationnelle, g , est en réalité une fonction de l'altitude h , plus précisément : $g(h) = \frac{GM_{\text{terre}}}{(R_{\text{terre}}+h)^2}$. Trouver la variation en altitude δh nécessaire d'obtenir la variation δT déterminée en (d) (le rayon de la terre est $R_{\text{terre}} = 6\,371 \text{ km}$).

$$\begin{aligned}g(h) &= C (R_{\text{terre}} + h)^{-2} \\ \frac{dg}{g} &= -\frac{1}{100} = -2 \frac{dh}{R_{\text{terre}}} \\ \Rightarrow dh &\simeq \frac{R_{\text{terre}}}{200} = \frac{6\,371}{200} = \frac{63}{2} \simeq 31\text{km}\end{aligned}$$