Chapitre 2

Les équations différentielles

2.1. Position du problème. Définitions

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Il est souvent impossible d'établir directement la loi reliant y à x, alors qu'il est possible d'exprimer une dépendance entre x, y et les dérivées de y par rapport à x : y', y'', ..., $y^{(n)}$. On a alors une équation différentielle. Trouver la loi $y = f(x)$ à partir des relations entre ces dérivées, c'est **intégrer l'équation différentielle**. Par exemple, la vitesse v d'un corps de masse m en chute dans l'atmosphère s'exprime sous la forme $mdv/dt = mg - kv$, où mg est la force de pesanteur et $-kv$ représente la résistance de 1' air opposée à la vitesse. L'intégration de cette équation conduit à une dépendance temporelle de v donnée par :

$$v(t) = C\exp(-kt/m) + mg/k,$$

où la constante C dépend des conditions initiales : si pour $t = 0$, $v = v_0$, alors $C = v_0 - mg/k$.

D'une manière générale, on appelle **équation différentielle**, *une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$* :

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée dans cette équation.

On appelle **solution** ou **intégrale d'une équation différentielle** *toute fonction $y = f(x)$ vérifiant cette équation.*

En général, x peut être réelle ou complexe et y peut être réelle ou complexe ; dans ce dernier cas il s'agit de fonctions analytiques (dérivables et intégrables) de x. Nous nous limiterons ici au cas où x est réel.

Toute équation différentielle d'ordre n est équivalente à un système de n équations couplées du 1^{er} ordre.

En effet, soit une équation du 3^e ordre $f(x,y,y',y'',y''')=0$. Posons $y'=u$, $y''=v$, u et v étant de nouvelles fonctions de x. On a :

$$f(x,y,u,v,v')=0\ ;\qquad u'=v\ ;\qquad y'=u,$$

c'est-à-dire un système de 3 équations différentielles du 1^{er} ordre, à 3 fonctions inconnues y, u, v de la variable x, qui est équivalent à l'équation de départ.

La réciproque est vraie : un système de n équations différentielles du 1^{er} ordre peut se ramener à une équation différentielle d'ordre n. Soit par exemple, le système :

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z,t)\ ;\\ z' &= g(x,y,z,t)\ ;\\ t' &= h(x,y,z,t), \end{aligned}$$

où y, z et t sont des fonctions inconnues de x. En dérivant la première équation, on a :

$$\begin{aligned} y'' &= f'_x + f'_y f + f'_z g + f'_t h = \varphi(x,y,z,t),\\ y''' &= \varphi'_x + \varphi'_y f + \varphi'_z g + \varphi'_t h = \theta(x,y,z,t). \end{aligned}$$

Eliminons z et t entre les expressions de y', y'' et y''' :

$$y''' = \theta[x,y,z(x,y,y',y''),t(x,y,y',y'')];$$

nous obtenons une équation du 3^e ordre équivalente au système initial.

2.2. EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS

2.2.1. EQUATION DU 1^{ER} ORDRE

Partons de l'équation $F(x,y,y')=0$. Si cette équation est soluble en y', on peut la mettre sous la forme :

$$y' = f(x,y). \tag{2.1}$$

Théorème : *Si dans (2.1) la fonction $f(x,y)$ et sa dérivée partielle $\partial f/\partial y$ sont continues dans un certain domaine D du plan xOy et si (x_0,y_0) est un point de ce domaine, il existe une solution unique $y=\varphi(x)$ telle que $y=y_0$ pour $x=x_0$ (figure 2.1).*

Dans l'annexe 1 nous démontrons cette propriété dans le cas où la fonction $f(x,y)$ est développable en série de TAYLOR autour du point (x_0,y_0) , c'est-à-dire lorsque non seulement $f(x,y)$ est continue dans D, mais aussi ses dérivées.

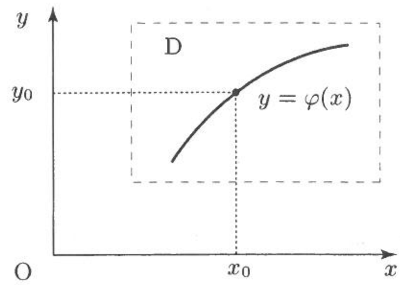

Figure 2.1 – Pour le point (x_0, y_0) appartenant au domaine D, il y a une solution unique $y = \varphi(x)$ de (2.1) telle que $y = y_0$ pour $x = x_0$.

2.2.2. EQUATION DU 2$^{\text{E}}$ ORDRE

Soit une équation différentielle du 2$^{\text{e}}$ ordre $F(x, y, y', y'') = 0$. Si cette équation est soluble en y'' on l'écrit sous la forme :

$$y'' = G(x, y, y'). \tag{2.2}$$

Théorème : *Si G est une fonction continue et dérivable par rapport à y et y' dans un certain domaine D, il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ telle que pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, c'est-à-dire que l'on a une courbe unique passant par un point donné avec une tangente donnée (figure 2.2).*

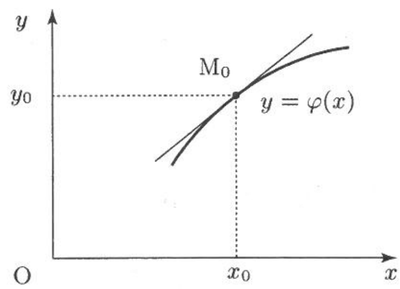

Figure 2.2 – Il y a une seule solution $\varphi(x)$ de (2.2) passant par le point M_0 appartenant au domaine D, ayant une tangente en ce point y'_0.

L'existence de la solution est liée à celle d'un système de deux équations du 1$^{\text{er}}$ ordre auquel peut se ramener (2.2) (*cf.* annexe 1). De plus cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \dots \frac{(x - x_0)^n}{n!}y_0^{(n)} + \dots \tag{2.3}$$

où y_0 et y'_0 sont donnés. Mais d'après (2.2), $y''_0 = G(x_0, y_0, y'_0)$; donc y''_0 est déterminée. En dérivant (2.2) on a :

$$y''' = \frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}y' + \frac{\partial G}{\partial y'}y'',$$

d'où l'on peut déduire y'''_0. On peut ainsi poursuivre le processus, et si la série (2.3) converge, on voit que c'est **l'unique** solution.

2.3. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DU 1ER ORDRE

Nous avons vu que si (x_0, y_0) est un point du domaine de continuité de $f(x, y)$ (et de sa dérivée $\partial f/\partial y$), il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ de l'équation (2.1), telle que $y_0 = \varphi(x_0)$. Donc (2.1) possède une infinité de solutions différentes obtenues en changeant le point du domaine. La condition $y = y_0$ pour $x = x_0$ est la **condition initiale**.

On appelle **solution générale** de l'équation (2.1) une fonction $y = \varphi(x, C)$ dépendant d'une constante arbitraire C et satisfaisant à l'équation différentielle pour toute valeur de C. Si l'on fixe la condition initiale, on aura une valeur C_0 de C telle que $y = \varphi(x, C_0)$ vérifie cette condition, soit $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Remarquons qu'il n'est pas toujours possible d'exprimer la solution générale sous la forme $y = \varphi(x, C)$, mais que l'on obtient souvent cette solution sous la forme implicite $\Phi(x, y, C) = 0$, donnant implicitement y. On dit que Φ est **intégrale générale** de (2.1). De même que $y = \varphi(x, C_0)$ est une **solution particulière** de l'équation différentielle, $\Phi(x, y, C_0)$ est une **intégrale particulière** de (2.1).

Géométriquement, l'intégrale générale représente une famille de courbes dans le plan xOy dépendant d'un paramètre C : ce sont des courbes intégrales. Une intégrale particulière correspond à une courbe particulière de cette famille passant par un point donné.

Par exemple, l'équation très simple $y' = -y/x$ (avec $x \neq 0$) s'écrit $dy/y = -dx/x$, dont la solution est $\ln|y/C| = -\ln|x|$, soit $y = C/x$. On obtient une famille d'hyperboles. La solution particulière telle que $y_0 = 1$ pour $x_0 = 2$ entraîne $C_0 = 2$, donc $y = 2/x$. Cette équation différentielle n'admet pas de solutions sur l'axe des y car pour $x = 0$, le second membre diverge et n'est donc pas continu.

Dans les paragraphes 2.4 à 2.11, nous allons développer les techniques permettant de résoudre plusieurs types d'équations différentielles du 1er ordre.

2.4. LES ÉQUATIONS À VARIABLES SÉPARÉES ET SÉPARABLES

Soit l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \tag{2.4}$$

où la fonction $f_1(x)$ ne dépend que de x et $f_2(y)$ ne dépend que de y. On dit que (2.4) est une équation à **variables séparées**. Si $f_2(y) \neq 0$ dans le domaine considéré, on a :

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \tag{2.5}$$

On a égalité de deux différentielles et en prenant les primitives, on obtient :

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{2.6}$$

c'est-à-dire une relation entre la solution y, la variable x et la constante arbitraire C, qui est l'intégrale générale de (2.4).

L'équation :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{2.7}$$

est une équation à variables séparées. Son intégrale générale est :

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C. \tag{2.8}$$

Une équation de la forme :

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{2.9}$$

est une équation à **variables séparables.** Dans un domaine où ni $N_1(y)$, ni $M_2(x)$ ne s'annulent on peut ramener (2.9) à une équation à variables séparées (2.7) en divisant par $N_1(y)M_2(x)$, soit :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{2.10}$$

2.5. LES ÉQUATIONS HOMOGÈNES DU 1^ER ORDRE

On dit que la fonction $f(x,y)$ est une **fonction homogène** de degré n par rapport aux variables x et y, si pour toute valeur d'un paramètre λ, on a :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Par exemple, les fonctions $(x^2-y^2)/xy$, $(x^3+y^3)^{1/3}$, $xy-y^2$ sont homogènes de degré 0, 1 et 2 respectivement. L'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.11}$$

est **homogène** par rapport à x et y si $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré 0. On a donc $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$. Pour résoudre (2.11), prenons $\lambda = 1/x$, ce qui permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

soit encore, en posant $u = y/x$, donc $y = ux$:

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,u), \quad \text{ou} \quad \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées et par intégration on a :

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C. \tag{2.12}$$

En substituant y/x à u, on obtient ainsi l'intégrale générale de (2.11).

Exemple :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction homogène de degré 0. En appliquant la méthode précédente, on a successivement :

$$f(1,u) - u = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2}$$

et (2.12) s'écrit, en posant $C = \ln|k|$:

$$\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \ln|xk|,$$

d'où :

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln|kxu| \; ;$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|ky|$$

et l'on obtient l'intégrale générale de (2.12) sous la forme :

$$x = y(-2\ln|ky|)^{1/2}.$$

2.6. LES ÉQUATIONS SE RAMENANT AUX ÉQUATIONS HOMOGÈNES

Les équations du type :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \tag{2.13}$$

se ramènent aisément à des équations homogènes. En effet, si $c = f = 0$ l'équation (2.13) est homogène. Dans le cas contraire, on effectue un changement de variables : $x = x_1 + h\,;\ y = y_1 + k$.

Il s'ensuit que (2.13) devient :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{dx_1 + ey_1 + dh + ek + f}. \tag{2.14}$$

On choisit h et k de sorte que :

$$\begin{aligned} ah + bk + c &= 0 \\ dh + ek + f &= 0 \end{aligned}. \tag{2.15}$$

On obtient ainsi une équation homogène $dy_1/dx_1 = (ax_1 + by_1)/(dx_1 + ey_1)$ que l'on résoud et, en revenant aux anciennes variables, on obtient la solution de (2.13).

Notons que le système (2.15) n'a pas de solutions lorsque le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

est nul, c'est-à-dire lorsque $ae = bd$. Mais alors $d/a = e/b = \lambda$, soit $d = \lambda a$ et $e = \lambda b$. L'équation (2.13) s'écrit alors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + f} \tag{2.16}$$

qui se ramène à une équation à variables séparées en posant $z = ax + by$. En effet, on a alors $dz/dx = a + bdy/dx$ et (2.16) devient :

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{b} + \frac{z + c}{\lambda z + f}. \tag{2.17}$$

Les exercices 2.1 et 2.2 donnent des exemples des deux cas de figure précédents. Notons que le processus utilisé pour résoudre (2.13) s'applique à l'intégration de :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right)$$

où φ est une fonction arbitraire et continue.

2.7. LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU 1$^{\text{ER}}$ ORDRE

On appelle **équation linéaire du premier ordre** une équation qui est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y'. Sa forme générale est :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.18}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x données (ou des constantes).

Pour résoudre cette équation, on cherche une solution sous la forme d'un produit de deux fonctions de x comme $y = u(x)v(x)$. Alors :

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

et (2.18) devient :

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q. \tag{2.19}$$

On choisit v de sorte que l'on ait :

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \tag{2.20}$$

soit $dv/v = -Pdx$, dont la solution obtenue par intégration est :

$$\ln|v| = \ln|k| - \int P\, dx$$

ou :

$$v = k \exp\left(-\int P\, dx\right),$$

k étant une constante. Comme il nous suffit d'avoir une solution quelconque non nulle de (2.20) nous prendrons :

$$v(x) = \exp\left(-\int P\, dx\right). \tag{2.21}$$

Remarquons que (2.20) n'est autre que l'équation différentielle (2.18) sans le second membre $Q(x)$. On peut encore dire que (2.21) est une solution de l'équation sans second membre (2.20). Avec ce choix, l'équation (2.19) s'écrit $vdu/dx = Q$, soit $du/dx = Q(x)/v(x)$, d'où :

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\, dx + C$$

et finalement :

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\, dx + C\right]. \tag{2.22}$$

Remarquons que l'expression (2.22) est inchangée si l'on remplace $v(x)$ donnée par (2.21) par $kv(x)$, puisque l'on aura simplement une nouvelle constante arbitraire $C' = kC$. Si l'on pose $\varphi(x) = \int dx\; Q(x)/v(x)$, alors l'intégrale générale de (2.18) devient :

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x). \tag{2.22'}$$

Si l'on impose une condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$, la constante C est déterminée par la relation $y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0)$. L'exercice 2.3 donne un exemple de résolution d'une équation linéaire du 1er ordre.

Un cas particulier important concerne les équations où $P(x)$ et $Q(x)$ se réduisent à des constantes a et b respectivement. L'équation (2.18) devient :

$$\frac{dy}{dx} + ay = b. \tag{2.23}$$

La solution de l'équation sans second membre est $v = \exp(-ax)$ et :

$$\varphi(x) = b \int \exp(ax)\; dx = (b/a)\exp(ax).$$

La solution y s'écrit d' après (2.22') :

$$y = C\exp(-ax) + b/a. \tag{2.24}$$

Notons qu'il était possible de résoudre (2.23) directement puisqu'il s'agit d'une équation à variables séparées, $dx = dy/(b - ay)$.

2.8. L'ÉQUATION DE BERNOULLI

L'équation de BERNOULLI est une équation du type :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.25}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes), et $n \neq 0$, $n \neq 1$, sinon on a une équation linéaire. Notons que le mouvement d'une particule de masse m dans un milieu où la résistance F dépend de la vitesse, $F = aV + bV^n$ se ramène à une équation de ce type puisque la loi fondamentale de la dynamique s'écrit $mdV/dt = -aV - bV^n$, soit $dV/dt + (a/m)V = -(b/m)V^n$.

On peut ramener (2.25) à une équation linéaire en divisant les deux membres par y^n :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x), \tag{2.26}$$

puis en changeant de fonction inconnue en posant $z = y^{1-n}$, d'où :

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

L'équation (2.26) devient, après multiplication par $(1 - n)$:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = (1-n)Q \tag{2.27}$$

qui est une équation linéaire. On calcule l'intégrale générale z de (2.27) et on égale son expression à y^{1-n} pour obtenir la solution générale de l'équation de BERNOULLI.

2.9. LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES

L'équation :

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.28}$$

est une **équation aux différentielles totales** si $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont des fonctions continues dérivables telles que :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2.29}$$

les dérivées $\partial M/\partial y$ et $\partial N/\partial x$ étant continues dans un certain domaine.

Si le premier membre de (2.28) est la différentielle totale d'une fonction $f(x,y)$, on a :

$$M\,dx + N\,dy = df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Donc $M = \partial f/\partial x$, $N = \partial f/\partial y$; ainsi :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Réciproquement, montrons que si la relation (2.29) est satisfaite, le premier membre de (2.28) est la différentielle d'une fonction $f(x,y)$. De la relation $\partial f/\partial x = M(x,y)$, on déduit que :

$$f = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \varphi(y),$$

où x_0 est l'abscisse d'un point arbitraire dans le domaine d'existence de la solution. Choisissons $\varphi(y)$ de manière à ce que l'on ait $\partial f/\partial y = N(x,y)$. Nous avons :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

soit, en vertu de (2.29) :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \quad \text{et} \quad \varphi'(y) = N(x_0,y).$$

D'où :

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy + k.$$

La fonction cherchée est donc :

$$f = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy + k.$$

L'équation différentielle (2.28) s'écrit alors $df(x,y) = 0$ et son intégrale générale $f(x,y) = C$, soit :

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\, dy = C. \tag{2.30}$$

Dans cette expression (x_0, y_0) sont les coordonnées d'un point au voisinage duquel la solution de (2.28) existe.

Exemple : L'équation

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$$

est de la forme (2.28) et satisfait à (2.29). En effet,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}, \qquad \text{pour } y \neq 0.$$

La solution de (2.30) s'écrit en prenant $x_0 = 0$:

$$\frac{x^2}{y^3} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^2} = C, \qquad \text{soit } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

2.10. FACTEUR INTÉGRANT

Supposons que le premier membre de l'équation :

$$M(x,y)\;dx + N(x,y)\;dy = 0 \tag{2.31}$$

ne soit pas une différentielle totale. Il est parfois possible de choisir une fonction $\mu(x,y)$ telle, que si l'on multiplie ce premier membre par μ, l'on obtienne une différentielle totale. La solution générale de l'équation ainsi obtenue coïncide avec la solution générale de l'équation de départ. La fonction $\mu(x,y)$ est un **facteur intégrant** de l'équation (2.31). On a :

$$\mu M\;dx + \mu N\;dy = 0. \tag{2.32}$$

Pour que le premier membre de (2.32) soit une différentielle totale, il faut et il suffit que :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

soit :

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

ou encore :

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

et en divisant par μ :

$$M\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu - N\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.33}$$

Toute fonction μ satisfaisant à (2.33) est un facteur intégrant de (2.31). L'équation (2.33) est une équation aux dérivées partielles qui, dans des conditions déterminées qui sortent du cadre de cet ouvrage, possède une infinité de solutions. Donc, en général, μ existe, mais (2.33) est souvent plus difficile à résoudre que l'équation de départ (2.31). Il n'y a que dans des cas particuliers que l'on peut déterminer μ.

Supposons d'abord que l'équation (2.31) admette un facteur intégrant $\mu(y)$ fonction uniquement de y. D'après (2.33) on a alors :

$$\frac{d}{dy}\ln\mu = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{2.34}$$

Ceci n'est possible que si le second membre de (2.34) ne dépend pas de x.

Par intégration, on peut obtenir $\mu(y)$ à partir de $\ln\mu$. De même, si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ne dépend que de x, on peut trouver un facteur intégrant $\mu(x)$ indépendant de y.

Exemple : Soit à résoudre l'équation $(y + xy^2)\,dx - xdy = 0$. On a :

$$M = y + xy^2\ ; \qquad N = -x\ ;$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2(1+xy)\ ; \qquad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y}.$$

Il y a donc un facteur intégrant $\mu(y)$ qui, d'après (2.34), est donné par :

$$\frac{d}{dy}\ln\mu = -\frac{2}{y}, \qquad \text{soit } \mu = \frac{1}{y^2}.$$

La résolution de l'équation de départ se ramène à celle de l'équation différentielle totale :

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0 \qquad (y \neq 0)$$

dont l'intégration est immédiate avec (2.30), en prenant $x_0 = 0$:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0, \qquad \text{soit } y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

2.11. Solution singulière d'une équation du 1er ordre

Supposons que l'équation $F(x, y, y') = 0$ ait pour intégrale générale $\Phi(x, y, C) = 0$. En prenant différentes valeurs de la constante C, on définit ainsi une famille de courbes dans le plan xOy. Si cette famille de courbes possède une enveloppe, la fonction représentative de cette dernière est aussi solution de l'équation différentielle. C'est une **intégrale singulière**. En effet, en un point M de l'enveloppe, la relation entre y' et x, y est la même que pour la solution particulière passant par ce point puisque, par définition, l'enveloppe est tangente à cette solution (figure 2.3).

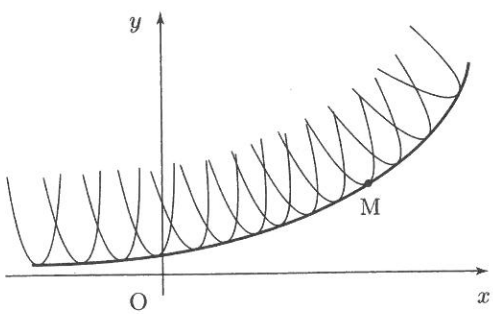

Figure 2.3 – Enveloppe d'une famille de courbes solutions d'une équation $F(x, y, y') = 0$.

En M on a ainsi deux solutions différentes de l'équation différentielle. Le théorème d'unicité est mis en défaut. Il s'agit donc d'un point singulier situé à la frontière du domaine d'existence et d'unicité des solutions.