

Devoir maison - Mathématiques pour la physique : septembre 2020

PAI

1. On considère une sphère de rayon a . La densité inhomogène de la sphère s'exprime $\rho(r, \theta, \phi) = Cr \sin^2 \theta$ où C est une constante. Quelle est la masse totale de la sphère ?
2. Mettre sous forme cartésienne (form $a + ib$ avec a et b dans \mathbb{R}) les nombre complexes suivants :
 - (a) $\frac{3+2i}{1-i}$, $\frac{1+2i}{1-2i}$, $\frac{2+5i}{1-i}$, $\frac{2-5i}{1+i}$, $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$
3. Soit α un nombre complexe différent de 0. Quel est le module de $\alpha/\bar{\alpha}$?
4. Déterminer les formes polaires de
 - (a) $a = 2\sqrt{6}(1+i)$
 - (b) $b = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$
 - (c) En déduire de (a) et (b), les valeurs de $\cos \pi/12$ et de $\sin \pi/12$
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$
 - (a) Montrer que $-1 + e^{2i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \left(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})} \right)$.
 - (b) En déduire de (a) le module et l'argument de $-1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ en discutant selon les valeurs de θ .
6. Soient deux nombres complexes z et z' de module 1. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme polaire de $(1+i)^n$. Pour quelles valeurs de n , $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?
8. Ecrire sous forme polaire, les deux nombres complexes $z_1 = 1-i$, $z_2 = 1+i\sqrt{3}$.
 - (a) Exprimer z_1^n et z_2^n pour tout entier $n \geq 1$ (sous forme polaire).
 - (b) Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z^4 = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ et $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.
 - (c) Déterminer (sous la forme polaire) les trois complexes z_0, z_1, z_2 qui sont les solutions de l'équation $z^3 = 1$, puis placer les points d'affixe z_0, z_1, z_2 dans un repère orthonomé du plan.
 - (d) Exprimer z_0, z_1 et z_2 en fonction de $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
9. Résoudre $(z-i)^5 = (z+i)^5$. Quel est le nombre de solutions ?
10. Trouver les racines carrées de
 - (a) $3-4i$
 - (b) $24-10i$
 - (c) $5+12i$.

11. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$. Comment feriez-vous pour calculer $\cos(\pi/16)$ et $\sin(\pi/16)$?

12. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(a) $z^2 + z - 2 = 0$

(b) $4iz^2 + 2(1 + 6i)z + 2(-1 + 7i) = 0$

(c) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

(d) $z^4 - (1 - i)z^2 - i = 0$