Chapitre 1

Systèmes de coordonnées et vecteurs

1.1 Systèmes de coordonnées

1.1.1 Repère cartésien

Repérage d'un point en coordonnées cartésiennes

Un repère cartésien est défini par un point origine O et trois axes (Ox, Oy, Oz) perpendiculaires entre eux (voir figure 1.1a)). Les vecteurs unitaires portés par les axes sont : $\vec{\boldsymbol{u}}_x$, $\vec{\boldsymbol{u}}_y$, $\vec{\boldsymbol{u}}_z$ que nous allons le plus souvent dénoté simplement par $\widehat{\boldsymbol{x}}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}$, et $\widehat{\boldsymbol{z}}$.

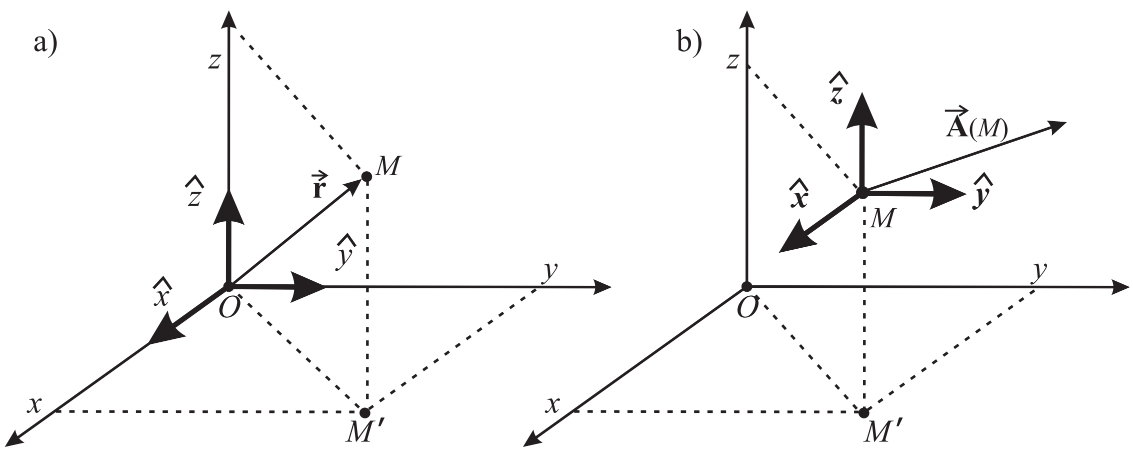

FIGURE 1.1 – *Repère cartésien*

On doit bien noter la disposition relative des directions (Ox, Oy, Oz). Telles qu'elles sont placées, elles définissent un trièdre direct. Dans un tel trièdre, un bonhomme transpercé des pieds à la tête par Oy, regardant la direction Oz, a la direction Ox à sa gauche. On peut noter aussi que Ox, Oy, et Oz sont respectivement orientés selon les directions de l'index, du majeur, et du pouce de la main droite. Un point M de l'espace est repéré par les trois composantes du vecteur $\vec{\boldsymbol{r}}$ joignant O à M (voir fig. 1.1a) :

$$\vec{\boldsymbol{r}}(x, y, z) = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z) \ . \tag{1.1}$$

M' est la projection de M dans le plan (xOy). Les composantes x et y de $\vec{\boldsymbol{r}}$ sont les coordonnées du point M' dans ce plan. La composante z est obtenue en traçant la parallèle à OM' passant par M. On dira indistinctement qu'un objet se trouve au point M ou en $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$. Les components des vecteurs, x, y, z, sont des nombres réels et elles peuvent être positives, négatives ou nulles.

Repérage d'un vecteur en coordonnées cartésiennes

Quand il s'agit de repérer un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}(M)$ dont le point d'application est situé au point $M(x, y, z)$, ou $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(x, y, z)$, on peut décrire ce vecteur avec le même base de vecteurs unitaires $\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}}$ (voir fig.1.1b)). Nous appelons donc $\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}}$, un répère orthonormé **global** parce qu'on peut l'utiliser à décrire un vecteur ayant n'importe lequel point d'application.

Déplacement (différentielle) en coordonnées cartésiennes

La différentielle de la position se trouve facilement à partir de sa définition :

$$d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \equiv \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial x}dx + \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial y}dy + \frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial z}dz = \widehat{\boldsymbol{x}}dx + \widehat{\boldsymbol{y}}\,dy + \widehat{\boldsymbol{z}}\,dz \ . \tag{1.2}$$

La différentielle volume autour d'un point, $d\mathcal{V}$, correspond au produit des trois différentielles de déplacement

$$d\mathcal{V} = dxdydz \ . \tag{1.3}$$

On en déduit également la différentielle de surface orientée $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{x}}dydz + \widehat{\boldsymbol{y}}dxdz + \widehat{\boldsymbol{z}}dxdy \ . \tag{1.4}$$

Exemple - Densité de charge :

La plus souvent en physique, on ne parle pas de charges ponctuelles, mais de densité volumique de charge, $\rho(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$, distribuée dans un gaz, liquide, plasma ou objet solide. La densité de charge, $\rho_v(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$, est analogue à la densité de masse étudiée en cours de mécanique : notamment, si l'on considère un différentielle de volume, $d\mathcal{V}$ autour du point $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ qui enferme une quantité charge appelée dq, la densité volumique de charge en ce point s'écrit par défintion :

$$\rho_v(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) \equiv \frac{dq}{d\mathcal{V}} \ . \tag{1.5}$$

La charge totale, Q_{tot} dans un volume $\mathcal{V}$ quelconque s'obtient en intégrant ρ_v sur ce volume,

$$Q_{\text{tot}} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho_v(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})d\mathcal{V} \ . \tag{1.6}$$

Exercises résolus :

1. On considère une densité volumique de charge donnée par $\rho_v(x, y, z) = \frac{\rho_0}{a^6}xy^2z^3$ à l'intérieur d'un cube de côté, a (le cube occupe la région $a > x > 0$, $a > y > 0$, et $a > z > 0$ et ρ_0 et a sont des constantes). La charge totale contenue dans le cube est obtenue en intégrant sur le volume :

$$\begin{aligned} Q_{\text{cube}} &= \iiint\limits_{\text{cube}} \rho(x, y, z)\, d\mathcal{V} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, \frac{\rho_0}{a^6}xy^2z^3 \\ &= \frac{\rho_0}{a^6} \times \int_0^a xdx \int_0^a y^2dy \int_0^a z^3dz \\ &= \frac{\rho_0}{a^6} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{a^3}{3} \times \frac{a^4}{4} = \frac{\rho_0}{24}a^3 \ . \end{aligned}$$

2. On considère un rectangle défini dans un plan $z = cte$ avec une largueur a selon l'axe Ox et une longueur b selon l'axe Oy. Sa densité surfacique est donnée par $\sigma(x, y) = \frac{\sigma_0}{ab^3} xy^3$. Trouver la charge totale de ce rectangle. Ici, le fait que z est constant nous dicte que $dz = 0$ et l'éq.(1.4) nous donne par conséquence que $\overrightarrow{d\mathcal{S}} \equiv \widehat{\boldsymbol{n}} d\mathcal{S} = \widehat{\boldsymbol{z}} dxdy$ comme il se doit. On ne s'intéresse ici qu'à l'amplitude $d\mathcal{S} = dxdy$ de la différentielle de surface. On obtient la charge totale du rectangle en intégrant σ sur sa surface :

$$\begin{aligned} Q_{\text{rect}} &= \iint\limits_{\text{rect}} \sigma(x, y)\, d\mathcal{S} = \frac{\sigma_0}{ab^3} \int_0^a x dx \int_0^b y^3 dy \\ &= \frac{\sigma_0}{ab^3} \frac{a^2}{2} \frac{b^4}{4} = \frac{ab\sigma_0}{8} \ . \end{aligned}$$

Gradient en coordonnées cartésiennes

La différentielle en coordonnées cartésiennes d'un champ scalaire Φ s'exprime :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \ . \tag{1.7}$$

Le gradient en coordonnées cartésiennes est défini telle que :

$$d\Phi = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \Phi \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \ . \tag{1.8}$$

En insérant les expressions de l'éq.(1.2) et (1.7) dans (1.8) on en déduit qu'en coordonnées cartésiennes que l'opérateur gradient s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} = \widehat{\boldsymbol{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \widehat{\boldsymbol{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \widehat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial}{\partial z} \ . \tag{1.9}$$

1.1.2 Repère cylindrique

Repérage d'un point en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, un point M de l'espace est repéré comme un point de cylindre (droit, à base circulaire) dont l'axe Oz est généralement confondu avec l'axe Oz du repère cartésien.

Le point M (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$) est repéré par

— le rayon ρ du cylindre sur lequel il s'appuie

— z sa distance par rapport au plan de référence xOy

— ϕ l'angle (Ox, OM') où M' est la projection de M sur le plan xOy.

La notation $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(\rho, \phi, z)$ vient se substituer à $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(x, y, z)$ du repère cartésien. Vous pouvez facilement vérifier que, pour un point donné, les composantes cartésiennes et cylindriques sont liées par :

$$x = \rho \cos\phi \qquad y = \rho \sin\phi \qquad z = z \quad . \tag{1.10}$$

Repérage d'un vecteur en coordonnées cylindriques

Nous nous posons la question de repérer un vecteur dont le point d'application est situé au point $M(\rho, \phi, z)$, ou $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(\rho, \phi, z)$. Pour cela nous attachons à M un repère orthonormé local $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{z}}\right)$. Nous l'appelons **local** parce qu'il n'est pas le même pour tous les points M de l'espace. Ce repère local est fait de 3 vecteurs unitaires de base orthogonaux $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{z}}\right)$:

— $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\rho$) est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}}$.

— $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi$) est dans le de croissance de ϕ, c.-à-d. un vecteur contenu dans le plan xOy et perpendiculaire au vecteur $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$.

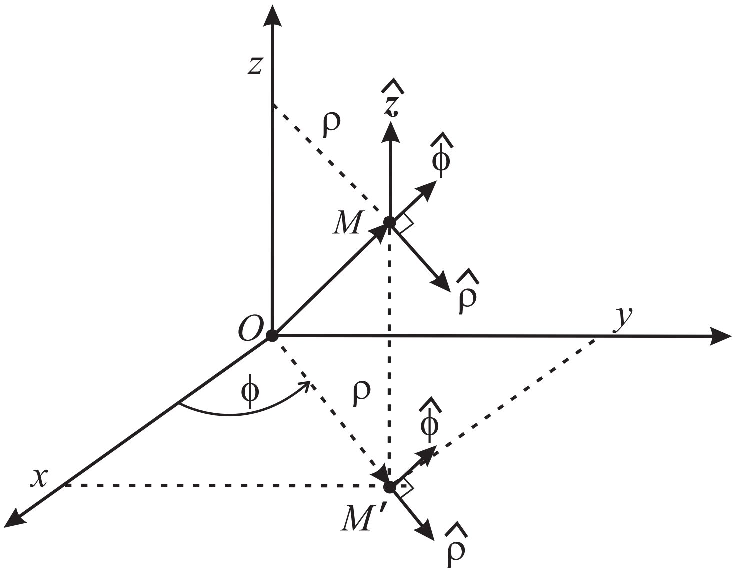

FIGURE 1.2 – *coordonnées cylindriques.*

— $\widehat{\boldsymbol{z}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_z$) est parallèle à l'axe Oz.

En coordonnées cylindriques, un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M)$ (ou simplement $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$) attaché au point $M(\rho, \phi, z)$ est repéré par trois composantes (E_ρ, E_ϕ, E_z) dans un repère orthonormé **local** $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{z}}\right)$: Dans ce repère, le vecteur champ électrique a 3 composantes et s'écrit

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = E_\rho \widehat{\boldsymbol{\rho}} + E_\phi \widehat{\boldsymbol{\phi}} + E_z \widehat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix} .$$

Au point M, la relation entre les vecteurs unitaires $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{z}}\right)$ et les vecteurs unitaires cartésiennes $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}})$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\rho}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \rho}\right|} = \cos\phi\, \widehat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\, \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}\right|} = -\sin\phi\, \widehat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\, \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial z}\right|} = \widehat{\boldsymbol{z}} \ , \end{aligned} \tag{1.11}$$

où nous avons utilisé la relation

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \rho\cos\phi \widehat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\phi \widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}} \ , \tag{1.12}$$

que l'on a obtenue en inserrant les relations de l'éq.(1.10) dans l'eq.(1.1).

On peut voir les relations de l'éq.(1.11) comme une relation matricielle (tensorielle) :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} .$$

Les relation inverses sont obtenues en prenant l'inverse de la matrice T. Puisque les deux bases sont orthonormées, on a $T^{-1} = T^t$ où T^t est la transpose de la matrice T. On obtient de cette manière les vecteurs unitaires $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}})$ en fonction des $\left(\widehat{\boldsymbol{\rho}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{z}}\right)$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} ,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{x}} &= \cos\phi\, \widehat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\, \widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} &= \sin\phi\, \widehat{\boldsymbol{\rho}} + \cos\phi\, \widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} &= \widehat{\boldsymbol{z}} \ . \end{aligned} \tag{1.13}$$

On peut également vérifier ces relations avec de la géométrie.

Déplacement (différentielle) en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques le vecteur position s'exprime

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}} + z\widehat{\boldsymbol{z}} \ ,$$

et la différentielle de déplacement est donc :

$$d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial z}dz \ .$$

Si l'on veut exprimer $d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ en coordonnées cylindriques, il faut tenir compte du fait que le vecteur unitaire local $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ dépend de la coordonnée ϕ (voir eq.(1.11)) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho} &= \widehat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\rho} = \widehat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \left(\text{puisque } \frac{\partial\widehat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\rho} = \mathbf{0}\right) \\ \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\phi} &= \rho\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\phi} = \rho\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\widehat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\widehat{\boldsymbol{y}}\right) = \rho\left(-\sin\phi\widehat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\widehat{\boldsymbol{y}}\right) = \rho\widehat{\boldsymbol{\phi}} \ . \end{aligned}$$

Un déplacement en coordonnées cylindriques s'exprime donc

$$\boxed{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \widehat{\boldsymbol{\rho}}d\rho + \widehat{\boldsymbol{\phi}}\rho d\phi + \widehat{\boldsymbol{z}}dz \ .} \tag{1.14}$$

Cette formule est très utile afin d'en déduire des volumes et des surfaces élémentaires. Par exemple, un élément de volume élémentaire en coordonnées cylindriques (plus précisement la différentielle du volume) s'exprime :

$$\boxed{d\mathcal{V} = (d\rho)\,(\rho d\phi)\,(dz) = \rho d\rho d\phi dz \ .} \tag{1.15}$$

On peut également servir de l'éq.(1.14) afin d'exprimer la différentielle de surface orientée :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{\rho}}\rho d\phi dz + \widehat{\boldsymbol{\phi}}d\rho dz + \widehat{\boldsymbol{z}}d\rho\rho d\phi \ . \tag{1.16}$$

Exemples :

1. On peut utiliser l'éq.(1.15) afin de dériver la formule pour un cylindre de rayon R et de cote L :

$$\begin{aligned}\underset{\text{cylindre } R,L}{\text{Volume}} &= \iiint\limits_{\text{cylindre}} d\mathcal{V} = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^L dz = L\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi L \int_0^R \rho d\rho = \pi R^2 L \ .\end{aligned}$$

2. On peut utiliser l'éq.(1.16) afin de calculer la charge totale d'un disque de rayon a et de charge surfacique $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho^2}{a^2}$. Puisqu'il s'agit d'un disque, on a $dz = 0$, et $\overrightarrow{d\boldsymbol{\mathcal{S}}} = d\mathcal{S}\widehat{\boldsymbol{n}} = \widehat{\boldsymbol{z}}\rho d\rho d\phi$ avec $\widehat{\boldsymbol{n}} = \widehat{\boldsymbol{z}}$ comme le vecteur directeur de la surface. Pour cette utilisation, on n'a besoin que de l'amplitude, $d\mathcal{S} = d\rho\rho d\phi$, de la différentielle de surface. On calcul la charge totale avec l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}Q_{\text{disque}} &= \iint\limits_{\text{disque}} \sigma(\rho)\, d\mathcal{S} = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi\, \sigma_0 \frac{\rho^2}{a^2} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{a^2}\int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{2\pi\sigma_0}{a^2}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a = \frac{\pi\sigma_0 a^2}{2} \ .\end{aligned}$$

Gradient en coordonnées cylindriques

La différentielle en coordonnées cylindriques d'un champ scalaire Φ s'exprime :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz \ . \tag{1.17}$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est défini telle que :

$$d\Phi = \overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \ . \tag{1.18}$$

Une comparaison entre (1.14), (1.17) et (1.18) montre que l'expression du gradient en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\widehat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\widehat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\widehat{\boldsymbol{z}}} \tag{1.19}$$

Exemple : Lorsque le potentiel électrique $V(M)$ est exprimé en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), les composantes du champ électrique dans le repère cylindrique attaché au point M sont données par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,\phi,z) = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V(\rho,\phi,z)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E_\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}} + E_\phi\widehat{\boldsymbol{\phi}} + E_z\widehat{\boldsymbol{z}} \qquad \begin{aligned} E_\rho &= -\tfrac{\partial V}{\partial\rho} \\ E_\phi &= -\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial V}{\partial\phi} \\ E_z &= -\tfrac{\partial V}{\partial z}\end{aligned} \ .$$

Le potentiel créé par une distribution linéique de charge avec une densité par unité de longueur λ est donné par $V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\rho) + Cte$. On obtient immédiatement le champ électrique par

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho) = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\boldsymbol{\rho}} \ .$$

1.1.3 Coordonnées sphériques

Repérage d'un point en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un point $M(r, \theta, \phi)$ est considéré comme un point d'une sphère centrée sur O. Le point M est repéré

- par le rayon r de la sphère à laquelle il appartient
- L'angle θ entre la direction $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}$ et la direction $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$. $\theta = (\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$
- l'angle ϕ entre la direction $\overrightarrow{\boldsymbol{Ox}}$ et la direction $\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}}$ où M' est la projection de M dans le plan xOy. : $\phi = (\overrightarrow{\boldsymbol{Ox}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM'}})$

Un point $M(r, \theta, \phi)$ étant donné, on trouve que ses coordonnées cartésiennes s'écrivent en fonction des coordonnées sphériques ; ainsi :

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = r \sin\theta \sin\phi \qquad z = r\cos\theta \tag{1.20}$$

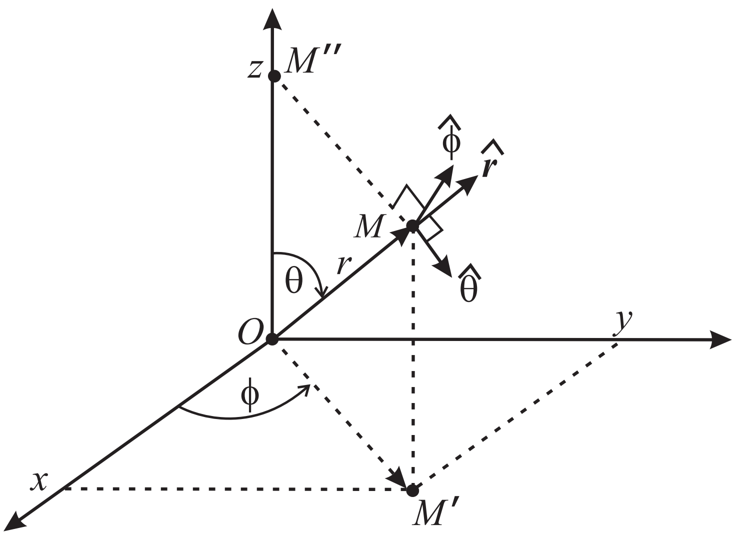

FIGURE 1.3 – *Coordonnées sphériques*

.

En géographie, où on est amené à repérer un point sur la sphère terrestre, l'angle θ indiquerait la latitude par rapport au pôle nord et l'angle ϕ, la longitude est par rapport au méridien de référence.

Repérage d'un vecteur en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M)$ (ou simplement $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$) attaché au point $M(r, \theta, \phi)$ est repéré par trois composantes (E_r, E_θ, E_ϕ) dans un repère orthonormé **local** $\left(\widehat{\boldsymbol{r}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = E_r \widehat{\boldsymbol{r}} + E_\theta \widehat{\boldsymbol{\theta}} + E_\phi \widehat{\boldsymbol{\phi}} \ ,$$

avec

- $\widehat{\boldsymbol{r}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_r$) est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.
- $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\theta$) est parallèle au vecteur tangent en M au cercle de rayon r décrit dans le plan qui contient à la fois les directions $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}}$.
- $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ (ou $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_\phi$) est tangent en M au cercle de centre M'' et de rayon $M''M = OM'$, contenu dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{\boldsymbol{Oz}}$.

Au point M, la relation entre les vecteurs unitaires $\left(\widehat{\boldsymbol{r}},\widehat{\boldsymbol{\theta}},\widehat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ et les vecteurs unitaires cartésiennes $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{y}},\widehat{\boldsymbol{z}})$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{r}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}\right|} = \sin\theta\cos\phi\,\widehat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\widehat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\,\widehat{\boldsymbol{z}} \\
\widehat{\boldsymbol{\theta}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}\right|} = \cos\theta\cos\phi\,\widehat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\widehat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\,\widehat{\boldsymbol{z}} \\
\widehat{\boldsymbol{\phi}} &\equiv \frac{\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}\right|} = -\sin\phi\,\widehat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\,\widehat{\boldsymbol{y}} \quad ,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

où nous avons utilisé la relation,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = r\sin\theta\cos\phi\widehat{\boldsymbol{x}} + r\sin\theta\sin\phi\widehat{\boldsymbol{y}} + r\cos\theta\widehat{\boldsymbol{z}} \ , \tag{1.22}$$

que l'on a obtenue en insérant les relations de l'éq.(1.20) dans l'eq.(1.1).

On peut voir les relations de l'éq.(1.21) comme une relation matricielle (tensorielle)

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{r}} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \ , \tag{1.23}$$

ainsi que les relation inverses,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \widehat{\boldsymbol{y}} \\ \widehat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{r}} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} = T^{t} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{r}} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{r}} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ \widehat{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

où nous avons encore utilisé le fait que les deux bases sont orthonomés implique que $T^{-1} = T^{t}$.

Exemple de coordonnées sphériques : Considérons le potentiel et le champ électriques créés par une charge ponctuelle q placée à l'origine O. En coordonnées sphériques, ceux-ci s'expriment entièrement en fonction du vecteur radial $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$ et la coordonnée radiale $r = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3} \qquad (\text{avec}\,\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = r\widehat{\boldsymbol{r}}) \ ,$$

ce qui est plus simple et "naturel" que les expressions en coordonnées cartésiennes :

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ .$$

Position et déplacement (différentielle) en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, le vecteur position s'écrit simplement

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = r\widehat{\boldsymbol{r}} \ .$$

La différentielle, $d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$, en coordonnées sphériques s'éxprime :

$$d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}dr + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}d\phi \ .$$

Afin d'exprimer $d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ en coordonnées sphériques, il faut tenir compte du fait que le vecteur unitaire local $\widehat{\boldsymbol{r}}$ dépend des coordonnées θ, et ϕ (mais pas sur r) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial r} &= \widehat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = \widehat{\boldsymbol{r}} \\
\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta} &= r\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} = r\widehat{\boldsymbol{\theta}} \\
\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi} &= r\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{r}}}{\partial \phi} = r\sin\theta\widehat{\boldsymbol{\phi}} \ .
\end{aligned}$$

Un déplacement en coordonnées sphériques s'exprime donc

$$\boxed{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = dr\,\widehat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\,\widehat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\widehat{\boldsymbol{\phi}}} \ . \tag{1.25}$$

Comme pour les autres systèmes de coordonnées, on peut utiliser la différentielle de position afin de trouver le différentielles de volume et de surface. La différentielle d'un un élément de volume élémentaire en coordonnées sphériques est donc :

$$\boxed{d\mathcal{V} = (dr)\,(rd\theta)\,(r\sin\theta d\phi) = r^2dr\sin\theta d\theta d\phi} \ . \tag{1.26}$$

On peut également servir de l'éq.(1.25) afin d'exprimer la différentielle de surface orientée :

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{r}}r^2\sin\theta d\theta d\phi + \widehat{\boldsymbol{\theta}}r\sin\theta dr d\phi + \widehat{\boldsymbol{\phi}}r dr d\theta \ . \tag{1.27}$$

Exemples :

1. On peut utliser l'éq.(1.26) afin de dériver la formule pour le volume d'une sphère de rayon R :

$$\begin{aligned}
\underset{\text{sphère de rayon } R}{\text{Volume}} &= \iiint\limits_{\text{sphère}} d\mathcal{V} = \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi = \int_0^R r^2dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi\int_0^R r^2dr\int_{-1}^1 du = 4\pi\int_0^R r^2dr = \frac{4\pi}{3}R^3 \ .
\end{aligned}$$

   où nous avons fait le changement de variable $u = \cos\theta$ et la relation différentielle associée $du = -\sin\theta d\theta$ afin de trouver :

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \Rightarrow \int_{-1}^1 du = 2 \ .$$

2. Quelle est la charge totale d'une sphère de rayon R dont la charge volumique s'exprime $\rho_v\,(r) = \rho_0\frac{r}{R}$? (**Attn! :** Il ne faut pas confondre la densité de charge volumique ρ_v avec la coordonnée cylindrique ρ). Cet accident de notation ne pose pas trop de difficultés ici puisque il s'agit dans ce problème de coordonnées sphériques, r, θ, ϕ. La charge totale se trouve par une intégration de la densité volumique :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{sphère}} &= \iiint\limits_{\text{sphère}} \rho_v\,(r)\,d\mathcal{V} = \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} \rho_0\frac{r}{R}r^2\sin\theta d\phi \\
&= 4\pi\rho_0\int_0^R \frac{r^3}{R}dr = \frac{4\pi\rho_0}{R}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \pi\rho_0R^3 \ .
\end{aligned}$$

3. Quelle est la charge totale sur une **surface** sphérique définie par $r = a$ quand la densité de charge surfacique s'exprime $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin^2\theta$? Puisque il s'agit d'une surface à rayon constant, on a $dr = 0$ ce qui donne dans l'éq.(1.27) que $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} \equiv \widehat{\boldsymbol{n}} d\mathcal{S} = \widehat{\boldsymbol{r}} a^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Ici, on ne s'intéresse qu'à l'amplitude de la différentielle de surface, $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$, c.-à-d. $d\mathcal{S} = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$, et on obtient la charge totale en intégrant la densité surfacique :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{surface}} &= \iint\limits_{\text{surface}} \sigma(\theta)\, d\mathcal{S} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, a^2 \sigma_0 \sin^2\theta \sin\theta \\
&= 2\pi a^2 \sigma_0 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = 2\pi a^2 \sigma_0 \int_{-1}^{1} \left(1 - \cos^2\theta\right) d(\cos\theta) \\
&= 2\pi a^2 \sigma_0 \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right) du = 2\pi a^2 \sigma_0 \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8\pi a^2 \sigma_0}{3}\ .
\end{aligned}$$

Gradient en coordonnées sphériques

La différentielle en coordonnées sphériques s'écrit :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi \equiv \overrightarrow{\textbf{grad}}\, \Phi \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \tag{1.28}$$

Une comparaison entre cette équation et l'éq.(1.25) montre que l'expression du gradient en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\, \Phi = \widehat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \widehat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \widehat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \tag{1.29}$$

Exemple : Pour une charge ponctuelle située à l'origine par exemple, si on se rappelle que son potentiel électrique, s'écrit $V(r) = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, on obtient toute suite son champ électrique en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) &= -\overrightarrow{\textbf{grad}} V(r) = -\widehat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \widehat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{\boldsymbol{r}}}{r^2}
\end{aligned}$$

alors que le calcul est plus onéreux en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}} \\
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x,y,z) &= -\overrightarrow{\textbf{grad}} V(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\widehat{\boldsymbol{x}} \frac{\partial V}{\partial x} + \widehat{\boldsymbol{y}} \frac{\partial V}{\partial y} + \widehat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \widehat{\boldsymbol{x}} + \frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \widehat{\boldsymbol{y}} + \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \widehat{\boldsymbol{z}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}}{r^3}
\end{aligned}$$