

Diffraction par un réseau de tiges métalliques rectangulaires (RCW)

On considère un réseau de diffraction constitué de tiges métalliques rectangulaires identiques, parallèles, de longueur infinie dans la direction de l'axe  $Oz$ . La période du réseau est  $d$ , la hauteur de la zone modulée est  $h$ , et l'espacement entre les tiges est  $a$ , comme illustré sur la figure. Les tiges sont constituées d'un métal bon conducteur non ferromagnétique tel que l'argent, d'indice complexe  $\nu_2$  ; elles baignent dans l'air d'indice  $\nu_1 = 1$ . Le réseau est éclairé sous l'incidence  $\theta$  par une onde plane sinusoïdale monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_1$ , de pulsation  $\omega$ , et le vecteur  $\vec{\mathcal{H}}$  est parallèle à l'axe  $Oz$ .

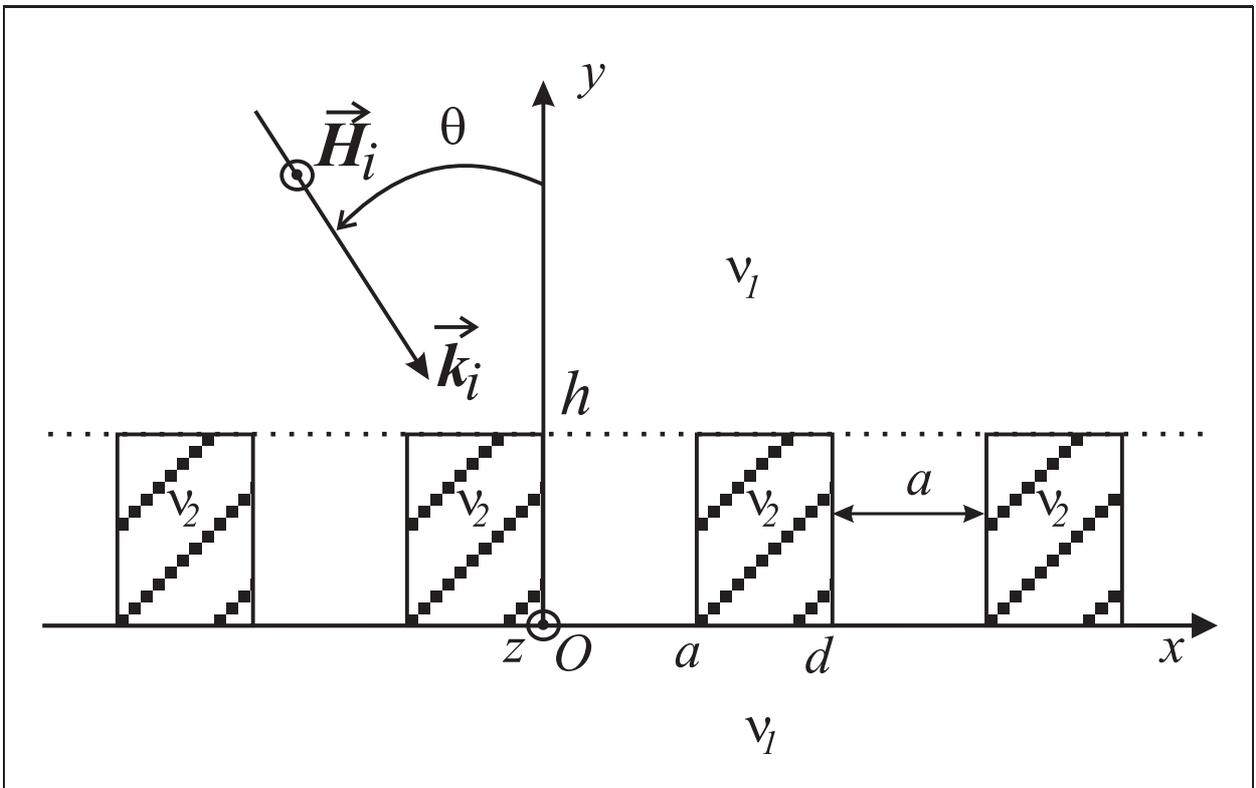


Figure 1:

I Généralités :

1. *Ecrire l'expression de l'onde plane incidente définie par sa composante  $\mathcal{H}_z^i$ .*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z^i &= A_i \exp [i \vec{\mathbf{k}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}] = A_0 \exp [i \vec{\mathbf{k}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}] \\ &= A_0 \exp [ik_1 (x \sin \theta - y \cos \theta)] \equiv A_0 \exp [i (\alpha x - \beta y)] \end{aligned}$$

où  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega}{c} \nu_1$ .

Montrer que la linéarité du problème permet d'établir la pseudo-périodicité du champ total  $\mathcal{H}_z$  :  $\mathcal{H}_z(x+d, y) = \mathcal{H}_z(x, y) e^{i\alpha d}$ , où  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sin \theta$ . En déduire que  $\mathcal{H}_z$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n(y) e^{i\alpha_n x} \quad \text{où} \quad \alpha_n = \alpha + n \frac{2\pi}{d} \quad (1)$$

Il doit exister un opérateur linéaire (disons l'opérateur  $\mathcal{R}$ ) qui dépend des coordonnées  $x$  et  $y$  (au module de  $d$  près : voir ci-dessous) et qui relie le champ incident au champ total  $\mathcal{H}(x, y)$  :

$$\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{R}\mathcal{H}^i(x, y) \quad (2)$$

La linéarité de cette opérateur implique que pour  $\forall C$  où  $C$  est une constante :

$$\forall C \quad C\mathcal{H}(x, y) = \mathcal{R}C\mathcal{H}^i(x, y)$$

Faisons subir au trièdre de référence une translation d'amplitude  $-d$  le long de  $Ox$ . La structure infini idéale étant invariante dans cette translation, **l'opérateur  $\mathcal{R}$  est inchangé** tandis que  $\mathcal{H}^i(x, y)$  et  $\mathcal{H}(x, y)$  sont respectivement remplacés par  $\mathcal{H}^i(x+d, y)$  et  $\mathcal{H}(x+d, y)$ . On peut donc écrire que :

$$\mathcal{H}(x+d, y) = \mathcal{R}\mathcal{H}^i(x+d, y)$$

ou encore

$$\mathcal{H}(x+d, y) = \mathcal{R}e^{ik_1 \sin \theta d} \mathcal{H}^i(x, y) = e^{ik_1 \sin \theta d} \mathcal{R}\mathcal{H}^i(x, y)$$

ce qui après l'éq.(2) entraîne

$$\mathcal{H}(x+d, y) = e^{ik_1 \sin \theta d} \mathcal{H}(x, y) \quad (3)$$

qui est l'expression de pseudo-périodicité du champ total.

La fonction  $\mathcal{H}(x, y) e^{-i\alpha x}$  est donc périodique en  $x$  de période  $d$ .

En effet :

$$[\mathcal{H}(x+d, y) e^{-i\alpha(x+d)}] = \mathcal{H}(x, y) e^{i\alpha d} e^{-i\alpha x} e^{-i\alpha d} = \mathcal{H}(x, y) e^{-i\alpha x}$$

Un champ périodique est développable en série de Fourier, i.e.

$$\mathcal{H}(x, y) e^{-i\alpha x} = \sum_{-\infty}^{\infty} H_n(y) e^{in \frac{2\pi}{d} x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n(y) e^{inKx} \quad \boxed{K = \frac{2\pi}{d}}$$

Le champ total  $\mathcal{H}(x, y)$  est donc développable en série de Fourier généralisée :

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n(y) e^{i\alpha_n x} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \alpha + nK = k_1 \sin \theta + nK$$

## 2. *Ecrire les équations de Maxwell harmoniques et les projeter sur les axes de coordonnées.*

On travail dans le domaine harmonique, (i.e. dépendance temporelle de  $e^{-i\omega t}$ ). Comme d'habitude, puisque on cherche des solutions des équations de Maxwell loin des sources de l'onde incidente, on utilise les deux équations de Maxwell (sans les sources) :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{E}} &= i\omega\mu_0 \vec{\mathcal{H}} \\ \text{rot } \vec{\mathcal{H}} &= -i\omega\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (4)$$

Comme notre habitude, on n'écrit pas les deux autres solutions (sans source) :  $\text{div } \vec{\mathcal{B}} = 0$  et  $\text{div } \vec{\mathcal{D}} = 0$  puisque elles sont déjà impliquées par les eqs.(4); i.e. elles sont obtenues en prenant la divergence des eqs.(4) et en appliquant l'identité vectorielle  $\text{div}(\text{rot } \vec{f}) \equiv 0$ .  
Ecrivons les équations de Maxwell (eq.(4)) projetés sur les axes de coordonnées :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_x \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_y \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_z \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_x \quad (5d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_y \quad (5e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_z \quad (5f)$$

*Montrer que l'invariance du problème le long de la direction Oz permet de découpler les 6 équations obtenues en 2 systèmes indépendants.*

Les système d'équations des modes TE vient des équations (5a) (5b) et (5f).

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_x \quad (6a)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_y \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_z \quad (6c)$$

Les système d'équations des modes TM vient des équations (5c) (5d) et (5e) :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}_z \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_x \quad (7b)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E}_y \quad (7c)$$

*On s'intéresse par la suite à la solution TM définie par ses composantes  $\mathcal{H}_z$ ,  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_y$  (avec  $\mathcal{E}_z = 0 = \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y$ ). On pose :*

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{i\omega\mu_0} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n(y) e^{i\alpha_n x} \quad (8)$$

Montrer que les fonctions inconnues  $H_n(y)$  et  $\tilde{E}_n(y)$  sont solutions du système différentiel infini :

$$\begin{aligned}\frac{dH_n}{dy} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (k^2)_{n-m} \tilde{E}_m(y) \\ \frac{d\tilde{E}_m}{dy} &= \left\{ \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m \left( \frac{1}{k^2} \right)_{n-m} H_m \right\} - H_n\end{aligned}\quad (9)$$

où  $(k^2)_p$  est le  $p^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier de la fonction  $k^2(x, y) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \nu^2(x, y)$ , et

$$\nu^2(x, y) = \begin{cases} \nu_2^2 & \text{dans les tiges} \\ \nu_1^2 & \text{hors des tiges} \end{cases} .$$

L'éq. (5e)

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{E}_y &= \frac{1}{i\omega \epsilon \epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_y = \frac{\mathcal{E}_y}{i\omega \mu_0} = -\frac{1}{\omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_y &= -\frac{c^2}{\omega^2 \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}\end{aligned}$$

L'éq. (5c)

$$\begin{aligned}\Rightarrow i\omega \mu_0 \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_x}{\partial y} \right) &= i\omega \mu_0 \mathcal{H}_z \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_x}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_y}{\partial x} - \mathcal{H}_z \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_x}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{k^2} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \right] - \mathcal{H}_z\end{aligned}\quad (10)$$

L'éq. (5d)

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = \omega^2 \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \tilde{\mathcal{E}}_x = k^2(x, y) \tilde{\mathcal{E}}_x \quad (11)$$

Les développements pseudo-périodique de l'éq.(11) et (10) s'expriment suivant le règle de Laurent

$$\begin{aligned}\frac{dH_n}{dy} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [k^2]_{n-m} \tilde{E}_m \\ \frac{d\tilde{E}_n}{dy} &= \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \left[ \frac{1}{k^2} \right]_{n-m} H_m - H_n\end{aligned}\quad (12)$$

En forme matricielle ces équations s'écrivent

$$\frac{d}{dy} [H] = [[k^2]] [\tilde{E}] \quad (13)$$

$$\frac{d}{dy} [\tilde{E}] = \alpha \left[ \left[ \frac{1}{k^2} \right] \right] \alpha [H] - [H] \quad (14)$$

L'application numérique directe de l'éq.(12) rencontrerait des problèmes de troncation pour ces modes TM. La technique du FFF peut être appliquée facilement pour les réseaux de tiges rectangulaire. On se rappelle que  $[[k^2]] \left[ \tilde{E} \right]$  est le développement de  $\mathcal{D}_x$  qui est normale à la surface des tiges  $0 < y < h$ . Par conséquent  $\frac{d}{dy} [H]$  est une fonction continue alors que  $k^2$  et  $\tilde{E}$  ne le sont pas. On devrait donc appliquer la règle de Laurent seulement dans le sens :

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{E} \right] &= \left[ \left[ \frac{1}{k^2} \right] \right] \frac{d}{dy} [H] \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} [H] &= \left[ \left[ \frac{1}{k^2} \right] \right]^{-1} \left[ \tilde{E} \right] \end{aligned}$$

On se rappelle que dans l'éq.(14), il s'agit de l'équation

$$\tilde{\mathcal{E}}_y = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

Ici  $\tilde{\mathcal{E}}_y$  est une fonction continue, et  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$  ne le sont pas. On devrait appliquer développer la règle de Laurent dans le sens

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [H] &= \alpha [H] = [[k^2]] \left[ \tilde{E}_y \right] \\ \Rightarrow \left[ \tilde{E}_y \right] &= [[k^2]]^{-1} \alpha [H] \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\frac{d}{dy} \left[ \tilde{E} \right] = \alpha [[k^2]]^{-1} \alpha [H] - [H]$$

Le système d'équations final du FFF est donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} [H] &= \left[ \left[ \frac{1}{k^2} \right] \right]^{-1} \left[ \tilde{E} \right] \\ \frac{d}{dy} \left[ \tilde{E} \right] &= \alpha [[k^2]]^{-1} \alpha [H] - [H] \end{aligned} \quad (15)$$

3. *Que devient le système différentiel (3-4) si  $y > h$  où  $y < 0$  ? Montrer que si  $y > h$ ,  $\mathcal{H}_z$  peut s'écrire sous la forme :*

$$\mathcal{H}_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \exp(-i\beta_n y) \exp(i\alpha_n x) + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n \exp(i\beta_n y) \exp(i\alpha_n x) \quad (16)$$

*où les  $\beta_n$  sont des quantités que l'on déterminera. Discuter la signification physique des divers termes de l'expression (16).*

Si  $y > h$  où  $y < 0$ ,  $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0$  et  $k^2(x, y) = k_1^2 = Cte$  sur  $x, y$ . Le système différentiel prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dH_n}{dy} &= k_1^2 \tilde{E}_n \\ \frac{d\tilde{E}_n}{dy} &= \alpha_n^2 \frac{1}{k_1^2} H_n - H_n = \frac{1}{k_1^2} (\alpha_n^2 - k_1^2) H_n \end{aligned}$$

d'où on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H_n}{dy^2} &= -(k_1^2 - \alpha_n^2) H_n \\ &= -\beta_n^2 H_n\end{aligned}$$

avec

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k_1^2 - \alpha_n^2} & \text{si } k_1^2 - \alpha_n^2 > 0 \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k_1^2} & \text{si } k_1^2 - \alpha_n^2 < 0 \end{cases}$$

La solution des  $H_n$  est donc :

$$\begin{aligned}\Rightarrow H_n(y) &= A_n e^{-i\beta_n y} + B_n e^{i\beta_n y} \\ \Rightarrow \mathcal{H}(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\beta_n y} e^{i\alpha_n x} + B_n e^{i\beta_n y} e^{i\alpha_n x}\end{aligned}$$

Les  $A_n$  représentent des ondes descendantes (i.e. incidentes) ou anti-évanescantes. Les C.O.S.  $\Rightarrow A = A_0 \delta_{n,0}$ ,  $\alpha_0 = \alpha = k_1 \sin \theta$ ,  $\beta_0 = -k_1 \cos \theta$ .

Les  $B_n$  représentent des ondes montantes ou évanescantes du champ diffracté. Le développement de Rayleigh du champ total dans la région  $y > h$  est donc :

$$\mathcal{H}(x, y) = \underbrace{A_0 e^{-i\beta_0 y} e^{i\alpha x}}_{\mathcal{H}^i: \text{ champ incidente}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i\beta_n y} e^{i\alpha_n x}}_{\mathcal{H}^d: \text{ champ diffracté}} \quad y > h$$

Le champ transmis s'exprime aussi comme un développement de Rayleigh :

$$\mathcal{H}(x, y) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{-i\beta_n y} e^{i\alpha_n x}}_{\mathcal{H}^t: \text{ champ transmis}} \quad y < 0$$

4. *En utilisant le théorème du vecteur de Poynting complexe, montrer que l'efficacité diffracté en réflexion dans l'ordre  $n$  est donné par :*

$$e_n^r = \frac{B_n \overline{B_n} \beta_n}{A_0 \overline{A_0} \beta_0}$$

L'efficacité de l'ordre  $n$  est définie par

$$e_n^r = \frac{\Phi_n}{\Phi^i}$$

où les  $\Phi$  sont les flux du vecteur de Poynting à travers une surface arbitraire de longueur  $l$  et de largeur  $d$  dans le plan  $x(O + a)y$

$$\mathcal{P} = \frac{\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*}{2} \quad (17)$$

Pour une onde plane (comme l'onde incidente ou un ordre de diffraction ou transmission) les équations de Maxwell, (4), donnent

$$\begin{aligned} k_1 \left| \vec{\mathcal{H}} \right| &= \omega \varepsilon_1 \epsilon_0 \left| \vec{\mathcal{E}} \right| \\ \Rightarrow k_0 \nu_1 \left| \vec{\mathcal{H}} \right| &= \omega \nu_1^2 \epsilon_0 \left| \vec{\mathcal{E}} \right| = k_0 \nu_1^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left| \vec{\mathcal{E}} \right| \equiv \frac{k_0 \nu_1^2}{z_0} \left| \vec{\mathcal{E}} \right| \\ \Rightarrow \left| \vec{\mathcal{E}} \right| &= \frac{z_0}{\nu_1} \left| \vec{\mathcal{H}} \right| \end{aligned}$$

où  $\nu_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$  est l'indice du superstrat et  $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  est l'impédance du vide. Les amplitudes du vecteur de Poynting sont donc :

$$\left| \vec{\mathcal{P}}^i \right| = \frac{z_0}{2\nu_1} |\mathcal{H}^i|^2 \quad \left| \vec{\mathcal{P}}^r \right| = \frac{z_0}{2\nu_1} |\mathcal{H}^r|^2$$

On obtient finalement que les vecteurs de Poynting s'écrivent

$$\vec{\mathcal{P}}^i = \frac{z_0}{2\nu_1} |\mathcal{H}^i|^2 \hat{\mathbf{k}}_i = \frac{z_0}{2\nu_1} |A_0|^2 \hat{\mathbf{k}}_i \quad \vec{\mathcal{P}}^r = \frac{z_0}{2\nu_1} |\mathcal{H}_n^r|^2 \hat{\mathbf{k}}_n = \frac{z_0}{2\nu_1} |B_n|^2 \hat{\mathbf{k}}_n$$

Les flux à travers une surface parallèle au plan  $xOz$ , ( pris de façon arbitraire comme une surface rectangulaire de dimension  $d \times l$  ) s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned} \Phi^i &= |A_0|^2 \times d \times l \times \frac{1}{2\nu_1} \times z_0 \times \cos \theta \\ \Phi_n &= |B_n|^2 \times d \times l \times \frac{1}{2\nu_1} \times z_0 \times \cos \theta_n \end{aligned}$$

et les efficacités des ordres réfléchis sont

$$e_n^r = \frac{\Phi_n}{\Phi^i} = \frac{|B_n|^2 \cos \theta_n}{|A_0|^2 \cos \theta} = \frac{|B_n|^2 \beta_n}{|A_0|^2 \beta_0}$$

Remarque : Puisque  $|B_n| \propto |A_0|$  nous avons l'habitude de prendre  $A_0 = 1$ .

## II Méthode aux valeurs propres ; calcul du champ dans la zone modulée

*En vue d'un traitement numérique sur ordinateur, on tronque les séries (1) et (2) à  $2N + 1$  coefficients, de  $n = -N$  à  $n = +N$ , et l'on introduit un vecteur colonne, à  $4N + 2$  composantes,  $[F(y)]$  formé de 2 blocs comprenant l'un les composantes  $H_n(y)$ , l'autre les composantes  $\tilde{E}_n(y)$  :*

$$[F(y)] = \begin{pmatrix} \vdots \\ H_n(y) \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ \tilde{E}_n(y) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les équations de propagation se mettent sous la forme :

$$\frac{d[F(y)]}{dy} = M[F(y)] \quad (18)$$

où  $M$  est une matrice dont on précisera les différents blocs. Montrer que  $M$  est indépendante de  $y$ , pour  $y \in [0, h]$ .

On doit mettre les eqs.(12) en forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{dH_n}{dy} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [k^2]_{n-m} \tilde{E}_m \\ \frac{d\tilde{E}_n}{dy} &= \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \left[ \frac{1}{k^2} \right]_{n-m} H_m - H_n \end{aligned} \quad (19)$$

ou selon FFF

$$\begin{aligned} \frac{dH_n}{dy} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [[k^2]]_{n,m}^{-1} \tilde{E}_m \\ \frac{d\tilde{E}_n}{dy} &= \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m [[k^2]]_{n,m}^{-1} H_m - H_n \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} [M_{1,1}]_{n,m} &= 0 = [M_{2,2}]_{n,m} \\ [M_{1,2}]_{n,m} &= [k^2]_{n-m} \\ [M_{2,1}]_{n,m} &= \alpha_n \alpha_m \left[ \frac{1}{k^2} \right]_{n-m} - \delta_{n,m} \end{aligned}$$

et avec FFF

$$\begin{aligned} [M_{1,1}]_{n,m} &= 0 = [M_{2,2}]_{n,m} \\ [M_{1,2}]_{n,m} &= [[k^2]]_{n,m}^{-1} \\ [M_{2,1}]_{n,m} &= \alpha_n \alpha_m [[k^2]]_{n,m}^{-1} - \delta_{n,m} \end{aligned}$$

Pour  $y \in [0, a]$

$$k^2(x, y) = \begin{cases} k_0^2 \nu_1^2 & \text{si } x \in [0, a] > 0 \\ k_0^2 \nu_2^2 & \text{si } x \in [a, d] > 0 \end{cases}$$

ce qui implique que pour  $y \in [0, a]$ ,  $k^2(x, y) = Cte$  sur  $y$ . De même pour  $\frac{1}{k^2}$ .

2.  $A$  étant une matrice donnée, on définit la fonction  $\exp(A)$  par la série :

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

qui possède un rayon de convergence infini. On sait en outre que la solution du système différentiel (18) s'écrit sous la forme :

$$[F(y)] = \exp(My) [F(0)]$$

qui généralise la solution bien connue quand  $M$  se réduit à un élément. On désigne par  $i\rho_m$  les valeurs propres de la matrice  $M$  et par  $D$  la matrice diagonale d'éléments  $i\rho_m\delta_{nm}$ . Soit  $Q$  la matrice obtenue en mettant en colonne les vecteurs propres de  $M$ , telle que l'on ait :

$$M = QDQ^{-1}$$

Calculer  $M^2$ , puis  $M^k$ . En déduire que si l'on désigne par  $\phi(y)$  une matrice diagonale d'éléments  $\exp(i\rho_my)\delta_{n,m}$ , on a :

$$[F(y)] = Q\phi(y)Q^{-1}[F(0)] \quad (21)$$

Nous trouvons :

$$\begin{aligned} M^2 &= QDQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^2Q^{-1} \\ M^k &= QD^kQ^{-1} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \exp(M) &= I + M + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^k}{k!} + \dots = QQ^{-1} + M + \frac{M^2}{2!} + \dots + \frac{M^k}{k!} + \dots \\ &= Q \left( I + D + \frac{D^2}{2!} + \dots + \frac{D^k}{k!} + \dots \right) Q^{-1} = Q \exp(D) Q^{-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\exp(My) = Q \exp(Dy) Q^{-1}$$

or

$$D_{n,m} = i\rho_m\delta_{n,m} \Rightarrow D_{n,m}y = i\rho_my\delta_{n,m}$$

$$\begin{aligned} \exp(Dy) &= I + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & iy\rho_n\delta_{n,m} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & iy\rho_n\delta_{n,m} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & iy\rho_n\delta_{n,m} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}^k + \dots \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} [\exp(Dy)]_{n,m} &= [\exp(D_{n,m}y)] = \exp(i\rho_my\delta_{n,m}) = \phi_{n,m}(y), \\ \exp(My) &= Q\phi_{n,m}(y)Q^{-1} \end{aligned}$$

et

$$[F(y)] = Q\phi(y)Q^{-1}[F(0)] \quad (22)$$

3. On admet que l'équation aux valeurs propres :  $\det(M - i\rho I) = 0$  ne dépend que de  $\rho^2$ . En déduire que  $M$  possède  $4N + 2$  valeurs propres qui sont 2 à 2 opposées, et que par conséquent  $\mathcal{H}_n(y)$  s'écrit sous la forme :

$$H_n(y) = \sum_{m=-N}^N (H_{n,m} t_m^+ e^{i\rho_m y} + G_{n,m} t_m^- e^{-i\rho_m y})$$

où les  $t_m^+$ ,  $t_m^-$ , dépendent des coefficients des ordres transmis, et les  $H_{n,m}$ ,  $G_{n,m}$  sont des constantes que l'on n'essaiera pas de déterminer.

En dehors de la zone modulée  $y \notin [0, h]$

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{k_1^2} \frac{dH_n}{dy}.$$

On tronque la sommation à  $n \in [-N, N]$ , et les éléments de  $[F(0)]$ ,  $[F(h)]$  peuvent s'écrire en fonction des coefficients de transmission ( $T_n$ ) et de réflexion ( $B_n$ ) :

$$\begin{aligned} [F(h)]_n &= \begin{bmatrix} H_n(h) \\ \tilde{E}_n(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 e^{-i\beta_0 h} \delta_{n,0} + B_n e^{i\beta_n h} \\ \frac{-i\beta_0}{k_1^2} A_0 e^{-i\beta_0 h} \delta_{n,0} + \frac{i\beta_n}{k_1^2} B_n e^{i\beta_n h} \end{bmatrix} \\ [F(0)]_n &= \begin{bmatrix} H_n(0) \\ \tilde{E}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n \\ \frac{-i\beta_n}{k_1^2} T_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice  $Q$  peut s'écrire :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{pmatrix}$$

où chaque bloc de  $Q_{i,k}$  est de dimension  $2N + 1 \times 2N + 1$ . Avec l'éq.(22), on obtient :

$$[F(y)]_n = \begin{bmatrix} H_n(y) \\ \tilde{E}_n(y) \end{bmatrix} = \sum_{m=-N}^N \begin{pmatrix} [Q_{1,1}]_{n,m} & [Q_{1,2}]_{n,m} \\ [Q_{2,1}]_{n,m} & [Q_{2,2}]_{n,m} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\rho_m y} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho_m y} \end{bmatrix} [Q^{-1} [F(0)]]_m$$

avec  $n \in [-N, N]$ , donc

$$[F(y)]_n = \begin{bmatrix} H_n(y) \\ \tilde{E}_n(y) \end{bmatrix} = \sum_m \begin{pmatrix} [Q_{1,1}]_{n,m} & [Q_{1,2}]_{n,m} \\ [Q_{2,1}]_{n,m} & [Q_{2,2}]_{n,m} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\rho_m y} t_m^+ \\ e^{-i\rho_m y} t_m^- \end{bmatrix}$$

où les  $t_m^\pm$  sont définis par

$$\begin{bmatrix} t_m^+ \\ t_m^- \end{bmatrix} = [Q^{-1} [F(0)]]_m$$

et on se rappelle que  $[F(0)]$  dépend des coefficients des ordres transmis (inconnus).

Chacun des  $2N + 1$  coefficients de  $H_n$  s'exprime donc :

$$H_n(y) = \sum_{m=-N}^N [H_{n,m} e^{i\rho_m y} t_m^+ + G_{n,m} e^{-i\rho_m y} t_m^-]$$

avec  $H_{n,m} = [Q_{1,1}]_{n,m}$  et  $G_{n,m} = [Q_{1,2}]_{n,m}$ . On obtiendrait un résultat analogue avec  $2N + 1$  équations pour les  $\tilde{E}_n$ .

Remarque : Le vecteur  $F(y)$  dépend du coefficient de l'onde incidente ( $A_0$  : connu) et des  $2N + 1$  coefficients des ordres réfléchis (inconnus). Le vecteur  $F(0)$  dépend des  $2N + 1$  coefficients des ordres transmis. Nous avons donc obtenu un système linéaire de  $2 \times (2N + 1)$  équations et  $2 \times (2N + 1)$  inconnus à résoudre.

4. *Il résulte de ce qui précède que  $\mathcal{H}(x, y) \forall y : 0 \leq y \leq h$  s'écrit :*

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{n,m=-N}^N (H_{n,m} t_m^+ e^{i\rho_m y} + G_{n,m} t_m^- e^{-i\rho_m y}) e^{i\alpha_n x} \quad (23)$$

*On appelle "mode à fuite" un terme quelconque de l'expression (23), correspondant à un couple  $(n, m)$  donné. Montrer que si  $h$  est suffisamment grand le champ à la base des sillons est conditionné par la constante  $\rho_m$  ayant la plus petite partie imaginaire. Montrer qu'il est possible de choisir la nature du métal et l'incidence afin d'avoir une valeur propre réelle particulièrement remarquable. Conclure dans ce cas sur les propriétés de filtrage de ce dispositif. Cette dernière solution persiste-t-elle si l'on remplace le réseau de fentes par une grille percée de trous rectangulaires?*

Les  $\rho_m$  ont été défini de façon analogue aux  $\beta_n$ . De ce fait, les valeurs (complexes) des  $\rho_m$  se trouvent dans le premier et le troisième quadrant du plan complexe. Si  $\rho_m = \rho'_m + i\rho''_m$ , il faut  $\rho''_m > 0$  si  $\rho'_m > 0$  et  $\rho''_m < 0$  si  $\rho'_m < 0$ . De telles ondes s'atténuent au cours de leur propagation :

$$\begin{aligned} e^{i\rho_m y} &= e^{i\rho'_m y} e^{-\rho''_m y} \quad \text{grandit si } y \text{ diminue.} \\ e^{-i\rho_m y} &= e^{-i\rho'_m y} e^{\rho''_m y} \quad \text{diminue si } y \text{ diminue} \end{aligned}$$

Quand les ondes descendantes s'enfoncent dans le métal la physique c'est l'onde avec la valeur propre  $\rho_m$  ayant la plus petite partie imaginaire qui va dominer au fur et à mesure que le réseau est profond.

**Pour des réseaux très profonds, les exponentiels vont poser des problèmes, et il faudrait couper le réseau en tranches horizontales, et appliquer une technique de matrice  $S$ .**

Si le métal est infiniment conducteur et l'angle d'incidence  $\theta = 0$ , l'onde est TEM, et il existe toujours une solution de mode guidée (les Conditions aux Limites sont toujours satisfaites) à travers les fentes avec  $\rho_m = k_1$  (réel) donc sans atténuation. Le réseau sera donc amène à une transmission extraordinaire (beaucoup plus que par les formules classiques) dans ces conditions.

Dans le cas des trous, on n'a pas de mode TEM, et il n'y aura pas de transmission extraordinaire.

5. *Pourriez-vous trouver une justification à l'hypothèse de II.3 ?*

La matrice  $M^2$  a les mêmes vecteurs propres que  $M$ . On appelle  $Q_m$  la colonne  $m$  de la matrice  $Q$ . On se rappelle que  $Q$  est la matrice composée des vecteurs propres de  $M$ . Donc  $M^2$  a les mêmes vecteurs propres que  $M$  ( $MQ_m = \rho_m Q_m$  et  $M^2 Q_m = \rho_m M Q_m = \rho_m^2 Q_m$ ), et les valeurs propres de  $M^2$  sont les carrés de celles de  $M$ .

Or

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} M_{1,2} M_{2,1} & 0 \\ 0 & M_{2,1} M_{1,2} \end{pmatrix}$$

avec  $M_{1,2} M_{2,1} \neq M_{2,1} M_{1,2}$ . Considérons une des valeurs propres de  $M_{1,2} M_{2,1}$

$$M_{1,2} M_{2,1} = \mu V_1.$$

Posons

$$\begin{aligned} V_2 &= M_{21}V_1 \Rightarrow V_1 = M_{21}^{-1}V_2 \\ &\Rightarrow M_{1,2}V_2 = \mu V_1 = \mu M_{21}^{-1}V_2 \\ &\Rightarrow M_{2,1}M_{1,2}V_2 = \mu V_2 \end{aligned}$$

Ce résultat dit que  $M_{1,2}M_{21}$  et  $M_{2,1}M_{1,2}$  ont les mêmes valeurs propres.

Donc  $M^2$  possède  $4N + 2$  valeurs propres 2 à 2 dégénérées et égales à  $\rho_m^2$ .

Les matrices  $M$  n'a aucune raison d'avoir des valeurs dégénérées, et on donc peut s'attendre à trouver des valeurs propres de  $M$  de  $\pm\rho_m$  correspondant à chaque  $\rho_m^2$ .

On peut prouver cette supposition. Avec ce que précède on peut définir  $V_{1,m}$  et des  $V_{2,m}$  tels que

$$\begin{aligned} M_{1,2}V_{2,m} &= \rho_m^2 V_{1,m} \\ V_{2,m} &= M_{21}V_{1,m} \end{aligned}$$

correspondant à chaque valeur propre  $\rho_m^2$  de  $M^2$ . On peut maintenant écrire les vecteurs propres de  $M$  en termes de  $V_{1,m}$  et de  $V_{2,m}$

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} V_{1,m} \\ \frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,m} \\ \frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_m} M_{1,2} V_2 \\ M_{2,1} V_{1,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m V_1 \\ V_{2,m} \end{pmatrix} = \rho_m \begin{pmatrix} V_1 \\ \frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} V_{1,m} \\ -\frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & M_{1,2} \\ M_{2,1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,m} \\ -\frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_m} M_{1,2} V_2 \\ M_{2,1} V_{1,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_m V_1 \\ V_{2,m} \end{pmatrix} = -\rho_m \begin{pmatrix} V_1 \\ -\frac{1}{\rho_m} V_{2,m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : On se rappelle que la matrice  $Q$  est composé des vecteurs propres de  $M$  arrangés en colonne. Ces constructions des vecteurs propres de  $\rho_m$  montre que les blocs de la matrice  $Q$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

ont la propriété  $Q_{12} = Q_{11}$  et  $Q_{22} = -Q_{2,1}$ . Nous avons donc

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{1,1} \\ -Q_{2,2} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

Il est intéressant de remarquer que ce résultat nous dit que le développement de  $\mathcal{H}(x, y)$  peut s'écrire :

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{n,m=-N}^N H_{n,m} (t_m^+ e^{i\rho_m y} + t_m^- e^{-i\rho_m y}) e^{i\alpha_n x}$$

avec  $H_{n,m} = [Q_{11}]_{n,m}$ .