

Travaux Dirigés N° 3 Maîtrise de Physique

Sur des solutions exactes des réseaux en domaine résonant

I L'espace étant rapporté à un trièdre direct $Oxyz$, on considère dans le plan xOy , une courbe $f(x)$, périodique en x de période d et de maximum h , dont quelques périodes sont représentées sur la figure. Cette courbe est la directrice d'une surface cylindrique de génératrices parallèles à \vec{Oz} qui représente la surface d'un réseau échelette infiniment conducteur baignant dans l'air dont la permittivité électrique est identique à celle du vide. Une onde plane monochromatique sinusoïdale de pulsation ω , d'amplitude unité, de longueur d'onde λ , de vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ situé dans le plan xOy , tombe sur le réseau sous l'incidence θ . Elle est polarisée de telle sorte que vecteur excitation magnétique soit parallèle à l'axe Oz et l'on adopte une dépendance en temps en $\exp(-i\omega t)$. On choisit comme inconnue du problème la composante sur \vec{Oz} du vecteur complexe associé à l'excitation du champ magnétique diffracté, que l'on note par $\mathcal{H}_z^d(x, y)$.

1. *Ecrire les champs incidents $\vec{\mathcal{H}}^i(x, y)$ et $\vec{\mathcal{E}}^i(x, y)$ en fonction de θ , de l'amplitude du vecteur d'onde $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ et de l'impédance du vide $z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$*

Le fait que le champ incident est une onde plane (choisi d'être d'amplitude unité) nous dit que le champ incident est de la forme :

$$\vec{\mathcal{H}}^i = \mathcal{H}_z^i \hat{\mathbf{z}} = \underline{\underline{1}} \hat{\mathbf{z}} \exp \left[i \left(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \right) \right] = \underline{\underline{1}} \exp [ik_0 (x \sin \theta - y \cos \theta)]$$

i.e.

$$\vec{\mathbf{k}} = \begin{vmatrix} k_0 \sin \theta \\ -k_0 \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'équation de "Maxwell", $\text{rot } \vec{\mathcal{H}}^i = -i\omega\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^i$ nous donne que le champ incident électrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^i &= \frac{i}{\omega\epsilon_0} \vec{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \exp \left[i \left(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \right) \right] = \frac{ik_0}{\omega\epsilon_0} \left(\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{z}} \right) \exp \left[i \left(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} \right) \right] \\ &= i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (-\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \exp [ik_0 (x \sin \theta - y \cos \theta)] \\ &= iz_0 (-\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \exp [ik_0 (x \sin \theta - y \cos \theta)] \end{aligned} \quad (1)$$

2. *Etablir le problème aux limites dont \mathcal{H}_z^d est solution.*

Les équations de Maxwell au dessus du réseau sont vérifiées par le champ total, $\vec{\mathcal{H}}$, et par le champ incident \mathcal{H}_z^i , ce qui implique qu'elles sont vérifiées par le champ diffracté, $\vec{\mathcal{H}}^d = \vec{\mathcal{H}} - \vec{\mathcal{H}}_z^i$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathcal{H}}^d &= -i\omega\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^d \\ \vec{\mathcal{H}}^d &= \mathcal{H}_z^d \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_z^d = -i\omega\epsilon_0 \mathcal{E}_x^d \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_z^d = i\omega\epsilon_0 \mathcal{E}_y^d \quad (3)$$

alors que

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}}^d = i\omega\mu_0\vec{\mathcal{H}}^d \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{E}_y^d - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{E}_x^d = i\omega\mu_0\mathcal{H}_z^d \quad (4)$$

Les équations (2) et (3) reportées dans l'équation (4)

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{H}_z^d + k_0^2\mathcal{H}_z^d = 0 \text{ si } y > f(x)|_{\max} \quad (5)$$

avec $k_0^2 \equiv \omega^2\epsilon_0\mu_0 = \omega^2/c^2$.

Les conditions aux limites sont habituellement posés en termes des champs totales, $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^d + \vec{\mathcal{E}}^i$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}^d + \vec{\mathcal{H}}^i$, etc. Ecrivant $\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{H}}_1, \vec{\mathcal{D}}_1, \vec{\mathcal{B}}_1$ les champs du superstrat et $\vec{\mathcal{E}}_2, \vec{\mathcal{H}}_2, \vec{\mathcal{D}}_2, \vec{\mathcal{B}}_2$ les indices du superstrat, et finalement $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{21}$, le vecteur unitaire normale à l'interface dirigé du milieu 2 (substrat) vers milieu 1 (superstrat). Ils sont

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \wedge (\vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2) = \vec{\mathbf{0}} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \wedge (\vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_2) = \vec{\mathbf{j}}_s \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_1 - \vec{\mathcal{B}}_2) = 0 \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \cdot (\vec{\mathcal{D}}_1 - \vec{\mathcal{D}}_2) = \rho_s \quad (9)$$

Les équations (7) et (9) ne sont pas d'utilité immédiate puisque $\vec{\mathbf{j}}_s$ et ρ_s sont inconnus pour l'instant (on pourrait les déterminés une fois que le problème est résolu). Dans ce problème, le champ $\vec{\mathcal{H}}$ est entièrement tangentiel à la surface, $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_z\hat{\mathbf{z}}$, ce qui implique que $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}}$ est entièrement tangentiel aussi. Par conséquence, la condition (8) est toujours satisfaite. Il n'y a que l'équation (6) susceptible d'être utile dans ce problème. A l'intérieur d'un conducteur parfait, $\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$. Le composant tangentiel du champ dans le superstrat, $\vec{\mathcal{E}}_1$, désormais dénoté simplement $\vec{\mathcal{E}}$ est donc nul à la surface du réseau :

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ sur la surface du réseau} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n_x\mathcal{E}_y - n_y\mathcal{E}_x)\hat{\mathbf{z}} &= 0\hat{\mathbf{z}} \\ \Rightarrow (n_x\mathcal{E}_y - n_y\mathcal{E}_x) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Les équations (2) et (3) reportées dans l'équation (11)

$$\begin{aligned} \Rightarrow n_x \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_z + n_y \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_z &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}_z}{dn} &= 0 \quad \text{en } y = f(x) \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}_z^d}{dn} &= \frac{d\mathcal{H}_z^i}{dn} \quad \text{en } y = f(x) \end{aligned} \quad (12)$$

ce qui est équivalent à la condition de (10). Avec $\mathcal{H}_z^i = \exp[ik_0(x \sin \theta - y \cos \theta)]$, les équations (5) + (12) + C.O.S. pour $y \rightarrow \infty$ constitue un problème aux limites.

Remarque : On trouvera néanmoins en dessous qu'on peut faire appel directement à l'éq.(10) sur $\vec{\mathcal{E}}$ aussi bien qu'à la condition équivalente sur \mathcal{H}_z , (12).

3. *Montrer que la fonction $\mathcal{H}_z^d(x, y)$ est pseudo-périodique en x .*

Il doit exister un opérateur linéaire (disons l'opérateur \mathcal{R}) qui dépend des coordonnées x et y (au module de d près : voir ci-dessous) et qui relie le champ incident au champ total $\mathcal{H}_z(x, y)$:

$$\mathcal{H}_z(x, y) = \mathcal{R}\mathcal{H}_z^i(x, y) \quad (13)$$

La linéarité de cette opérateur implique que pour $\forall C$ où C est une constante :

$$\forall C \quad C\mathcal{H}_z(x, y) = \mathcal{R}C\mathcal{H}_z^i(x, y)$$

Faisons subir au trièdre de référence une translation d'amplitude $-d$ le long de Ox . La structure infini idéale étant invariante dans cette translation, **l'opérateur \mathcal{R} est inchangé** tandis que $\mathcal{H}_z^i(x, y)$ et $\mathcal{H}_z(x, y)$ sont respectivement remplacés par $\mathcal{H}_z^i(x + d, y)$ et $\mathcal{H}_z(x + d, y)$. On peut donc écrire que :

$$\mathcal{H}_z(x + d, y) = \mathcal{R}\mathcal{H}_z^i(x + d, y)$$

ou encore

$$\mathcal{H}_z(x + d, y) = \mathcal{R}e^{ik_0 \sin \theta d} \mathcal{H}_z^i(x, y) = e^{ik_0 \sin \theta d} \mathcal{R}\mathcal{H}_z^i(x, y)$$

ce qui après l'éq.(13) entraîne

$$\mathcal{H}_z(x + d, y) = e^{ik_0 \sin \theta d} \mathcal{H}_z(x, y) = e^{i\gamma d} \mathcal{H}_z(x, y)$$

qui est l'expression de pseudo-périodicité du champ total. Puisque le champ incident satisfait la même expression, le champ diffracté $\mathcal{H}_z^d(x, y) \equiv \mathcal{H}_z(x, y) - \mathcal{H}_z^i(x, y)$ est également pseudo-périodique.

4. *En déduire l'expression du champ diffracté $\mathcal{H}_z^d(x, y)$ valable pour $y > h$, où h est la hauteur des sillons du réseau (développement de Rayleigh). Discuter la nature des différents termes et établir la "formule des réseaux" qui donne les directions des ordres diffractés.*

$\mathcal{H}_z^d(x, y) e^{-i\gamma x}$ est périodique en x .

$$\mathcal{H}_z^d(x + d, y) e^{-i\gamma(x+d)} = \mathcal{H}_z^d(x, y) e^{i\gamma d} e^{-i\gamma(x+d)} = \mathcal{H}_z^d(x, y) e^{-i\gamma x}$$

\Rightarrow On peut développer $\mathcal{H}_z^d(x, y) e^{-i\gamma x}$ sur une base de Fourier:

$$\mathcal{H}_z^d(x, y) e^{-i\gamma x} = \sum_n H_n^d(y) e^{in\frac{2\pi}{d}x}$$

Posons $K = \frac{2\pi}{d}$:

$$\mathcal{H}_z^d(x, y) = \sum_n H_n^d(y) e^{in\gamma_n x} \quad \text{avec } \gamma_n = \gamma + nK = k_0 \sin \theta + nK$$

On reporte ce développement dans l'éq.(5) et après avoir multiplié les deux cotés par $e^{i\gamma x}$ on obtient

$$\sum_n \left[\frac{d^2 H_n^d}{dy^2} + (k_0^2 - \gamma_n^2) H_n^d(y) \right] e^{inKx} = 0$$

Si $y > h$, cette équation est valable $\forall x$: \Rightarrow développement de Fourier de la fonction nulle.

$$\Rightarrow \forall n : \frac{d^2 H_n^d}{dy^2} + \beta_n^2 H_n^d(y) = 0 \quad \beta_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2} & \text{si } k_0^2 - \gamma_n^2 > 0 \\ i\sqrt{\gamma_n^2 - k_0^2} & \text{si } k_0^2 - \gamma_n^2 < 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle de H_n^d dans un milieu homogène, $y > h$, est donc de la forme :

$$H_n^d(y) = A_n e^{-i\beta_n y} + B_n e^{i\beta_n y} \quad \text{si } y > h$$

Soit u l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $k_0^2 - \gamma_n^2 > 0$. Quand $y \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} n \notin u, & e^{-i\beta_n y} \rightarrow \infty \\ n \in u, & n = 0 \quad \text{entrante} \end{cases}$$

Condition d'onde sortante

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A_n = 0 \quad \forall n \\ \Rightarrow \mathcal{H}_z^d(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\gamma_n x + \beta_n y)} \quad (\text{Rayleigh}) \end{aligned} \quad (14)$$

Si $n \in u$: il s'agit d'ondes planes progressives avec des vecteurs d'ondes $\vec{\mathbf{k}}_n$

$$\vec{\mathbf{k}}_n = \begin{cases} \gamma_n = \gamma + n \frac{2\pi}{d} = k_0 \sin \theta + n \frac{2\pi}{d} \\ \beta_n = \sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2} \\ 0 \end{cases}$$

avec $|\vec{\mathbf{k}}_n| = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

Si $n \notin u$: il s'agit d'ondes évanescentes ($\rightarrow 0$ si $y \rightarrow \infty$). N.B. Les ondes évanescentes ne doivent pas être oubliées dans une étude complète des champs, mêmes si on les détecte pas en champ lointain.

Directions de diffraction : formule des réseaux

L'angle de diffraction θ_n d'un ordre $n \in u$ est définie par

$$\sin \theta_n = \frac{\gamma_n}{k_0} = \sin \theta + n \frac{K}{k_0} = \sin \theta + n \frac{\lambda_0}{d} \quad (15)$$

5. *On se place dans le cas particulier où l'angle d'incidence θ est égal à l'angle de blaze α du réseau échelette défini sur la figure et où $\lambda = 2d \sin \alpha$. On superpose au champ incident un champ de vecteur d'onde $-\vec{\mathbf{k}}$, d'amplitude unité, en accord de phase avec le champ incident. Montrer que la superposition de ces deux champs vérifie le problème aux limites établi au 2.*

Quand l'angle d'incidence θ est égale à l'angle de blaze, le vecteur d'onde est anti-parallèle à la normale de la grande facette, $\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}}$. On peut donc écrire

$$\mathcal{H}_z^i(x, y) = \underline{\underline{1}} e^{i(\gamma x - \beta y)} = \underline{\underline{1}} \exp[-ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})]$$

Considérons comme dit dans l'énoncé, un $\mathcal{H}_z^d(x, y)$ qui consiste d'une onde plane de vecteur d'onde $-\vec{\mathbf{k}}$ en accord de phase avec l'onde incidente,

$$\mathcal{H}_z^d(x, y) = \underline{\underline{1}} e^{-i(\gamma x - \beta y)} = \underline{\underline{1}} \exp[ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})]$$

Un champ total $\mathcal{H}_z(x, y)$ qui composé d'une superposition de ces deux champs, $\mathcal{H}_z(x, y) = \mathcal{H}_z^i(x, y) + \mathcal{H}_z^d(x, y)$ s'écrit donc :

$$\mathcal{H}_z(x, y) = \underline{\underline{1}} e^{i(\gamma x - \beta y)} + \underline{\underline{1}} e^{-i(\gamma x - \beta y)} = 2 \cos(\gamma x - \beta y) = 2 \cos(k_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}}))$$

La dérivée normale de \mathcal{H}_z s'annule si :

$$\frac{d\mathcal{H}_z}{dn_{\text{g.f.}}} = -2k_0 \sin(k_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})) = -2k_0 \sin(\gamma x - \beta y) = 0$$

On a donc : $\frac{d\mathcal{H}_z}{dn} = 0$ si $\gamma x - \beta y = 0 + p\pi$ ou p est un entier (positif ou négatif) \Rightarrow si $y = \frac{\gamma}{\beta}x + p\frac{\pi}{\beta}$.

Or $\gamma = k_0 \sin \theta$ et $\beta = k_0 \cos \theta$ ce qui implique que $\frac{d\mathcal{H}_z}{dn} = 0$ si y est de la forme

$$y = x \tan \theta - p \frac{\pi}{\beta} \quad (16)$$

Ce champ s'annule :

- pour $p = 0$: sur la première grande facette du profil
- pour $p \neq 0$: si $y(x)$ est de la forme

$$y = x \tan \theta - p \frac{\pi}{k \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left[x - p \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right]$$

$$\text{or } \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = d$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} [x - pd]$$

qui n'est rien d'autre que l'équation des grandes facettes.

Donc la condition aux limites est satisfait sur toutes les grandes facettes.

La normale des petites facettes, $\hat{\mathbf{n}}_{\text{p.f}}$ est perpendiculaire à $\hat{\mathbf{z}}$ et à la normale des grandes facettes, (i.e. il est donc perpendiculaire à $\vec{\mathbf{k}}$ et à $\hat{\mathbf{z}}$). La dérivé normale des petites facettes est donc dans la direction du front d'onde. Dans le front d'onde, \mathcal{H}_z , est constant et donc

$$\frac{d\mathcal{H}_z}{dn_{\text{p.f.}}} = 0$$

Comme la superposition vérifie Helmholtz et les C.O.S, elle est la solution.

Remarque : Comme la condition $\frac{d\mathcal{H}_z}{dn} = 0$ à la surface est une conséquence de $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathbf{0}}$ à la surface, on aurait pu aussi bien raisonner en termes de \mathcal{E} . Procédant ainsi, on voit d'après ce que précède et l'éq.(1) que le champ incident s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}}^i = iz_0 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \exp [i \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}}] = -iz_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \exp [-ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})]$$

alors que le champ diffracté proposé dans l'énoncé s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}}^d = iz_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \exp [ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})]$$

On voit donc qu'un champ total $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^d + \vec{\mathcal{E}}^i$ ainsi formé est entièrement tangentielle aux grandes facettes. La C.O.L. sur les grandes facettes est donc

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = 0 &= iz_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \{ \exp [ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})] - \exp [-ik_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})] \} \\ &= -z_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \sin (k_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \cdot \vec{\mathbf{r}})) \\ &= -z_0 (\hat{\mathbf{n}}_{\text{g.f.}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) \sin (\gamma x - \beta y). \end{aligned}$$

On obtient donc la même condition que $\sin(\gamma x - \beta y)$ doit s'annuler sur les grandes facettes qu'on a obtenu avec la condition $\frac{d\mathcal{H}_z}{dn} = 0$. Les C.O.L. sur les petites facettes sont satisfaites puisque $\hat{\mathbf{n}}_{p.f.}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ sont toutes les deux perpendiculaire à la fois à $\hat{\mathbf{n}}_{g.f.}$ et à $\hat{\mathbf{z}}$. Par conséquent le champ total $\vec{\mathcal{E}}$ est entièrement normale aux petites facettes i.e. le composant tangentiel de $\vec{\mathcal{E}}$ est nul comme réquis.

Donc la C.O.L. $\vec{\mathcal{E}} = 0$ est satisfaite sur toute la surface.

En déduire la valeur des coefficients de Rayleigh dans ce cas particulier.

On a $\frac{\lambda}{d} = 2 \sin \alpha = 2 \sin \theta$. Par conséquent si $n = -1$ l'éq.(15) $\Rightarrow \sin \theta_{-1} = \sin \theta - \frac{\lambda a}{d} = \sin \theta - \frac{1}{2} 2d \sin \theta = -\sin \theta$. Ce qui implique que l'ordre -1 repart dans la direction incidente, donc avec le vecteur d'onde $-\vec{\mathbf{k}}$.

Par conséquent dans ce cas particulier, il est possible de déterminer analytiquement les B_n . Ils sont tous nuls, sauf $B_{-1} = -1$.

II On suppose dans tout ce problème, que $\vec{\mathcal{H}}$ est polarisé parallèlement à l'axe \vec{Oz} , de vecteur unitaire $\hat{\mathbf{e}}_z$ et l'on pose :

$$\vec{\mathcal{H}} = u \hat{\mathbf{e}}_z$$

1. Un dioptre plan d'équation $y = a$ sépare l'espace en 2 régions. La région 1 ($y > a$) est vide (ϵ_0, μ_0). La région 2 ($y < a$) est remplie d'un milieu d'indice n et de perméabilité μ_0 .

On rappelle que sous l'action d'une onde plane incidente $u^i = \exp(-ik_0 y)$, il s'établit un champ total :

$$u(y) = \begin{cases} \exp(-ik_0 y) + r(a) \exp(ik_0 y) & \text{si } y > a \\ t(a) \exp(-ink_0 y) & \text{si } y < a \end{cases}$$

- a) Exprimer $r(a)$ en fonction de n et de $\phi(a) = \exp(-2ik_0 a)$

On remarque qu'il s'agit d'une onde incidente normale à l'interface.

La condition aux limites $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{H}}_{y>a} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{H}}_{y<a}$ en $y = a$ implique que $u(y)$ est continue en $y = a$:

$$\exp(-ik_0 a) + r(a) \exp(ik_0 a) = t(a) \exp(-ink_0 a) \quad (17)$$

Afin d'évaluer l'autre condition aux limites $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}}_{y>a} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}}_{y<a}$, il faut d'abord déterminer le champ $\vec{\mathcal{E}}$ à partir de l'équation :

$$-i\omega \epsilon_r \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} = \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \text{rot } (\mathcal{H}_z \hat{\mathbf{z}})$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{i}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_z = \frac{i}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} \frac{d}{dy} u(y) \\ \mathcal{E}_y &= -\frac{i}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_z = 0 \end{aligned}$$

où il est très important de se rappeler qu'on a $\epsilon_r = 1$ dans le superstrat et que $\epsilon_r = n_r^2$, (n_r étant l'indice du diélectrique) dans le substrat. Des équation précédentes, on

trouve qu'il n'y a qu'un seule composant non-nulle du champ électrique $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x^d \hat{\mathbf{x}}$ et que :

$$\mathcal{E}_x = \begin{cases} \frac{1}{\omega \epsilon_0} k_0 \exp(-ik_0 y) - \frac{1}{\omega \epsilon_0} r(a) k_0 \exp(ik_0 y) & \text{si } y > a \\ \frac{z_0}{\omega n_r^2 \epsilon_0} k_0 t(a) \exp(-in_r k_0 y) & \text{si } y < a \end{cases}$$

Avec $k_0 \equiv \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega = \omega/c$ on obtient

$$\mathcal{E}_x = \begin{cases} z_0 \exp(-ik_0 y) - z_0 r(a) \exp(ik_0 y) & \text{si } y > a \\ \frac{z_0}{n_r} t(a) \exp(-in_r k_0 y) & \text{si } y < a \end{cases}$$

où z_0 est l'impédance du vide (souvent dénoté η_0 dans la littérature)

$$z_0 \equiv \eta_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

La condition aux limites $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}}_{y>a} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}}_{y<a}$ impose donc :

$$z_0 \exp(-ik_0 a) - z_0 r(a) \exp(ik_0 a) = \frac{z_0}{n_r} t(a) \exp(-in_r k_0 a) \quad (18)$$

Multipliant l'éq.(17) par $-\frac{z_0}{n}$

$$-\frac{z_0}{n_r} \exp(-ik_0 a) - \frac{z_0}{n_r} r(a) \exp(ik_0 a) = -\frac{z_0}{n_r} t(a) \exp(-in_r k_0 a)$$

et en faisant l'addition avec les deux cotés de l'éq.(18) nous obtenons :

$$z_0 \left(1 - \frac{1}{n_r}\right) \exp(-ik_0 a) - z_0 r(a) \left(1 + \frac{1}{n_r}\right) \exp(ik_0 a) = 0$$

$$\Rightarrow r(a) \exp(ik_0 a) = \frac{n_r - 1}{n_r + 1} \exp(-ik_0 a)$$

$$\Rightarrow r(a) = \frac{1 - n_r}{1 + n_r} \exp(-2ik_0 a) \equiv \frac{1 - n_r}{1 + n_r} \varphi(a)$$

avec

$$\varphi(a) \equiv \exp(-2ik_0 a)$$

b) Exprimer $t(a)$ en fonction de $\psi(a) \equiv \exp[ik_0 a (n_r - 1)]$

Multipliant l'éq.(17) par z_0

$$z_0 \exp(-ik_0 a) + z_0 r(a) \exp(ik_0 a) = z_0 t(a) \exp(-in_r k_0 a)$$

et en faisant l'addition avec les deux cotés de l'éq.(18) nous obtenons

$$2z_0 \exp(-ik_0 a) = z_0 t(a) \left(1 + \frac{1}{n_r}\right) \exp(-in_r k_0 a)$$

$$\Rightarrow t(a) = \frac{2n_r}{n_r + 1} \exp[ik_0 a (n_r - 1)] \equiv \frac{2n_r}{n_r + 1} \psi(a)$$

avec

$$\psi(a) \equiv \exp[ik_0 a (n_r - 1)]$$

c) La valeur de l'indice étant fixée, est-il possible de choisir a pour que l'on ait à la fois

$$r(a) = r(0) \quad \text{et} \quad t(a) = t(0) ?$$

La condition $r(a) = r(0)$ impose que $\varphi(a) = \varphi(0)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp(-2ik_0a) &\equiv \cos(2k_0a) - i \sin(-2k_0a) = 1 \\ \Rightarrow 2k_0a &= p\pi \end{aligned}$$

où p est un entier positif. En termes de la longueur d'onde dans le vide, λ_0 cette condition s'exprime :

$$\frac{4\pi}{\lambda_0}a = 2p\pi \Rightarrow a = p\frac{\lambda_0}{2} \quad (19)$$

La condition $t(a) = t(0)$ impose que $\psi(a) = \psi(0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp[ik_0a(n_r - 1)] &\equiv \cos(k_0a(n_r - 1)) + i \sin(k_0a(n_r - 1)) = 1 \\ \Rightarrow k_0a(n_r - 1) &= q2\pi \end{aligned}$$

où q est un entier positif. En termes de la longueur d'onde dans le vide, λ_0 cette condition s'exprime :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}a(n_r - 1) = q2\pi \Rightarrow a = q\frac{\lambda_0}{n_r - 1} \quad (20)$$

Il faut que la longueur a soit le même dans l'éq. (19) et (20) i.e.

$$\begin{aligned} q\frac{\lambda_0}{n_r - 1} &= p\frac{\lambda_0}{2} \\ \Rightarrow \frac{(n_r - 1)}{2} &= \frac{q}{p} \end{aligned} \quad (21)$$

qui peut s'écrire aussi comme

$$n_r = \frac{p + 2q}{p}$$

d) *Montrer que si $n = 1,5$, $a = 2\lambda_0$ convient.*

Si $n_r = 1,5 = \frac{3}{2}$ on a

$$\frac{(n_r - 1)}{2} = \frac{1}{4} = \frac{q}{p}$$

ce qui est satisfait si $q = 1$ et $p = 4$. On obtient alors

$$\begin{aligned} a &= p\frac{\lambda_0}{2} \\ \Rightarrow a &= 2\lambda_0 \end{aligned}$$

2. Le réseau "échelette" de période d , dont le profil est représenté sur la figure est éclairé par une onde plane perpendiculairement à la grande facette OS . La région en pointillé est remplie d'un diélectrique d'indice n_r et de perméabilité μ_0 . Les petite facettes (telles que SD) sont recouvertes d'une couche métallique infiniment mince et infiniment conductrice (représentée en trait gras). Dans le triangle OSD , l'angle au sommet S est droit et l'angle aigu DOS est désigné par α .

- a) *Rappeler l'expression du champ incident u^i dans les 2 systèmes d'axes (Ox, Oy) et (OX, OY) .*

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}^i(x, y) &= \underline{\underline{1}} e^{ik_0(x \sin \alpha - y \cos \alpha)} \quad \text{système } (Ox, Oy) \\ \vec{\mathcal{H}}^i(Y) &= \underline{\underline{1}} e^{-ik_0 Y} \quad \text{système } (OX, OY)\end{aligned}$$

- b) *Rappeler les conditions aux limites que doit satisfaire le champ total u sur la surface du réseau.*

Pour des diélectriques, nous n'avons ni courants de surfaces ni charges de surface. Les C.O.L. sont alors

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \wedge (\vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_2) = \vec{\mathbf{0}} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \wedge (\vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_2) = \vec{\mathbf{0}} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_1 - \vec{\mathcal{B}}_2) = 0 \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{21} \cdot (\vec{\mathcal{D}}_1 - \vec{\mathcal{D}}_2) = 0 \quad (25)$$

Comme notre habitude, il suffira dans ce problème d'assurer la continuité de $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{H}}$ et de $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{E}}$ sur la surface du diélectrique (i.e. satisfaire les équations (22) et (23)). Le fait que les champs sont des solutions des équations de Maxwell entraînera de façon automatique la satisfaction des autres C.O.L. (i.e. des équations (24) et (25)). Il y a un conducteur parfait sur les petites facettes. Donc, comme dans le problème précédent, les C.O.L. sur les petites facettes, sont $\hat{\mathbf{n}}_{\text{p.f.}} \wedge \vec{\mathcal{E}} = 0$ ou son équivalent $\frac{d\vec{\mathcal{H}}_z}{dn} = 0$.

La continuité de $\hat{\mathbf{n}} \wedge \vec{\mathcal{H}}$ entraînera la continuité de $\vec{\mathcal{H}}(Y) = \vec{\mathcal{H}}_z(Y) \hat{\mathbf{z}}$ et de $\vec{\mathcal{E}}(Y) = \vec{\mathcal{E}}(Y) \hat{\mathbf{X}}$ sur les grandes facettes.

- c) *Donner l'expression du développement de Rayleigh décrivant le champ total pour $y < 0$.*

Pour $y < 0$, le milieu est homogène. Le champ transmis, $\vec{\mathcal{H}}^t$ doit également être de la forme $\vec{\mathcal{H}}^t = u \hat{\mathbf{e}}_z$. Le champ transmis doit satisfaire lui aussi les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{\mathcal{H}}^t &= -i\omega \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^t \\ \Rightarrow \mathcal{E}_x^t &= \frac{i}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_z^t \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_y^t = -\frac{i}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_z^t\end{aligned} \quad (26)$$

On trouve aussi que :

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}}^t = i\omega \mu_0 \vec{\mathcal{H}}^t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{E}_y^t - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_x^t = i\omega \mu_0 \mathcal{H}_z^t \quad (27)$$

Insérant l'éq.(26) dans l'éq.(27), on voit que le champ \mathcal{H} doit donc satisfaire :

$$\Delta \mathcal{H}_z^t + \varepsilon_r k_0^2 \mathcal{H}_z^t = 0 \quad (28)$$

avec $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \omega^2 / c^2$.

Le champ \mathcal{H}^t est également pseudo-périodique, $\mathcal{H}^t(x+d, y) = e^{ikd \sin \theta} \mathcal{H}^t(x, y)$ ce qui signifie qu'on peut le développer en "pseudo" série de Fourier :

$$\mathcal{H}^t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n^t(y) e^{i\gamma_n x} \quad \text{avec } \gamma_n = \gamma + nK = k_0 \sin \theta + nK \quad \text{et } K = \frac{2\pi}{d}$$

L'insertion de ce développement en éq.(28) nous amène à

$$\Rightarrow \forall n : \frac{d^2 H_n^t}{dy^2} + \tilde{\beta}_n^2 H_n^t(y) = 0 \quad \tilde{\beta}_n = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - \gamma_n^2} & \text{si } \varepsilon_r k_0^2 - \gamma_n^2 > 0 \\ i\sqrt{\gamma_n^2 - \varepsilon_r k_0^2} & \text{si } \varepsilon_r k_0^2 - \gamma_n^2 < 0 \end{cases}$$

Remarque : nous avons ajouté un tilde sur β_n afin de nous rappeler que ces $\tilde{\beta}_n$ sont différents des β_n des ordres de réflexion.

La solution de l'équation différentielle en H_n^t dans un milieu homogène est donc de la forme :

$$H_n^t(y) = A_n e^{-i\tilde{\beta}_n y} + B_n e^{i\tilde{\beta}_n y} \quad \text{si } y < 0$$

Soit \tilde{u} l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $\varepsilon_r k_0^2 - \gamma_n^2 > 0$. Les ondes $B_n e^{i\tilde{\beta}_n y}$ correspondraient à des ondes qui montent du substrat $n \in \tilde{u}$ ou des ondes exponentiellement croissante quand $y \rightarrow -\infty$, $n \notin \tilde{u}$. Les deux cas sont exclus. Le développement de Rayleigh pour les ondes transmises prend donc la forme :

$$\mathcal{H}_z^t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i(\gamma_n x - \tilde{\beta}_n y)} \quad (\text{Rayleigh})$$

On peut écrire le terme $A_n e^{i(\gamma_n x - \tilde{\beta}_n y)}$ en fonction des angles $\tilde{\theta}_n$ de transmission.

$$A_n e^{i(\gamma_n x - \tilde{\beta}_n y)} \equiv A_n e^{i\tilde{k}(\sin \tilde{\theta}_n x - \cos \tilde{\theta}_n y)} \equiv A_n e^{i\sqrt{\varepsilon_r} k_0 (\sin \tilde{\theta}_n x - \cos \tilde{\theta}_n y)}$$

où $\tilde{k} \equiv \sqrt{\varepsilon_r} k_0$.

Directions de diffraction : formule des réseaux

L'angle de diffraction $\tilde{\theta}_n$ de transmission d'un ordre $n \in \tilde{u}$ est défini par

$$\sin \tilde{\theta}_n = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\varepsilon_r} k_0} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_r}} + n \frac{K}{\sqrt{\varepsilon_r} k_0} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_r}} + n \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r} d} \quad (29)$$

- d) *Quelle relation doit-il exister entre d , α et n pour que l'onde plane diffractée (en transmission) dans l'ordre +1 se propage dans le même sens que l'onde plane incidente ?*

Il faut que

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\theta}_1 &= \sin \theta \\ \Rightarrow \sin \tilde{\theta}_1 &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_r}} + \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r} d} = \sin \theta \\ \Rightarrow \sin \theta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \right) &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r} d} \end{aligned}$$

En termes de l'indice $n_r = \sqrt{\varepsilon_r}$ ceci s'écrit

$$\sin \theta = \frac{1}{(n_r - 1)} \frac{\lambda_0}{d}$$

A partir de la figure on voit que l'angle de "blaze" α est donné par $\sin \alpha = \frac{a}{d}$ où a est la longueur de la petite facette. On se rappelle qu'on s'intéresse uniquement au cas où l'angle d'incidence est égale à l'angle de blaze. A $\theta = \alpha$ alors la condition devient

$$\sin \theta = \frac{a}{d} = \frac{1}{(n_r - 1)} \frac{\lambda_0}{d} \quad (30)$$

- e) *Montrer que cette relation est automatiquement vérifiée si $n_r = \frac{3}{2}$ et si, de plus, la largeur SD de la petite facette est égale à $2\lambda_0$.*

Si $n_r = \frac{3}{2}$ nous avons

$$\frac{1}{(n_r - 1)} \frac{\lambda_0}{d} = \frac{2\lambda_0}{d}$$

Si la largeur de la petite facette est égale à $a = 2\lambda_0$, on obtient du coté gauche de l'éq.(30) :

$$\frac{a}{d} = \frac{2\lambda_0}{d}$$

est donc la relation (30) est vérifiée automatiquement.

En déduire, sans nouveaux calculs (mais par application de ce qui précède), le pourcentage d'énergie transmise par ce réseau dans l'ordre +1 par rapport à l'énergie incidente (efficacité du réseau).

Après la première partie 1., on voit que les C.O.L. sont satisfaites sur les grandes facettes diélectriques si le champ total est s'exprime

– dans la région 1 :

$$\vec{\mathcal{H}}(Y) = \hat{\mathbf{z}} [e^{-ik_0 Y} + r(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)]$$

$$\vec{\mathcal{E}}(Y) = iz_0 (\hat{\mathbf{Y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) [e^{-ik_0 Y} + r(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)] = -iz_0 \hat{\mathbf{X}} [e^{-ik_0 Y} + r(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)]$$

avec un coefficient de réflexion de

$$r(2\lambda_0) = \frac{1 - n_r}{1 + n_r} \varphi(2\lambda_0) = \frac{1 - n_r}{1 + n_r} = \frac{1}{5}$$

où nous avons utilisé le fait que $n_r = \frac{3}{2}$ et que

$$\varphi(a = 2\lambda_0) = \exp(-2ik_0 a) = \exp\left(-i\frac{8\pi}{\lambda_0} \lambda_0\right) = \exp(-i8\pi) = 1$$

– dans la région 2 :

$$\vec{\mathcal{H}}(Y) = [t(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(Y) = iz_0 (\hat{\mathbf{Y}} \wedge \hat{\mathbf{z}}) [t(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)] = -iz_0 \hat{\mathbf{X}} [t(2\lambda_0) \exp(ik_0 Y)]$$

avec un coefficient de transmission de

$$\Rightarrow t(2\lambda_0) = \frac{2n_r}{n_r + 1} \psi(2\lambda_0) = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$\psi(2\lambda_0) \equiv \exp[ik_0 a (n_r - 1)] = \exp[2\pi i] = 1$$

où nous avons utilisé le fait que $n_r = \frac{3}{2}$.

Les C.O.L. sont satisfaites sur les petites facettes (métal parfaitement conducteur) parce que le champ $\vec{\mathcal{E}}(Y)$ y est entièrement normale à la surface, $\hat{\mathbf{n}}_{\text{p.f.}} = \hat{\mathbf{X}}$ (ou en faisant appel à la condition équivalente qu' à la surface, $\frac{d\vec{\mathcal{H}}}{dn} = 0$).

Dans ces conditions ($n_r = \frac{3}{2}$, $a = 2\lambda_0$, $\theta = \alpha$) notre champ total est la solution du problème.

Du fait qu'on trouve que le champ total est décrit par une seule onde plane dans la région 2 veut dire que toute la puissance transmise se trouve dans un seule ordre de transmission.

De ce qui précède et l'exercice précédent, (e), on peut conclure que c'est l'ordre +1 en transmission qui contient toute la puissance transmise et que $A_1 = \frac{6}{5}$.

Dans la réflexion, toute la puissance réfléchi est dans l'ordre zéro (réflexion spéculaire) avec $B_0 = \frac{1}{5}$.

On se rappelle que la formule d'efficacité de réflexion s'écrit

$$e_n^r = \frac{B_n B_n \cos \theta_n}{\cos \theta}$$

Dans notre problème cette formule nous donne

$$e_0^r = \frac{1}{25} = 4\%$$

Ce qui reste du flux d'énergie doit se trouver dans l'ordre +1 transmis. L'efficacité en transmission est

$$e_n^t = \frac{A_n A_n \cos \tilde{\theta}_n}{n_r \cos \theta}$$

où c'est important de ne pas oublier l'indice du milieu 2, n_r , dans le facteur d'efficacité en transmission, e_n^t . Dans le cas présent, on trouve

$$e_1^t = \frac{2 \cdot 36}{3 \cdot 25} = \frac{24}{25} = 96\%$$

On a donc retrouvé la conservation d'énergie comme prévu.