Travaux Dirigés Maîtrise de Physique
Option : Hyperfréquences et Optique non-linéaire

Sur une théorie asymptotique du réseau de diffraction infiniment conducteur

On considère une surface cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Oz d'un trièdre $Oxyz$, et dont la directrice, située dans le plan $x0y$, est périodique de période $d = 2\pi$ par rapport à la coordonnée x. Cette directrice, d'équation $y = hf(x)$, où h pourra par la suite varier entre 0 et 1, sépare l'espace en 2 régions. La région $\boxed{1}$ est le vide, la région $\boxed{2}$ est un *métal infiniment conducteur*. On désigné par "h" la profondeur des sillons. Une onde plane incidente, de vecteur d'onde $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ (avec $\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}\right|$) appartenant au plan xOy, tombe sur le réseau ainsi constitué sous l'incidence θ, et l'on suppose son champ électrique parallèle à l'axe Oz, d'amplitude unité.

I **Généralités**

1. *Donner l'expression de l'amplitude complexe E^{i} du champ éléctrique incident.*
   On se rappelle que ce problème en TE peut être traité comme un problème scalaire. Le champ vectoriel incident s'écrit $\overrightarrow{\mathcal{E}^{\mathrm{i}}} = \mathcal{E}^{\mathrm{i}}\widehat{\mathbf{z}}$ avec
   $$\overrightarrow{\mathbf{k}} = k\sin\theta\widehat{\mathbf{x}} - k\cos\theta\widehat{\mathbf{y}} = k\left|\begin{array}{c}\sin\theta\\ -\cos\theta\\ 0\end{array}\right.$$
   $$\mathcal{E}^{\mathrm{i}} = \underline{\underline{1}}\exp\left[i\overrightarrow{\mathbf{k}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}}\right] = \underline{\underline{1}}\exp\left[ik\left(x\sin\theta - y\cos\theta\right)\right]$$
2. *Montrer que le champ total est pseudo-périodique par rapport à la coordonnée x.*
   Il doit exister un opérateur linéaire (disons l'opérateur $\mathcal{R}$) qui dépend des coordonnées x et y (au module de d près : voir ci-dessous) et qui relie le champ incident au champ total $\mathcal{E}(x,y)$:
   $$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{R}\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y) \tag{1}$$
   La linéarité de cette opérateur implique que pour $\forall C$ où C est une constante :
   $$\forall C \qquad C\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{R}C\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y)$$
   Faisons subir au trièdre de référence une translation d'amplitude $-d$ le long de Ox. La structure infini idéale étant invariante dans cette translation, **l'opérateur $\mathcal{R}$ est inchangé** tandis que $\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y)$ et $\mathcal{E}(x,y)$ sont respectivement remplacés par $\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x+d,y)$ et $\mathcal{E}(x+d,y)$. On peut donc écrire que :
   $$\mathcal{E}(x+d,y) = \mathcal{R}\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x+d,y)$$
   ou encore
   $$\mathcal{E}(x+d,y) = \mathcal{R}e^{ik\sin\theta d}\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y) = e^{ik\sin\theta d}\mathcal{R}\mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y)$$
   ce qui après l'éq.(1) entraîne
   $$\mathcal{E}(x+d,y) = e^{ik\sin\theta d}\mathcal{E}(x,y) \tag{2}$$

qui est l'expression de pseudo-périodicité du champ total. Puisque le champ incident satisfait la même expression, le champ diffracté $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}(x,y) \equiv \mathcal{E}(x,y) - \mathcal{E}^{\mathrm{i}}(x,y)$ est également pseudo-périodique.

En déduire qu'il est représentable par un développement en série que l'on précisera.

On constate alors que

$$\mathcal{E}(x,y)\, e^{-i\gamma x} \text{ est périodique sur } x \text{ de période } d.$$

En effet :

$$\left[\mathcal{E}(x+d,y)\, e^{-i\gamma(x+d)}\right] = \mathcal{E}(x,y)\, e^{i\gamma d} e^{-i\gamma x} e^{-i\gamma d} = \mathcal{E}(x,y)\, e^{-i\gamma x}$$

Un champ périodique est développable en série de Fourier, i.e.

$$\mathcal{E}(x,y)\, e^{-i\gamma x} = \sum_{-\infty}^{\infty} E_n(y)\, e^{in\frac{2\pi}{d}x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n(y)\, e^{inKx} \qquad \boxed{K = \tfrac{2\pi}{d}} = 1$$

Le champ total $\mathcal{E}(x,y)$ est donc développable en série de Fourier généralisée :

$$\mathcal{E}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n(y)\, e^{i\gamma_n x} \qquad \text{avec } \gamma_n = \gamma + nK = k\sin\theta + nK \tag{3}$$

3. *Etablir l'expression du champ diffracté dans le demi-espace $y > h$ en termes d'une série d'ondes planes (développement de Rayleigh) dont on désignera par γ_n les composantes sur $\overrightarrow{Ox}$ de leurs vecteurs d'ondes et par B_n leurs coefficients.*

   Le demi-espace $y > h$ est un milieu homogène. Le champ total dans cette région satisfait donc

$$\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = 0 \tag{4}$$

   Insérant l'éq.(3) dans l'éq.(4) nous donne

$$\sum_n \left[E_n''(y) + \left(k^2 - \gamma_n^2\right) E_n(y)\right] e^{i\gamma_n x} = 0$$

   où en multipliant par $e^{-i\gamma x}$ + la base de Fourier

$$\Rightarrow \forall n :\ E_n''(y) + \beta_n^2 E_n(y) = 0 \qquad \beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \gamma_n^2} & \text{si } k^2 - \gamma_n^2 > 0 \\ i\sqrt{\gamma_n^2 - k^2} & \text{si } k^2 - \gamma_n^2 < 0 \end{cases} \tag{5}$$

   L'équation (5) implique

$$\Rightarrow E_n(y) = A_n e^{-i\beta_n y} + B_n e^{i\beta_n y}$$
$$\Rightarrow E_n(x,y) = \sum_n \underbrace{A_n e^{-i\beta_n y} e^{i\gamma_n x}}_{\boxed{1}} + \sum_n \underbrace{B_n e^{i\beta_n y} e^{i\gamma_n x}}_{\boxed{2}}$$

   $\boxed{1}$: champ incident ou non borné à $y \to \infty$

$$+ \text{ Condition d'onde sortante} \Rightarrow A_n = \delta_{n,0}$$

$\boxed{2}$: champ diffracté, propagtif ou évanescant

$$E^{\mathrm{d}}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n e^{i\beta_n y} e^{i\gamma_n x}$$
$$\gamma_n = k\sin\theta + nK \tag{6}$$

En déduire les direction de propagation des ondes diffractés, que l'on repérera par des angles θ_n.

Pour un ordre propagatif donné, n, on peut définir une vecteur d'onde associée à cette onde plane, $\overrightarrow{\mathbf{k}}_n$, telle que :

$$B_n e^{i\beta_n y} e^{i\gamma_n x} = B_n e^{i\overrightarrow{\mathbf{k}}_n\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}}}$$

Cette définition entraîne que

$$\overrightarrow{\mathbf{k}}_n = \left| \begin{array}{c} \gamma_n \\ \beta_n \\ 0 \end{array} \right.$$

A partir de la définition de β_n en l'éq.(5) on trouve que

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{k}}_n\right| = \sqrt{\beta_n^2+\gamma_n^2} = \sqrt{k^2-\gamma_n^2+\gamma_n^2} = k$$

L'amplitude de étant égale à $\overrightarrow{\mathbf{k}}_n$ implique qu'on peut définir pour l'ordre n un angle de diffraction θ_n tel que :

$$\overrightarrow{\mathbf{k}}_n = \left| \begin{array}{c} k\sin\theta_n \\ k\cos\theta_n \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \gamma_n \\ \beta_n \\ 0 \end{array} \right.$$

En se rappelant la valeur de γ_n trouvé dans l'éq.(3), on obtient

$$\begin{aligned} k\sin\theta_n &= \gamma_n = k\sin\theta + nK \\ \Rightarrow \boxed{\sin\theta_n} &= \sin\theta + n\frac{K}{k} = \boxed{\sin\theta + n\tfrac{\lambda}{d}} \overset{K=1}{=} \sin\theta + n\frac{\lambda}{2\pi} \end{aligned} \tag{7}$$

On se rappelle que $K = 1 \Rightarrow d = 2\pi$

On appelle "montage de Littrow dans l'ordre $(-m)$" un montage dans lequel la direction de propagation de l'ordre $(-m)$ se confond avec la direction de l'onde incidente. Donner la relation qui lie alors λ, d, θ et m. En déduire les valeurs des constantes γ_n.

Les conditions de Littrow de l'ordre $(-m)$ sont

$$\begin{aligned} \sin\theta_{-m} &= -\sin\theta \\ &\Rightarrow \sin\theta - m\frac{\lambda}{d} = -\sin\theta \Rightarrow 2\sin\theta = m\frac{\lambda}{d} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda = \tfrac{2d\sin\theta}{m}} \overset{K=1}{=} \frac{4\pi\sin\theta}{m} \end{aligned} \tag{8}$$

Alors $\gamma_n = k\sin\theta + nK = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{m\lambda}{2d} + nK = \frac{\pi}{d}m + nK = \frac{\pi}{d}m + n\frac{2\pi}{d} = \frac{\pi}{d}(m+2n)$

$$\Rightarrow \gamma_n = \frac{\pi}{d}(m+2n) \overset{K=1}{=} \left(n+\frac{m}{2}\right)$$

4. *On considère les points B et C définis sur la fig.1, d'ordonnées égales et toutes deux supérieures à "h", puis les points B' et C' qui se déduisent de B et C respectivement par une translation parallèlement à l'axe $0z$ d'amplitude unité. On désigne respectivement par Φ^{i} et Φ_n^{d} les flux des vecteurs de Poynting complexes de l'onde incidente et de l'onde diffractée dans l'ordre n, à travers le rectangle $BB'C'C$. On définit l'efficacité e_n du réseau dans l'ordre n par $e_n = \Phi_n^{\mathrm{d}}/\Phi^{\mathrm{i}}$. Etablir que $e_n = B_n\overline{B}_n\frac{\cos\theta_n}{\cos\theta}$.*

$$\left|\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{i}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{i}}\right|}{Z_0} \Rightarrow \left|\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{i}}\right| = \frac{1}{2z_0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{i}} = \widehat{\mathbf{k}}_{\mathrm{i}}\left|\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{i}}\right| = \frac{\widehat{\mathbf{k}}_{\mathrm{i}}}{2z_0} \Rightarrow \Phi^{\mathrm{i}} \equiv -\iint_S \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{i}} \cdot \widehat{\mathbf{y}} = \frac{1}{2z_0}\cos\theta \times d \times 1$$

On n'a pas besoin de la valeur de $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

Champ diffusé dans l'ordre n.

$$\left|\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{d}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{d}}\right|}{Z_0} \Rightarrow \left|\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{d}}\right| = \frac{|B_n|^2}{2z_0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{d}} = \widehat{\mathbf{k}}_{\mathrm{d}}\left|\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{d}}\right| = \frac{\widehat{\mathbf{k}}_{\mathrm{d}}}{2z_0} \Rightarrow \Phi^{\mathrm{d}} \equiv \iint_S \overrightarrow{\mathcal{P}}^{\mathrm{d}} \cdot \widehat{\mathbf{y}} = \frac{|B_n|^2}{2z_0}\cos\theta_n \times d \times 1$$

$$\Rightarrow e_n = \Phi_n^{\mathrm{d}}/\Phi^{\mathrm{i}} = B_n\overline{B}_n\frac{\cos\theta_n}{\cos\theta} = B_n\overline{B}_n\frac{\beta_n}{\beta_0} \tag{9}$$

II **Etude asymptotique** On se propose de faire une étude approchée de ce réseau de diffraction dans le cas asymptotique où $h \to 0$. A cette fin, on admet que quand la profondeur des sillons "h" est suffisamment faible, le développement de Rayleigh établi au I.3 est valable pour représenter le champ diffracté $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$ en tout point du domaine $y \geq hf(x)$, et non pas seulement pour $y \geq h$. On admet donc qu'il est encore valable dans le creux des sillons.

1. a) *Rappeler les conditions aux limites que doit satisfaire le champ électromagnétique à la surface d'un métal infiniment conducteur.*

   Le champ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est purement tangentiel à la surface puisque les champs $\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{i}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{d}}$ sont purement tangentiels. La partie tagentielle du champ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ doit être continue à la surface, $\widehat{\mathbf{n}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{E}} = 0$. Le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait. Donc, le champ $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est nul à la surface du conducteur $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

   b) *Ecrire la condition aux limites vérifié par le champ électrique total en utilisant l'hypothèse de la validité du développement de Rayleigh précédemment énoncée.*

   Le champ total est zéro à la surface du conducteur

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{i}} + \overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{d}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \quad \text{si } y = hf(x)$$

$$\Rightarrow \sum_n B_n e^{i\beta_n hf(x)} e^{i\gamma_n x} = -e^{-i\beta_0 hf(x)} e^{i\gamma x}$$

$$\Rightarrow \sum_n B_n e^{i[\beta_n hf(x) + nx]} = -e^{-i\beta_0 hf(x)} \tag{10}$$

   où nous avons pris $K = 1$.

2. *On fait tendre h vers zéro, en conservant le produit kh constant et l'on pose $kh = w$. Montrer que les coefficients de Rayleigh B_n du champ diffracté apparaissent alors comme les coefficients de Fourier d'une fonction simple et donner leur expression analytique en terme d'une intégrale.*

$$\beta_0 = k\cos\theta$$
$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2} = k\cos\theta_n$$

$$h \to 0 \quad kh = cte = w$$
$$\Rightarrow k \to \infty : \lambda \to 0$$

A partir de l'éq.(7) on déduit que

$$\sin\theta_n = \sin\theta + n\frac{\lambda}{d} \to \sin\theta \text{ car } \lambda \to 0$$
$$\Rightarrow \theta_n \to \theta$$

Dans cette limite l'éq(10), (avec $K = 1$) prend la forme

$$\sum_n B_n e^{inx} e^{ikh\cos\theta f(x)} = -e^{-ikh\cos\theta f(x)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_n B_n e^{inx}}_{\text{développement de Fourier}} = \underbrace{-e^{-2iw\cos\theta f(x)}}_{\text{fonction simple}}$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(nx + 2w\cos\theta f(x)\right)\right] dx \tag{11}$$

3. a) *On applique les résultats de la question précédente à un réseau sinusoïdale pour lequel $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$. Calculer B_{-1} pour ce réseau utilisé en montage de Littrow dans l'ordre -1. En déduire e_{-1}. Déterminer la longueur d'onde λ (fonction de h) qui rend e_{-1} maximale. Que vaut ce maximum?*

Littrow -1 : $\lambda = 2d\sin\theta \overset{K=1}{=} 4\pi\sin\theta$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{2d} \overset{K=1}{=} \frac{\lambda}{4\pi}$$

Comme $k \to \infty$, $\lambda \to 0 \Rightarrow \sin\theta \to 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(nx + 2w\frac{1}{2}\sin x\right)\right] dx$$
$$\Rightarrow B_{-1} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(x - w\sin x\right)\right] dx$$
$$\Rightarrow \boxed{B\_1 = J_1(\omega)}$$

$$\Rightarrow \boxed{e\_1 = J_1 J_1 \frac{\beta\_1}{\beta_0} = \left|J_1(w)\right|^2}$$

$$e_{-1} \text{ maximum pour : } \frac{dJ_1}{dw} = 0 \Rightarrow w = 1.814$$
$$\Rightarrow kh = 1.814 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi h}{1.814} = 3.412h$$

Alors :

$$e_{-1,\text{Max}} = |J_1(1.814)|^2 = 0.581^2 = 0.338$$

Remarque : $\exists$ d'autres valeurs de λ qui rendent e_{-1} maximum, ex : $w = 5.331$ etc. mais ces maximums sont plus faibles que le premier.

b) *Mêmes question pour l'ordre -2, le réseau étant utilisé en montage de Littrow dans l'ordre -2.*

Littrow -2 : $\sin\theta = \frac{\lambda}{d} \longrightarrow 0$, et donc $\cos\theta \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} B_{-2} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(2x - w\sin x\right)\right] dx \\ &= -J_2(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e_{-2} = |J_2(\omega)|^2$$

e_{-2} est maximal pour $\frac{dJ_2}{d\omega} = 0 \;\; \Rightarrow \omega = 3.054$. Alors

$$e_{-2,\text{Max}} = |J_2(3.054)|^2 = 0.45795^2 = 0.23$$

La longueur d'onde à ce maximum est donné par :

$$\begin{aligned} kh = 3.054 &= \frac{2\pi}{\lambda}h \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{2\pi}{3.054}h = 2.057h \end{aligned}$$

4. a) *Reprendre la question 3a) pour le réseau créneau représenté en fig.2. Quelle est la valeur de c qui permettra de maximiser e_{-1}? Pour quelle valeur de λ est alors obtenu le maximum de e_{-1} et que vaut ce maximum?*

$$y = hf(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < x < c \\ h & \text{si} \quad c < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < x < c \\ 1 & \text{si} \quad c < x < 2\pi \end{cases}$$

L'eq.(11)

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_n &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(nx + 2w\cos\theta f(x)\right)\right] dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{-2iwf(x)}dx \end{aligned}$$

où nous avons utilisé à nouveau le montage de Littrow pris avec la limite $\lambda \longrightarrow 0$,

$\Rightarrow \cos\theta = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
B_{-1} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^c e^{ix}dx - \frac{1}{2\pi}\int_c^{2\pi} e^{ix}e^{-2iw}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\left(e^{ic}-1\right) - \frac{e^{-2iw}}{2\pi i}\left(1-e^{ic}\right) \\
&= -\frac{e^{i\frac{c}{2}}}{2\pi i}\left(e^{i\frac{c}{2}}-e^{-i\frac{c}{2}}\right) - \frac{e^{-2iw}e^{i\frac{c}{2}}}{2\pi i}\left(e^{-i\frac{c}{2}}-e^{i\frac{c}{2}}\right) \\
&= -\frac{e^{i\frac{c}{2}}}{\pi}\left(\sin\frac{c}{2}\right) + \frac{e^{-2iw}e^{i\frac{c}{2}}}{\pi}\left(\sin\frac{c}{2}\right) \\
&= \frac{e^{i\frac{c}{2}}}{\pi}\sin\frac{c}{2}\left(e^{-2iw}-1\right) = \frac{e^{i\frac{c}{2}}}{\pi}e^{-iw}\sin\frac{c}{2}\left(e^{-iw}-e^{iw}\right) \\
&= \frac{-2i}{\pi}e^{i\left(\frac{c}{2}-w\right)}\sin\frac{c}{2}\sin\omega
\end{aligned}$$

Le résultat pour l'efficacité est alors

$$e_{-1} = |B_{-1}|^2 = \frac{4}{\pi^2}\sin^2\frac{c}{2}\sin^2\omega$$

e_{-1} max si $\sin^2\frac{c}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi$, où p est un entier $\Rightarrow c = \pi + 2p\pi$ car $c < 2\pi$.
C'est un réseau symétrique (creux=bosses)
Alors

$$e_{-1,\mathrm{Max}} = \frac{4}{\pi^2}\sin^2\omega$$

Il y a un maximum si $\sin^2 w = 1$

$$\begin{aligned}
w = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow kh = \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}h = \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \lambda = 4h
\end{aligned}$$

Alors

$$e_{-1,\mathrm{Max}\ ,\mathrm{Max}} = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0.4053$$

b) *Mêmes question pour l'ordre -2, le réseau étant utilisé en montage de Littrow dans l'ordre -2.*

$$\begin{aligned}
B_{-2} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^c e^{2ix}dx - \frac{1}{2\pi}\int_c^{2\pi} e^{2ix}e^{-2iw}dx \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\left(e^{2ic}-1\right) - \frac{e^{-2iw}}{4\pi i}\left(1-e^{2ic}\right) \\
&= -\frac{e^{ic}}{4\pi i}\left(e^{ic}-e^{-ic}\right) - \frac{e^{-2iw}e^{ic}}{4\pi i}\left(e^{-ic}-e^{ic}\right) \\
&= -\frac{e^{ic}}{2\pi}\sin c + \frac{e^{-2iw}e^{ic}}{2\pi}\sin c \\
&= \frac{e^{i(c-w)}\sin c}{2\pi}\left(e^{-iw}-e^{iw}\right) \\
&= -\frac{ie^{i(c-w)}\sin c\sin w}{\pi}
\end{aligned}$$

Le résultat pour l'efficacité est alors

$$e_{-2} = |B_{-2}|^2 = \frac{1}{\pi^2}\sin^2 c \sin^2 \omega$$

e_{-2} est maximal si $\sin^2 c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{2} + p\pi$ où p est une entier $\Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ car $c < 2\pi$.

$$e_{-2,\mathrm{Max}} = \frac{1}{\pi^2}\sin^2 \omega$$

Il y a un maximum si $\sin^2 w = 1$, i.e. $w = \frac{\pi}{2}$ ce qui implique comme dans le de e_{-1} que

$$w = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda = 4h$$

Alors

$$e_{-2,\mathrm{Max}\ ,\mathrm{Max}} = \frac{1}{\pi^2} \simeq 0.101$$

5. *On se donne un profil triangulaire $y = hf(x)$ avec $hf(x) = x\tan\alpha \ \forall\ x \in [0, 2\pi]$ α connu. Montrer que ce réseau présente, $\forall\ m$, des valeurs remarquables pour les efficacités e_{-m} des l'instant qu'il est utilisé en montage de Littrow dans l'ordre $-m$, et qu'on choisit α égal à l'angle d'incidence θ.*

$$B_{-m} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(mx - 2w\frac{x}{h}\cos\theta\tan\alpha\right)\right]dx$$

où

$$f(x) = \frac{x}{h}\tan\alpha$$

Il faut déterminer la valeur de $\tan\alpha$. Rappelons-nous qu'on a définit l'échelle telle que $K \equiv \frac{2\pi}{d} = 1$ ce qui implique que la période du réseaux est $d = 2\pi$ et donc quand $x = 2\pi$ on a

$$f(2\pi) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{h}\tan\alpha = 1$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{h}{2\pi}$$

Examinons l'argument de l'exponentielle si on choisit $\alpha = \theta$:

$$\begin{aligned} ix\left(m - \frac{2w}{h}\cos\theta\tan\alpha\right) &= ix\left(m - \frac{2w}{h}\sin\theta\right) \\ &= ix\left(m - \frac{2w}{h}\frac{m\lambda}{2d}\right) = ix\left(m - \frac{khm\lambda}{h4\pi}\right) \\ &= ix\left(m - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{m\lambda}{2\pi}\right) = ixm(1-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_{-m} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = -1$$

pour n'importe quelle montage de Littrow.

Conclusions de cette étude?

Il y a une nette supériorité du profil triangulaire

- pour l'ordre -1 en Littrow
- pas de baisse d'efficacité quand on passe aux ordres supérieurs

Document mathématique

$$J_n(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[-i\left(z \sin\theta - n\theta\right)\right] d\theta$$

$$\frac{dJ_1(z)}{dz} = 0 \quad \text{pour } z_1 = 1,814,\ \ z_2 = 5,331,\ z_3 = 8,536,\ \ldots$$

$$\frac{dJ_2(z)}{dz} = 0 \quad \text{pour } z_1 = 3,054,\ \ z_2 = 6,706,\ z_3 = 9,963,\ \ldots$$

$$J_1(1,8142) = 0,581 \qquad , \qquad J_2(3,054) = 0,4795$$