Maîtrise de Physique : Option Hyperfréquences et Optique non-linéaire

Travaux Dirigés N° 5 :
Diffraction par un réseau de tiges métalliques rectangulaires

On considère un réseau de diffraction constitué de tiges métalliques rectangulaires identiques, parallèles, de longueur infinie dans la direction de l'axe Oz. La période du réseau est d, la hauteur de la zone modulée est h, et l'espacement entre les tiges est a, comme illustré sur la figure. Les tiges sont constituées d'un métal bon conducteur non ferromagnétique tel que l'argent, d'indice complexe ν_2 ; elles baignent dans l'air d'indice $\nu_1 = 1$. Le réseau est éclairé sous l'incidence θ par une onde plane sinusoïdale monochromatique de longueur d'onde λ_1, de pulsation ω, et le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ est parallèle à l'axe Oz.

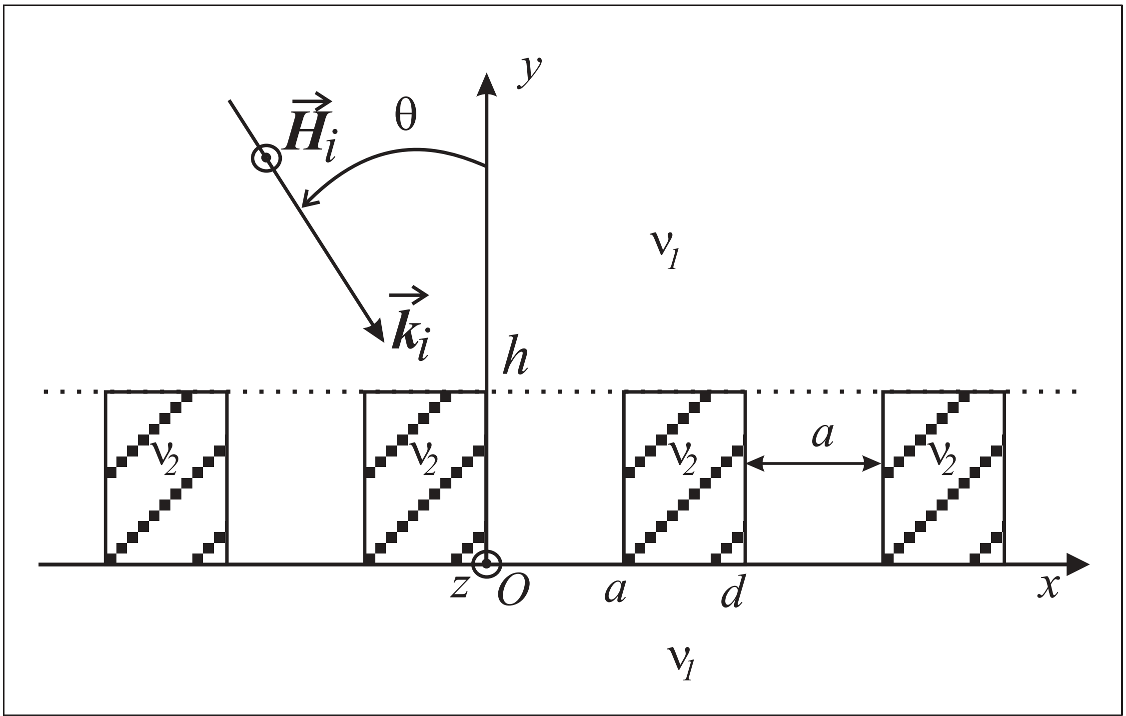

Figure 1:

I **Généralités** :

1. Ecrire l'expression de l'onde plane incidente définie par sa composante $\mathcal{H}_z^{\mathrm{i}}$. Montrer que la linéarité du problème permet d'établir la pseudo-périodicité du champ total $\mathcal{H}_z$: $\mathcal{H}_z\left(x+d,y\right) = \mathcal{H}_z\left(x,y\right)e^{i\alpha d}$, où $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_1}\sin\theta$. En déduire que $\mathcal{H}_z$ peut s'écrire sous la forme :
$$\mathcal{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H_n\left(y\right)e^{i\alpha_n x} \quad \text{où} \quad \alpha_n = \alpha + n\frac{2\pi}{d} \tag{1}$$

2. Ecrire les équations de Maxwell harmoniques et les projeter sur les axes de coordonnées. Montrer que l'invariance du problème le long de la direction Oz permet de découpler les

6 équations obtenues en 2 systèmes indépendants. On s'intéresse par la suite à la solution TM définie par ses composantes $\mathcal{H}_z$, $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ (avec $\mathcal{E}_z = 0 = \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y$). On pose :

$$\widetilde{\overrightarrow{\mathcal{E}}} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{E}}}{i\omega\mu_0} \text{ et } \widetilde{\mathcal{E}}_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{E}_n(y)\, e^{i\alpha_n x} \tag{2}$$

Montrer que les fonctions inconnues $H_n(y)$ et $\widetilde{E}_n(y)$ sont solutions du système différentiel infini :

$$\frac{dH_n}{dy} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(k^2\right)_{n-m} \widetilde{E}_m(y) \tag{3}$$

$$\frac{d\widetilde{E}_m}{dy} = \left\{ \alpha_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{1}{k^2}\right)_{n-m} H_m \right\} - H_n \tag{4}$$

où $\left(k^2\right)_p$ est le $p^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de la fonction $k^2(x,y) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0\, \nu^2(x,y)$, et

$$\nu^2(x,y) = \begin{cases} \nu_2^2 & \text{dans les tiges} \\ \nu_1^2 & \text{hors des tiges} \end{cases} .$$

3. Que devient le système différentiel $(3-4)$ si $y > h$ où $y < 0$?
   Montrer que si $y > h$, $\mathcal{H}_z$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H}_z(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \exp(-i\beta_n y) \exp(i\alpha_n x) + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n \exp(i\beta_n y) \exp(i\alpha_n x) \tag{5}$$

   où les β_n sont des quantités que l'on déterminera. Discuter la signification physique des divers termes de l'expression (5).

4. En utilisant le théorème du vecteur de Poynting complexe, montrer que l'efficacité diffracté en réflexion dans l'ordre n est donné par :

$$e_n^{\mathrm{r}} = \frac{B_n \overline{B_n} \beta_n}{A_0 \overline{A_0} \beta_0}$$

II **Méthode aux valeurs propres ; calcul du champ dans la zone modulée**

En vue d'un traitement numérique sur ordinateur, on tronque les séries (1) et (2) à $2N+1$ coefficients, de $n = -N$ à $n = +N$, et l'on introduit un vecteur colonne, à $4N+2$ composantes, $[F(y)]$ formé de 2 blocs comprenant l'un les composantes $H_n(y)$, l'autre les composantes $\widetilde{E}_n(y)$:

$$[F(y)] = \begin{pmatrix} \vdots \\ H_n(y) \\ \vdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \widetilde{E}_n(y) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les équations de propagation se mettent sous la forme :

$$\frac{d\left[F\left(y\right)\right]}{dy}=M\left[F\left(y\right)\right] \tag{6}$$

où M est une matrice dont on précisera les différents blocs. Montrer que M est indépendante de y, pour $y\in[0,h]$.

2. A étant une matrice donnée, on définit la fonction $\exp\left(A\right)$ par la série :

$$\exp\left(A\right)=I+A+\frac{A^2}{2!}+...+\frac{A^k}{k!}+...$$

qui possède un rayon de convergence infini. On sait en outre que la solution du système différentiel (6) s'écrit sous la forme :

$$\left[F\left(y\right)\right]=\exp\left(My\right)\left[F\left(0\right)\right]$$

qui généralise la solution bien connue quand M se réduit à un élément. On désigne par $i\rho_m$ les valeurs propres de la matrice M et par D la matrice diagonale d'éléments $i\rho_m\delta_{nm}$. Soit Q la matrice obtenue en mettant en colonne les vecteurs propres de M, telle que l'on ait :

$$M=QDQ^{-1}$$

Calculer M^2, puis M^k. En déduire que si l'on désigne par $\phi\left(y\right)$ une matrice diagonale d'éléments $\exp\left(i\rho_m y\right)\delta_{n,m}$, on a :

$$\left[F\left(y\right)\right]=Q\phi\left(y\right)Q^{-1}\left[F\left(0\right)\right] \tag{7}$$

3. On admet que l'équation aux valeurs propres : $\text{dét}\left(M-i\rho I\right)=0$ ne dépend que de ρ^2. En déduire que M possède $4N+2$ valeurs propres qui sont 2 à 2 opposées, et que par conséquent $H_n\left(y\right)$ s'écrit sous la forme :

$$H_n\left(y\right)=\sum_{m=-N}^{N}\left(H_{n,m}t_m^+e^{i\rho_m y}+G_{n,m}t_m^-e^{-i\rho_m y}\right)$$

où les t_m^+, t_m^-, dépendent des coefficients des ordres transmis, et les $H_{n,m}, G_{n,m}$ sont des constantes que l'on n'essaiera pas de déterminer.

4. Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{H}\left(x,y\right)$ $\forall y:\ 0\le y\le h$ s'écrit :

$$\mathcal{H}\left(x,y\right)=\sum_{n,m=-N}^{N}\left(H_{n,m}t_m^+e^{i\rho_m y}+G_{n,m}t_m^-e^{-i\rho_m y}\right)e^{i\alpha_n x} \tag{8}$$

On appelle "mode à fuite" un terme quelconque de l'expression (8), correspondant à un couple (n,m) donné. Montrer que si h est suffisamment grand le champ à la base des sillons est conditionné par la constant ρ_m ayant la plus petite partie imaginaire. Montrer qu'il est possible de choisir la nature du métal et l'incidence afin d'avoir une valeur propre réelle particulièrement remarquable. Conclure dans ce cas sur les propriétés de filtrage de ce dispositif. Cette dernière solution persiste-t-elle si l'on remplace le réseau de fentes par une grille percée de trous rectangulaires?

5. Pourriez-vous trouver une justification à l'hypothèse de II.3 ?