Maîtrise de Physique : Option Hyperfréquences et Optique non-linéaire

Travaux Dirigés N° 4 :
Diffraction par un réseau de tiges infiniment conducteurs

I Un réseau de tiges infiniment conducteur utilisé en transmission est représenté sur la fig.1 qui définit les notations utilisées dans la suite. Les génératrices, non-représentées, sont parallèles à l'axe Oz. Les zones hachurées sont remplis d'un métal infiniment conducteur. Les zones non-hachurées sont remplis de diélectriques transparents dont les indices de réfraction (ν, ν_1) sont indiqués sur la figure. On notera que les indices du superstrat et du substrat sont égaux. Une onde plane incidente, de vecteur d'onde $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{\mathrm{i}}$ appartenant au plan xOy, tombe sur le réseau sous l'angle d'incidence θ, et l'on suppose son champ éléctrique parallèle à l'axe $\overrightarrow{Oz}$, d'amplitude unité.

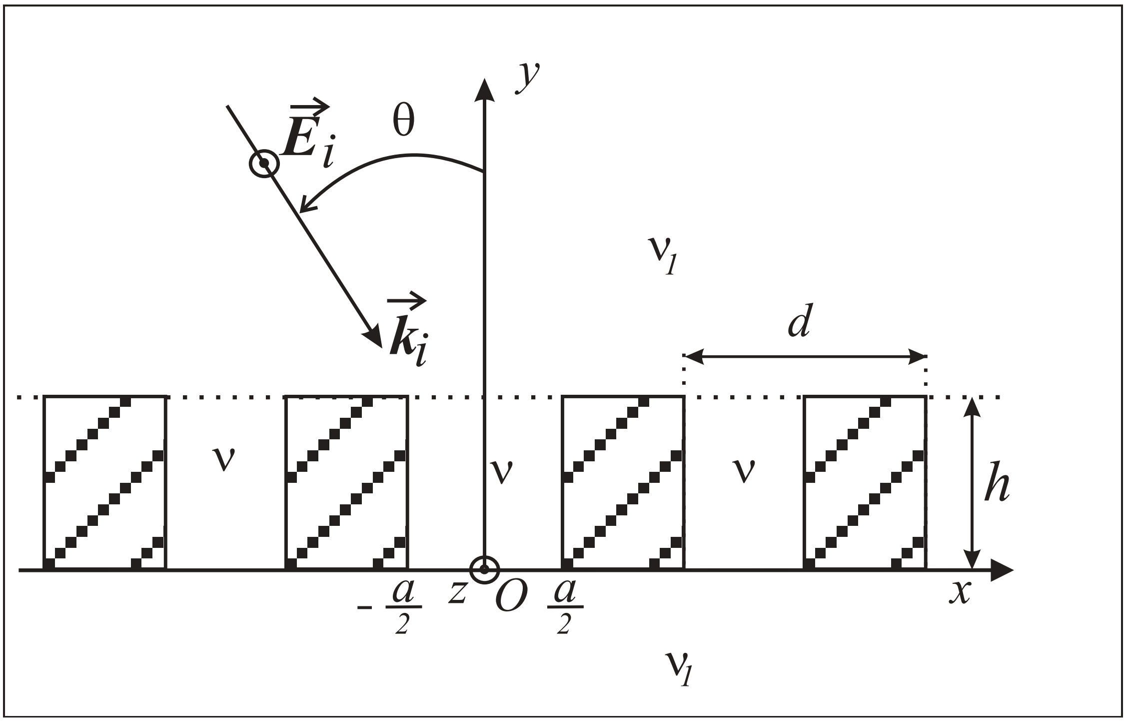

Figure 1:

1. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\mathcal{E}^{\mathrm{i}}$ du champ incident.
2. Montrer que le champ total est pseudo-périodique par rapport à x.
   En déduire qu'il est représentable par une série que l'on précisera.
3. Etablir les expressions des champs diffractés dans le superstrat ($y > h$) et le substrat ($y < 0$) sous la forme de développements de Rayleigh. En déduire les angles de diffraction θ_n et θ'_n des ordres réfléchis et transmis.
4. On choisit l'incidence θ correspondant au montage de Littrow dans l'ordre -1, c'est-à-dire tel que l'ordre -1 réfléchi se propage dans la même direction que l'onde incidente, mais en sens inverse. Etablir la relation liant θ, la longueur d'onde λ_1 dans le superstrat et la période d du réseau.
   Cette condition sera supposé dans toute la suite

II Théorie modale :

1. On s'intéresse au champ électrique total, $\mathcal{E}_{\mathrm{s}}$ qui s'établit à l'intérieur du premièr sillon défini par $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ et $y \in [0, h]$, et on le représente par la série :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y)\, G_m(x) \tag{1}$$

a) Déterminer les fonctions $G_m(x)$ en écrivant les conditions aux limites en $x = \pm\frac{a}{2}$.

b) Montrer que les fonctions $u_m(y)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_m(y) = a_m \exp\left[i\mu_m(y+h)\right] + b_m \exp\left[-i\mu_m(y-h)\right] \tag{2}$$

et préciser la valeur de μ_m. Discuter le caractère propagateur ou évanescent de la solution élémentaire $u_m(y)\, G_m(x)$.

c) Déterminer la valeur limite de a au dessous de laquelle toutes les solutions données par l'expression (2) conduisent à des ondes évanescentes. Montrer qu'alors, à la base des sillons, le champ $\mathcal{E}_{\mathrm{s}}(x, 0)$ peut être approximé par :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}}(x, 0) \simeq (a_1 + b_1) \exp(i\mu_1 h) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

dès que h est suffisamment grand.
En déduire la valeur du champ $\mathcal{E}(x, 0)$ au bas des deux plus proches sillons et conclure sur la parité de la fonction $\mathcal{E}(x, 0)$, $\forall x$.

2. On choisit la période d du réseau telle que l'on ait :

$$\frac{2d}{3} \leq \lambda_1 \leq 2d$$

a) Déterminer le nombre d'ordres diffracté dans le substrat.

b) Expliquer sommairement (sans détailler les calculs) la démarche à suivre pour calculer l'amplitude complexe des ordres diffractés.

c) Pouvez-vous prévoir une relation simple entre les efficacités des ordres transmis ?

d) Pouvez-vous suggérer une ou plusieurs applications de ce composant ?