Travaux Dirigés N° 3 Maîtrise de Physique

Sur des solutions exactes des réseaux en domaine résonant

I L'espace étant rapporté à un trièdre direct $Oxyz$, on considère dans le plan $x0y$, une courbe $f(x)$, périodique en x de période d et de maximum h, dont quelques périodes sont représentées sur la figure. Cette courbe est la directrice d'une surface cylindrique de génératrices parallèles à $\overrightarrow{Oz}$ qui représente la surface d'un réseau échelette infiniment conducteur baignant dans l'air dont la permittivité électrique est identique à celle du vide. Une onde plane monochromatique sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude unité, de longueur d'onde λ, de vecteur d'onde $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ situé dans le plan xOy, tombe sur le réseau sous l'incidence θ. Elle est polarisée de telle sorte que vecteur excitation magnétique soit parallèle à l'axe $0z$ et l'on adopte une dépendance en temps en $\exp(-i\omega t)$. On choisit comme inconnue du problème la composante sur $\overrightarrow{Oz}$ du vecteur complexe associé à l'excitation du champ magnétique diffracté, que l'on note par $\mathcal{H}_z^{\mathrm{d}}(x,y)$.

1. Ecrire les champs incidents $\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\mathrm{i}}(x,y)$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}^{\mathrm{i}}(x,y)$ en fonction de θ, de l'amplitude du vecteur d'onde $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ et de l'impédance du vide $z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.
2. Etablir le problème aux limites dont H_z^{d} est solution.
3. Montrer que la fonction $H_z^{\mathrm{d}}(x,y)$ est pseudo-périodique en x.
4. En déduire l'expression du champ diffracté $H_z^{\mathrm{d}}(x,y)$ valable pour $y > h$, où h est la hauteur des sillons du réseau (développement de Rayleigh). Discuter la nature des différents termes et établir la "formule des réseaux" qui donne les directions des ordres diffractés.
5. On se place dans le cas particulier où l'angle d'incidence θ est égal à l'angle de blaze α" du réseau échelette défini sur la figure et où $\lambda = 2d\sin\alpha$. On superpose au champ incident un champ de vecteur d'onde $-\overrightarrow{\mathbf{k}}$, d'amplitude unité, en accord de phase avec le champ incident. Montrer que la superposition de ces deux champs vérifie le problème aux limites établi au 2.

   En déduire la valeur des coefficients de Rayleigh dans ce cas particulier.

II On suppose dans tout ce problème, que $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ est polarisé parallèlement à l'axe $\overrightarrow{Oz}$, de vecteur unitaire $\widehat{\mathbf{e}}_z$ et l'on pose :

$$\overrightarrow{\mathcal{H}} = u\widehat{\mathbf{e}}_z$$

1. Un dioptre plan d'équation $y = a$ sépare l'espace en 2 régions. La région 1 ($y > a$) est vide (ϵ_0,μ_0). La région 2 ($y < a$) est remplie d'un milieu d'indice n et de perméabilité μ_0. On rappelle que sous l'action d'une onde plane incidente $u^{\mathrm{i}} = \exp(-ik_0y)$, il s'établit un champ total :

$$u(y) = \begin{cases} \exp(-ik_0y) + r(a)\exp(ik_0y) & \text{si } y > a \\ t(a)\exp(-ink_0y) & \text{si } y < a \end{cases}$$

   a) Exprimer $r(a)$ en fonction de n et de $\phi(a) = \exp(-2ik_0a)$

   b) Exprimer $t(a)$ en fonction de $\psi(a) \equiv \exp[ik_0a(n_r - 1)]$

c) La valeur de l'indice étant fixée, est-il possible de choisir a pour que l'on ait à la fois

$$r\left(a\right)=r\left(0\right) \quad \text{et} \quad t\left(a\right)=t\left(0\right) \ ?$$

d) Montrer que si $n=1,5$, $a=2\lambda_0$ convient.

2. Le réseau "échelette" de période d, dont le profil est représenté sur la figure est éclairé par une onde plane perpendiculairement à la grande facette OS. La région en pointillé est remplie d'un diélectrique d'indice n_r et de perméabilité μ_0. Les petite facettes (telles que SD) sont recouvertes d'une couche métallique infiniment mince et infiniment conductrice (représentée en trait gras). Dans le triangle OSD, l'angle au sommet S est droit et l'angle aigu DOS est désigné par α.

   a) Rappeler l'expression du champ incident u^{i} dans les 2 systèmes d'axes (Ox, Oy) et (OX, OY).

   b) Rappeler les conditions aux limites que doit satisfaire le champ total u sur la surface du réseau.

   c) Donner l'expression du développement de Rayleigh décrivant le champ total pour $y<0$.

   d) Quelle relation doit-il exister entre d α et n pour que l'onde plane diffractée (en transmission) dans l'ordre $+1$ se propage dans le même sens que l'onde plane incidente ?

   e) Montrer que cette relation est automatiquement vérifiée si $n_r=\frac{3}{2}$ et si, de plus, la largeur SD de la petite facette est égale à $2\lambda_0$.

   f) En déduire, sans nouveaux calculs (mais par application de ce qui précède), le pourcentage d'énergie transmise par ce réseau dans l'ordre $+1$ par rapport à l'énergie incidente (efficacité du réseau).