Examen Partiel d'Electromagnétisme
novembre, 2006-2007

I Soit deux charges sur l'axe z, séparées d'une distance d : $-q$ en $(0, 0, -d/2)$ et $+q$ en $(0, 0, d/2)$.

a) Calculer le potentiel électrique V_D en un point $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ en coordonnées sphériques en supposant $r >> d$. Définissez le vecteur moment dipolaire $\mathbf{p}$, et exprimer le potentiel sous une forme indépendante du système de coordonnées.

Aide : utiliser le vecteur unité dans la direction r et le produit scalaire.

Le moment dipolaire est $\mathbf{p} = qd\widehat{\mathbf{z}} = p\widehat{\mathbf{z}}$.

En désignant $\mathbf{r}_B = (0, 0, -d/2)$ le vecteur position du point B, et $\mathbf{r}_A = (0, 0, d/2)$ le vecteur position du point A, le potentiel du système des deux charges s'écrit :

$$\begin{aligned}
V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\|AM\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\|BM\|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_A\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_B\|}
\end{aligned}$$

Par définition

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_A\| &= ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A))^{1/2} = \left(r^2 + r_A^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_A\right)^{1/2} \\
&= \left(r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r\frac{d}{2}\cos\theta\right)^{1/2} = r\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{1/2} \\
\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_B\| &= ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_B)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B))^{1/2} = \left(r^2 + r_B^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_B\right)^{1/2} \\
&= \left(r^2 + \frac{d^2}{4} + 2r\frac{d}{2}\cos\theta\right)^{1/2} = r\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Donc on peut écrire le potentiel

$$\begin{aligned}
V(M) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[1 + \frac{d}{2r}\cos\theta - \left(1 + \frac{d}{r}\cos\theta\right) + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right] \\
&\simeq \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta
\end{aligned}$$

où nous avons utiliser le développement limit pour x petit

$$(1+x)^n = 1 + nx + O\left(x^2\right)$$

Donc pour $\frac{d}{r} \ll 1$, le potentiel du dipôle s'écrit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

où le moment dipolaire est

$$p = \|\mathbf{p}\| = qd$$
$$\mathbf{p} = q\mathbf{BA} = qd\widehat{\mathbf{z}}$$

b) Calculer le champ électrostatique $\mathbf{E}_D$ du dipôle.

Aide : le gradient en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right).$$

Le champ électrique s'obtient avec :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) &= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\widehat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\widehat{\varphi}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2p\cos\theta}{r^3}\widehat{\mathbf{r}} + \frac{p}{r^3}\frac{d\cos\theta}{d\theta}\widehat{\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2p\cos\theta\widehat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\widehat{\theta}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

c) On considère maintenant le dipôle p et une charge Q. Calculer l'énergie d'interaction du dipôle avec la charge $U(r,\theta)$. Pour cela calculer le travail nécessaire (contre la force exercée par le dipôle, dont le champ est $\mathbf{E}_D$ pour ramener la charge Q de l'infini ∞ à une distance r du dipôle. Montrer que l'énergie $U(r,\theta)$ s'implémente comme $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}$ le champ électrique de Q.

On prend

$$\overrightarrow{dl} = \widehat{\mathbf{r}}dr$$

Le travail, $U(r,\theta)$, nécessaire à déplacer la charge Q depuis l'infini jusqu'à une distance r du dipôle est donné par :

$$\begin{aligned}
U(r,\theta) &= -\int_\infty^r \overrightarrow{\mathbf{F}}(M)\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_\infty^r Q\overrightarrow{\mathbf{E}}(M)\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2p\cos\theta\widehat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\widehat{\theta}\right)\cdot\widehat{\mathbf{r}}dr \\
&= -\frac{Q2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^3}\widehat{\mathbf{r}}\cdot\widehat{\mathbf{r}}dr = \frac{Qp\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{r^2}\right|_\infty^r \\
&= \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Le champ créé par la charge Q à l'origine du système (c'est à dire le centre du dipôle) est :

$$\mathbf{E}_Q(O) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}\widehat{\mathbf{r}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\widehat{\mathbf{r}} \qquad (2)$$

(!!! Attention à la signe)

Donc, on a

$$\mathbf{E}_Q(O)\cdot\mathbf{p} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\widehat{\mathbf{r}}\cdot\widehat{\mathbf{z}} = -\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = -U(r,\theta) \qquad \text{CQFD} \qquad (3)$$

II Soit une sphère conductrice de rayon R et une charge extérieure q située à une distance a de la sphère (l'origine de coordonnées coïncide avec le centre de la sphère). Le potentiel de la sphère est $V = 0$. Voir la figure pour la notation et la géométrie.

a) Utiliser la méthode des images pour calculer le potentiel électrique en un point quelconque r. En effet, montrer que le potentiel cherché est équivalent à celui de deux charges q, la charge physique, et q' l'image (à l'intérieur de la sphère). Déterminer la valeur de la charge image q' et sa position b pour satisfaire à la condition $V = 0$ sur la sphère.

Il faut que le potentiel créé par les deux charges q et q' soit zéro sur la sphère de rayon R. Le problème possède une symétrie cylindrique autour de l'axe qui contient l'origine et la charge q. Donc on prend q à la position $A = (\rho = 0, \phi = 0, z = a)$ et la charge q' à la position $B = (\rho = 0, \phi = 0, z = b)$. Le potentiel à un point $M = (\rho, \phi, z)$ créé par les deux charges q et q' est :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\|AM\|} + \frac{q'}{\|BM\|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}} + \frac{q'}{\left(\rho^2 + (z-b)^2\right)^{1/2}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

La surface $V = 0$ est décrite par les valeurs de ρ et de z qui satisfont l'équation

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}} + \frac{q'}{\left(\rho^2 + (z-b)^2\right)^{1/2}}\right) = 0$$

On peut réécrire cette relation comme

$$\frac{q'}{\left(\rho^2 + (z-b)^2\right)^{1/2}} = -\frac{q}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}}$$

On peut ensuite l'écrire

$$C \equiv \frac{q'}{q} = -\frac{\left(\rho^2 + (z-b)^2\right)^{1/2}}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}} \tag{5}$$

où C est une constante qui reste à déterminer. On voit que la constante C est forcement négative. On peut prendre le carré des membres de cette quation afin de trouver :

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{\rho^2 + (z-b)^2}{\rho^2 + (z-a)^2} \\ &\Rightarrow C^2\left[\rho^2 + (z-a)^2\right] = \rho^2 + (z-b)^2 \\ &\Rightarrow \left(\rho^2 + z^2 - 2za + a^2\right)C^2 = \rho^2 + z^2 - 2zb + b^2 \\ &\Rightarrow \left(1 - C^2\right)\rho^2 + \left(1 - C^2\right)z^2 + 2z\left(aC^2 - b\right) = C^2a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Divisant les deux cotés de cette équation par $(1 - C^2)$, on obtient

$$\rho^2 + z^2 + 2z\frac{(aC^2 - b)}{1 - C^2} = \frac{C^2a^2 - b^2}{1 - C^2} \tag{6}$$

On se rappelle que l'équation pour la surface d'une sphère en coordonnées cylindriques est

$$\rho^2 + z^2 = R^2$$

On voit que cette l'équation (6) est l'équation d'une sphère à condition que :

$$b = aC^2 \tag{7}$$

Dans ce cas, on a

$$\rho^2 + z^2 = \frac{C^2 a^2 - a^2 C^4}{1 - C^2} = C^2 a^2$$

Le potentiel est donc nul sur une sphère de rayon R à condition que :

$$a^2 C^2 = R^2 \tag{8}$$

Nous avons donc que $C^2 = R^2/a^2$. Insérant cette valeur pour C^2 dans la relation (7) nous trouvons :

$$b = aC^2 = a\frac{R^2}{a^2} = \frac{R^2}{a} = R\left(\frac{R}{a}\right) \tag{9}$$

où on remarque que :

$$b < R$$

puisque $a > R$.

On se rappelle que C est une constante négative (voir l'éq.(5)) ce qui donne avec l'équation (8) que :

$$C \equiv \frac{q'}{q} = -\frac{R}{a}$$

donc la valeur de la charge q' est

$$q' = Cq = -\frac{R}{a}q \tag{10}$$

Remarques supplémentaires :

La méthode des images détermine le potentiel à l'extérieur de la sphère. A l'intérieur de la sphère conductrice $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, et $V = cte = 0$. Donc, à l'intérieur de la sphère on a :

$$V(\rho, z) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2} \leq R$$

A l'extérieur de la sphère, c'est-à-dire dans la région où $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \geq R$, le potentiel est simplement celui de deux charges ponctuelles q et q' sur l'axe z aux positions $z = a$ et $z = b$ respectivement. En insérant les relations des éqs.(9) et (10) dans la formule (4), le potentiel à l'extérieur de la sphère s'écrit :

$$V(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left(\rho^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}} - \frac{\frac{R}{a}}{\left(\rho^2 + \left(z - \frac{R^2}{a}\right)^2\right)^{1/2}}\right) \qquad \text{pour} \qquad \left(\rho^2 + z^2\right)^{1/2} \geq R$$

On peut réécrire ce potentiel sous la forme

$$V(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left[\left(\frac{\rho^2 + z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-1/2} - \left(\frac{a^2}{R^2}\frac{\rho^2 + z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + 1\right)^{-1/2}\right]$$

Avec cette expression, il est maintenant aisé à vérifier que $V(\rho, z) = 0$ sur la surface de la sphère, c'est-à-dire pour toute position telle que $\rho^2 + z^2 = R^2$.

Cette vérification nous rassure que nous n'avons pas fait des erreurs de calcul puisque le potentiel doit **toujours** être continu même à l'interface du conducteur.

On aurait pu calculer le champ électrique à partir de l'expression :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}V = -\overrightarrow{\nabla}V$$

et en coordonnées cylindriques l'opérateur "nabla" s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

et le champ électrique à l'extérieur de la sphère s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}}(\rho, z) &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}V = -\overrightarrow{\nabla}V \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left\{\widehat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-1/2} - \left(\frac{a^2}{R^2}\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + 1\right)^{-1/2}\right]\right. \\
&\left.\widehat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-1/2} - \left(\frac{a^2}{R^2}\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + 1\right)^{-1/2}\right]\right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{\rho}{\left(\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}} - \frac{a^2}{R^2}\frac{\rho}{\left(\frac{a^2}{R^2}\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + 1\right)^{3/2}}\right]\widehat{\rho} \\
&+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{z-a}{\left(\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}} - \frac{\frac{a^2}{R^2}z - a}{\left(\frac{a^2}{R^2}\frac{\rho^2+z^2}{R^2} - \frac{2za}{R^2} + 1\right)^{3/2}}\right]\widehat{\mathbf{z}} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Maintenant qu'on connaît le champ électrique, on peut déduire la distribution de charge surfacique comme nous avons fait en TD avec un le conducteur plan avec $V = 0$.

Le champ électrique à la surface de la sphère est

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{surface}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{\rho\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]\widehat{\rho} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{z\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{2za}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]\widehat{z} \qquad (12)$$

On se rappelle que le champ électrique à la surface d'un conducteur en électrostatique est toujours normal à la surface. Le vecteur normal à la surface d'une sphère est $\widehat{\mathbf{r}}$. On peut en déduire que notre résultat sera plus compact en coordonnées sphériques.

On passe donc au système de coordonnées cylindriques au système de coordonnées sphériques. A la surface de la sphère les coordonnées ρ et z s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho &= R\sin\theta \\
z &= R\cos\theta \qquad (13)
\end{aligned}$$

Il faut également trouver les relations entre les vecteurs unitaires. Les relations entre les $\widehat{\rho}$, $\widehat{\phi}$, et $\widehat{\mathbf{z}}$ et les $\widehat{\mathbf{r}}$, $\widehat{\theta}$, $\widehat{\phi}$ sont :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{r}} &= \sin\theta\widehat{\rho} + \cos\theta\widehat{\mathbf{z}} \\
\widehat{\theta} &= \cos\theta\widehat{\rho} - \sin\theta\widehat{\mathbf{z}} \\
\widehat{\phi} &= \widehat{\phi}
\end{aligned}$$

Pour ce problème, nous avons besoin des relations inverses

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho} &= \sin\theta\widehat{\mathbf{r}} + \cos\theta\widehat{\theta} \\
\widehat{\mathbf{z}} &= \cos\theta\widehat{\mathbf{r}} - \sin\theta\widehat{\theta} \\
\widehat{\phi} &= \widehat{\phi}
\end{aligned}$$

Utilisant ces dernières relations pour les vecteur unitaires et les relations dans l'éq.(13), on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{surface}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{R\sin\theta\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]\left(\sin\theta\widehat{\mathbf{r}}+\cos\theta\widehat{\theta}\right) \\
&\qquad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{R\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]\left(\cos\theta\widehat{\mathbf{r}}-\sin\theta\widehat{\theta}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left[\frac{\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]\widehat{\mathbf{r}} \qquad (14)
\end{aligned}$$

Le théorème de Coulomb dit que la charge surfacique d'un conducteur est donné par

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{surface}} \qquad (15)$$

Puisque $\widehat{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{r}}$ pour la sphère, nous obtenons que la charge surfacique est

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R^2}\left[\frac{\left(\frac{a^2}{R^2}-1\right)}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right] \qquad (16)$$

où on remarque que $\sigma(\theta)$ est toujours opposé en signe de q puisque $a/R > 1$.
(On remarque que si notre calcul de $\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{surface}}$ dans l'équation (14) avait eu des composantes tangentielle à la surface, on aurait su que nous avions fait une erreur de calcul.).
Grâce à la formule pour $\sigma(\theta)$ et la différentielle de la surface de la sphère :

$$dS = R^2\sin\theta d\phi d\theta$$

on peut calculer la charge totale sur la surface de la sphère conductrice :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{sphère}} &= \int_S \sigma(\theta)\,dS = \int_0^{\pi} Rd\theta\int_0^{2\pi} R\sin\theta d\phi\,\sigma(\theta) \\
&= \frac{q}{4\pi R^2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\left[\frac{1}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right] \\
&= \frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{\left(1-2\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}} \\
&= \frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(1-2\frac{a}{R}u+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\frac{R}{2a}\int_{\left(1+2\frac{a}{R}+\frac{a^2}{R^2}\right)}^{1-2\frac{a}{R}+\frac{a^2}{R^2}} x^{-3/2}dx = -\frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\frac{R}{2a}\int_{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2}^{\left(1-\frac{a}{R}\right)^2} x^{-3/2}dx \\
&= \frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\frac{R}{a}\,x^{-1/2}\Big|_{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2}^{\left(1-\frac{a}{R}\right)^2} = \frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)\frac{R}{a}\left(\frac{1}{\left|1-\frac{a}{R}\right|}-\frac{1}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right) \qquad (17)
\end{aligned}$$

où nous avons fait un premier changement de variable

$$u = \cos\theta$$
$$du = -\sin\theta d\theta$$

et un deuxième changement de variable :

$$x = 1 - 2\frac{a}{R}u + \frac{a^2}{R^2}$$
$$dx = -2\frac{a}{R}du$$

Puisque par la formulation du problème

$$\frac{a}{R} > 1$$

on peut simplifier encore l'expression de $Q_{\text{sphère}}$ de l'quation (17) :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{sphère}} &= \frac{q}{2}\left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right)\frac{R}{a}\left(\frac{1}{\left|1-\frac{a}{R}\right|} - \frac{1}{\left|1+\frac{a}{R}\right|}\right) \\
&= \frac{q}{2}\left(1-\frac{a}{R}\right)\left(1+\frac{a}{R}\right)\frac{R}{a}\left(-\frac{1}{1-\frac{a}{R}} - \frac{1}{1+\frac{a}{R}}\right) \\
&= -\frac{q}{2}\left(1-\frac{a}{R}\right)\left(1+\frac{a}{R}\right)\frac{R}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{R}} + \frac{1}{1+\frac{a}{R}}\right) \\
&= -q\frac{R}{2a}\left(1+\frac{a}{R}+1-\frac{a}{R}\right) = -q\frac{R}{a}
\end{aligned}$$

Comme on s'y attendait, la charge totale qui s'installe sur la surface de la sphère est exactement égale à q', c.à.d. la valeur de $Q_{\text{sphère}}$ égale à la valeur de la charge "image".

b) Calculer la force entre la sphère et la charge q.

La force sur la charge q est la même qu'une force d'une charge q' sur une charge q :

$$\mathbf{F}_{q'\to q} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\|AM\|^2}\right)\widehat{\mathbf{z}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|a-b|^2}\right)\widehat{\mathbf{z}}$$

Utilisant l'éq.(10), on obtient

$$\mathbf{F}_{q'\to q} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{a}\left(\frac{1}{(a-b)^2}\right)\widehat{\mathbf{z}}$$

et l'équation (9) donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{q'\to q} &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{a}\left(\frac{1}{\left(a-\frac{R^2}{a}\right)^2}\right)\widehat{\mathbf{z}} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{a^3}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{R^2}{a^2}\right)^2}\right)\widehat{\mathbf{z}} \\
&= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Ra}{(a^2-R^2)^2}\right)\widehat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

où nous avons écrit $\mathbf{F}_{q'\to q}$ sous trois formes équivalentes.