Contrôle continu d'électromagnétisme - PEIP

1. (4 pts) On considère une charge $Q_1 = 20\mu$C à la position $\overrightarrow{\mathbf{OP}}_1$ =(0,1,2) et une charge $Q_2 = -300\mu$C à la position $\overrightarrow{\mathbf{OP}}_2$ =(2,0,0)m.

   (a) Calculer la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to 1}$ de la charge 2 sur la charge 1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}}_1 &= \overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{OP}}_2 = (0,1,2) - (2,0,0) = (-2,1,2)\text{m} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}}_1\right\| &= \sqrt{4+1+4} = 3\text{m} \\
\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to 1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 Q_2 \frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}}_1}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}}_1\right\|^3} \\
&= -9\times 10^9 \times 2\times 10^{-5} \times 3\times 10^{-4} \frac{(-2,1,2)}{3^3} \\
&= -2\times(-2,1,2) = (4,-2,-4)\text{N} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to 1}\right\| &= \frac{9\times 2\times 3}{3^2} = 6\text{N} \qquad (1)
\end{aligned}$$

   (b) Calculer la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{1\to 2}$ de la charge 1 sur la charge 2.

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{1\to 2} = -\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to 1} = (-4,2,4)\text{N} \qquad (2)$$

   (c) Écrire le champ électrique de la charge 1 en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{M}} &= \overrightarrow{\mathbf{OM}} - \overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 = (x,y,z) - (0,1,2) = (x, y-1, z-2) \\
\overrightarrow{\mathbf{E}}_1(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{M}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{M}}\right\|^3} \\
&= 9\times 10^9 \times 2\times 10^{-5} \frac{(x,y-1,z-2)}{\left(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right)^{3/2}} \\
&= 18\times 10^4 \frac{(x,y-1,z-2)}{\left(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right)^{3/2}} \text{Vm}^{-1} \qquad (3)
\end{aligned}$$

   Autres notations possibles pour ce résultat sont :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_1(x,y,z) = \frac{18\times 10^4}{(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \text{Vm}^{-1}$$

   ou

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{18\times 10^4}{(x^2+(y-1)^2+(z-2)^2)^{3/2}} \left(x\widehat{\mathbf{x}} + (y-1)\,\widehat{\mathbf{y}} + (z-2)\,\widehat{\mathbf{z}}\right) \text{Vm}^{-1}$$

2. (4 pts) On considère une ligne infinie sur l'axe x ($y = z = 0$) avec une densité linéique de $\lambda = \left(\sqrt{2}/6\right) \times 10^{-8}\text{Cm}^{-1}$. Un plan infini de charge se trouve en $y = 5$m.

   (a) Calculer le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ créé par le fil infini (orienté le long de l'axe Ox) en un point M de l'espace.
   Les coordonnées cylindriques sont appropriées afin d'exprimer le champ créé le fil, mais l'axe Ox est l'axe de symétrie ici. Si on prend l'angle azimutal ϕ d'être mesuré par rapport à l'axe Oy dans ce problème, on obtient :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{fil}}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\phi\widehat{y} + \sin\phi\widehat{z}\right) \tag{4}$$

   où le vecteur radial en coordonnées cylindriques autour de l'axe Ox, $\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}}$, est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{\rho}} &= y\widehat{y} + y\widehat{z} = \rho\cos\phi\widehat{y} + \rho\sin\phi\widehat{z} = \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}} \\ \widehat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\phi\widehat{y} + \sin\phi\widehat{z}\end{aligned}$$

   (b) Trouver le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ créé par le plan infini en un point $M\,(x, y, z)$ quand $y < 5$m.

   Nous avons vu en cours et TD que le champ électrique créé par un plan infini est constant, perpendiculaire au plan, et d'amplitude $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (en faisant appel aux symétries et le théorème de Gauss)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{plan}} = -\widehat{y}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\text{Vm}^{-1} \tag{5}$$

   La densité de charge sur le plan infini est choisie afin que sur la ligne $y = 3$m, $z =$3m, le champ électrique total est orienté sur l'axe z.

   (c) En déduire la densité surfacique du plan.
   Le champ électrique total est la superposition des deux champs en (a) et (b) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}} &= \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{fil}} + \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{plan}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\left(\cos\phi\widehat{y} + \sin\phi\widehat{z}\right) - \widehat{y}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

   Sur la ligne $y = 3$m, $z =$3m, on a

$$\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \qquad\qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 3}\frac{1}{2}\left(\widehat{y} + \widehat{z}\right) - \widehat{y}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

   La condition que $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}$ soit orienté sur z nécessite $E_{\text{tot},y} = 0$, c.-à-d. :

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 3}\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{\lambda}{6\pi} \tag{6}$$

   A.N.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sqrt{2}}{36\pi} = 125 \times 10^{-12}\text{Cm}^{-2} \\ &= 125\,\text{pCm}^{-2}\end{aligned} \tag{7}$$

3. (4 pts) On considère trois charges ponctuelles fixes situées le long de l'axe Ox, $Q_1 = 20\mu$C à l'origine, $Q_2 = 20\mu$C à $x = 1$m, et $Q_3 = -40\mu$C à $x = 2$m.

   (a) Calculer l'énergie électrostatique W_e du système.

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\text{couples}}\frac{Q_iQ_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{1} + \frac{Q_2Q_3}{1} + \frac{Q_1Q_3}{2}\right) \\
&= 9\times 10^9\left(\frac{20\times 10^{-6}\times 20\times 10^{-6}}{1} - \frac{20\times 10^{-6}\times 40\times 10^{-6}}{1} - \frac{20\times 10^{-6}\times 40\times 10^{-6}}{2}\right) \\
&= 9\times 10^{-1}\left(\frac{2\times 2}{1} - \frac{2\times 4}{1} - \frac{2\times 4}{2}\right) = \frac{9}{10}(4-8-4) = -\frac{36}{5}\text{J} = -7,2\text{J} \qquad (8)
\end{aligned}$$

   (b) Calculer le moment dipolaire du système.
   Si on prend l'origine comme la position de la particule 1, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{p}} &= \sum_{j=1}^{3} Q_j\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_j = Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 + Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 + Q_3\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_3 \\
&= \widehat{\boldsymbol{x}}\left(20\times 10^{-6}\times 1 - 40\times 10^{-6}\times 2\right)\text{Cm} \\
&= -60\widehat{\boldsymbol{x}}\mu\text{Cm} \qquad (9)
\end{aligned}$$

4. (4 pts) On considère un condensateur plan (dans le vide) dont les armatures ont les dimensions de 2m×1m et une séparation de 0,5cm. Ils sont portés à une différence de potentiel de 10V.

   (a) Spécifier le champ électrique entre les armatures.
   Si on prend l'axe z d'être perpendiculaire aux armatures et $d = 0,5\times 10^{-2}$m leur distance de séparation, le champ électrique s'écrit $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E_z\widehat{\boldsymbol{z}}$:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{d\ell} &= E_z d = V_1 - V_2 = 10\text{V} \\
\overrightarrow{\boldsymbol{E}} &= \frac{10}{0.5\times 10^{-2}}\widehat{\boldsymbol{z}} = 2\times 10^3\text{Vm}^{-1} \qquad (10)
\end{aligned}$$

   (b) Quelle est la capacité du condensateur (spécifier les unités) ?

$$\begin{aligned}
C &= \frac{S\epsilon_0}{d} = \frac{2}{0.5\times 10^{-2}}\epsilon_0 \\
&= 4\times 10^2\times\epsilon_0 = 400\times 8.84\times 10^{-12}\text{F} = 3,54\times 10^{-9}\text{F} \qquad [\text{Farad}] = [\text{Coulombs.V}^{-1}] \quad (11)
\end{aligned}$$

   (c) Quelle est l'énergie électrostatique W_e du système ?

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}400\times 8.84\times 10^{-12}\times 10^2 \\
&= 2\times 8.84\times 10^{-12}\times 10^4 \\
&= 2\times 8.84\times 10^{-8} = 176.8\times 10^{-9} \\
&= 176.8\text{nJ} \qquad (12)
\end{aligned}$$

5. (4 pts) La densité volumique d'une sphère de rayon a est donnée par $\rho(r) = r^2 C/a^2$ (où C est une constante, $\rho = 0$ à l'extérieur).

   (a) Quelle est la charge totale de la sphère ?

   La charge de la sphère est l'intégrale de la densité de charge volumique, ρ, prise sur tout le volume de la sphère :

$$\begin{aligned} Q_{\text{sphère}} &= \iiint \rho d\mathcal{V} = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^2 C/a^2 \\ &= \frac{4\pi C}{a^2} \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi C}{a^2} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a \\ &= C \frac{4\pi a^3}{5} \end{aligned} \tag{13}$$

   On remarque qu'on peut déduire de $\rho(r) = r^2 C/a^2$ que la constante C doit avoir les dimensions de densité volumique, donc $Q_{\text{sphère}}$ a les dimensions de Coulombs comme il se doit.

   (b) Déterminer le champ électrique dans la région $r < a$.

   La densité de charge possède une symétrie sphérique. Les symétries et les invariances de ce problème nous imposent que pour un système de coordonnées sphériques centrée sur la sphère, le champ électrique soit radial partout (c.à.d. toujours dans la direction $\widehat{\boldsymbol{r}} = \widehat{\boldsymbol{u}}_r$), et quelle ne dépend ni du coordonnée θ, ni du coordonnée ϕ, c.à.d. $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) = \widehat{\boldsymbol{r}} E_r(r)$. Puisque on connait l'orientation du champ, on peut utiliser le théorème de Gauss afin de déterminer sa dépendance sur r. On se rappel que la différentielle de surface orientée d'une surface r=cte, est : $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$.

   D'abord, on calcul le flux du champ électrique à travers une surface sphérique centrée :

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi E_r(r) \widehat{\boldsymbol{r}} \cdot \widehat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = E_r(r) r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 E_r(r)$$

   Ceci est la version détaillé du calcul, mais on aurait pu écrire tout de suite :

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = E_r(r) \iint_{\text{sphère de rayon } r} dS = 4\pi r^2 E_r(r) \tag{14}$$

   puisque le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ est colinéaire a $\overrightarrow{d\boldsymbol{S}}$ et on sait de mémoire que la surface d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$. On se rappel que le théorème de Gauss s'exprime :

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{15}$$

   où Q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface fermée, S, de Gauss.

   Le resultat de l'éq.(14) est vrai pour tout valeur de r, il nous reste à déterminer Q_{int} à l'intérieur d'une surface sphérique de rayon r.

   Pour $r < a$, on fait comme dans le problème (a), mais la limite d'intégration radiale est r, et la charge à l'intérieur d'une sphçre de rayon r est :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^2 C/a^2 = \frac{4\pi C}{a^2} \frac{r^5}{5}$$

   et le théorème de Gauss devient :

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_r &= \frac{4\pi C}{a^2} \frac{r^5}{5\epsilon_0} \\ \Rightarrow E_r(r) &= \frac{C}{5a^2\epsilon_0} r^3 \qquad\qquad r < a \end{aligned} \tag{16}$$

(c) Déterminer le champ électrique dans la région $r > a$.
Pour $r > a$, la charge à l'intérieur de la surface r est simplement la charge totale de la sphère trouvée en (a) et le théorème de Gauss donne :

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{sphère}}}{\epsilon_0} = C\frac{4\pi a^3}{5\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_r(r) = C\frac{a^3}{5\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad r > a \tag{17}$$

En résumé, le champ électrique est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{Cr^3}{5a^2\epsilon_0} & r < a \\ \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{Ca^3}{5\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases} \tag{18}$$

On remarque que le champ électrique est continu à la surface ($r = a$) puisque il n'y a pas de charge surfacique dans ce problème.

(d) Spécifier le potentiel électrique comme une fonction de r.
Puisque on connait le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$, on peut calculer les différences de potentiel avec la formule

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} \tag{19}$$

et le fait qu'en coordonnées sphériques $\widehat{\boldsymbol{r}}E_r(r) \cdot \overrightarrow{d\ell} = E_r(r)dr$ (puisque $\overrightarrow{d\ell} = \widehat{\boldsymbol{r}}dr + \widehat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta + \widehat{\boldsymbol{\phi}}r\sin\theta d\phi$)
On commence par déterminer le potentiel dans la région $r > a$, puisque on sait par convention que $V(\infty) = 0$.

$$\begin{aligned} V(r) = V(r) - V(\infty) &= \int_r^\infty \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_r^\infty C\frac{a^3}{5\epsilon_0 r^2}dr \qquad r > a \\ &= \frac{Ca^3}{5\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Ca^3}{5\epsilon_0}\frac{1}{r} \end{aligned} \tag{20}$$

A la surface de la sphère $r = a$, on a :

$$V(a) = \frac{Ca^3}{5\epsilon_0}\frac{1}{a} = \frac{Ca^2}{5\epsilon_0}$$

Puisque on connait maintenant $V(a)$, on peut maintenant calculer $V(r)$ à l'intérieur de la sphère avec la formule de l'éq.(19) de nouveau :

$$\begin{aligned} V(r) - V(a) &= \int_r^a \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_r^a \frac{C}{5a^2\epsilon_0}r^3 dr \qquad r < a \\ &= \frac{C}{5a^2\epsilon_0}\int_r^a r^3 dr = \frac{C}{5a^2\epsilon_0}\frac{1}{4}\left(a^4 - r^4\right) \\ &= \frac{C}{20a^2\epsilon_0}a^4 - \frac{C}{20a^2\epsilon_0}r^4 \end{aligned}$$

Donc le potentiel pour $r < a$ est :

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{C}{20a^2\epsilon_0}r^4 + \frac{C}{20a^2\epsilon_0}a^4 + V(a) \\ &= -\frac{C}{20a^2\epsilon_0}r^4 + \frac{C}{20a^2\epsilon_0}a^4 + \frac{4Ca^2}{20\epsilon_0} \\ &= \frac{C}{20\epsilon_0}\left[5a^2 - \frac{r^4}{a^2}\right] \qquad r < a \end{aligned} \tag{21}$$

En résumé, le potentiel électrique est :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{C}{20\epsilon_0}\left[5a^2 - \frac{r^4}{a^2}\right] & r < a \\ \frac{Ca^3}{5\epsilon_0}\frac{1}{r} & r > a \end{cases}$$

Le potentiel $V(r)$ est une fonction continue en r comme il se doit, puisque le potentiel est toujours une fonction continue de la position.