Méthode des images et influence totale

On dit que deux objets ou surfaces sont en *influence totale* si toute ligne de champ issue de l'un des objets (appelé objet 1) aboutit sur l'autre objet (appelé objet 2). Le théorème de Gauss implique alors que la charge totale sur deux objets en influence totale est nulle. Donc, si l'objet 1 porte une charge Q , l'objet 2 porte une charge $-Q$.

I Influence d'une charge ponctuelle sur un plan conducteur

Une charge ponctuelle q est placée à une distance a proche d'un plan conducteur relié à la terre.

1° Montrer que le potentiel créé dans le demi espace du côté de la charge est le même que celui résultant de la présence d'une charge $-q$ symétrique de q par rapport au plan.

Dans un repère orthonormé cartésien, on considère le plan conducteur confondu avec le plan xOy, i.e. d'équation $z = 0$, et la position de la charge q désignée par $A = (0, 0, a)$. Le demi-espace du côté de la charge satisfait donc l'équation $z > 0$. La position, B, de la charge $-q$ symétrique par rapport au plan du conducteur est donc $B = (0, 0, -a)$.

Puisque la position A (de la charge q) est proche du plan conducteur, on peut faire l'approximation qu'il s'agit d'un plan conducteur infini.

Le potentiel en un point M, créé par les 2 charges (le plan conducteur étant enlevé) est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right)$$

$V(M) = 0$ quand $AM = BM$, c'est à dire en tout point du plan médiateur de AB. Ce plan est donc une équipotentielle de $V = 0$ Volts. Si donc on rétablit cette équipotentielle, i.e. si on remet le conducteur et on le relie à la terre, et si on enlève la charge image $-q$, on ne change rien au dessus du plan tant en ce qui concerne les valeurs du champ électrique et celles du potentiel car les conditions limites au plan médiateur sont les mêmes. Cette technique pour trouver le potentiel (et donc le champ électrique) créé par des charges proche d'un plan conducteur s'appelle la *méthode des images*, et la charge $-q$ la *charge image* de la charge q (voir : Feynman 6-7,6-8 : Perez problème 8-8). On peut également employer cette technique pour trouver le champ produit par des charges à l'extérieur d'un conducteur sphérique (Voir Feynman 6-9).

2° Calculer le champ électrique

Le champ électrique est nul pour $z < 0$. Pour $z > 0$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\mathbf{x})$

$$\mathbf{E}(M) = -\left.\overrightarrow{\text{grad}}\, V\right|_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{AM}}{AM^3} - \frac{\mathbf{BM}}{BM^3}\right) \tag{1}$$

Si $\|\mathbf{BA}\|$ est petit devant les longueurs $\|\mathbf{AM}\|$ et $\|\mathbf{BM}\|$, le champ électrique est approximativement celui d'un dipole.

3° En déduire la charge surfacique σ en tout point M du plan conducteur. Calculer sa charge totale. Y-a-t-il influence totale entre q et le conducteur ?

En tout point M infiniment voisin du plan, le champ est normal au plan et son intensité, d'après le théorème de Coulomb est égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{z}} \tag{2}$$

Le champ créé en un même point M (du plan $z = 0$) par les 2 charges $+q$ et $-q$ est $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}_{-q}(M) + \mathbf{E}_{+q}(M)$:

$$\|\mathbf{E}(M)\| = 2\|\mathbf{E}_q\| \sin\alpha = 2\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (AM)^2}\frac{a}{AM} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(M) = -\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{z}} \tag{4}$$

où $\sin\alpha \equiv \frac{a}{AM}$.

D'après ce qui précède, le champ créé par la charge q et le conducteur plan en $z > 0$ est le même que celui créé par un système symétrique de deux charges q et $-q$, et par suite des équations (2) et (4), on obtient

$$\frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\widehat{\mathbf{z}} = \mathbf{E}(M) = -\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}\widehat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

d'où

$$\sigma(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi}\left(a^2+\rho^2\right)^{-3/2} \tag{6}$$

Pour calculer la charge totale Q_t répartie sur le plan, il suffit de calculer $Q_\mathrm{t} = \iint_S \sigma ds$.

Comme surface élémentaire dS on peut prendre l'aire comprise entre les cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$ soit $2\pi\rho d\rho$. Cette aire porte la charge $2\pi\sigma\rho d\rho$

$$Q_\mathrm{t} = -\frac{2aq}{4\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi\rho d\rho}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{7}$$

Avec un changement de variables $u^2 = a^2 + \rho^2$, $udu = \rho d\rho$

$$Q_\mathrm{t} = -aq\int_a^\infty \frac{udu}{u^3} = -aq\int_a^\infty \left[-\frac{1}{u}\right]_0^\infty = -q \tag{8}$$

Puisque $Q_\mathrm{t} = -q$, il y a bien influence totale entre la charge q et le conducteur.

4° Quelle est la force exercée par le plan sur la charge ponctuelle (faire le calcul à partir de l'expression de σ puis en utilisant le résultat du 1).

La couronne dS précédente exerce sur q la force

$$dF_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma dS}{a^2+\rho^2}\sin\alpha \qquad dS = 2\pi\rho d\rho$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{(a^2+\rho^2)^{1/2}} \tag{9}$$

par suite

$$
\begin{aligned}
F_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{dS}{(a^2+\rho^2)}\sigma\sin\alpha \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \left\{\frac{2\pi\rho d\rho}{(a^2+\rho^2)}\right\}\left\{\frac{2aq}{4\pi}\frac{1}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}\right\}\left\{\frac{a}{(a^2+\rho^2)^{1/2}}\right\} \\
&= -\frac{a^2q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(a^2+\rho^2)^3} = -\frac{a^2q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_a^\infty \frac{du}{u^5} \\
&= \frac{a^2q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{4u^4}\right]_a^\infty = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2}\widehat{\mathbf{z}} \qquad (11)
$$

C'est la même force que celle exercée par une charge $-q$ sur $+q$ séparées de $2a$.

$$
\textbf{A.N.} \qquad q = 10^{-6}\,\mathrm{C} \qquad a = 10\,\mathrm{cm} \qquad (12)
$$

$$
\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} \qquad \left\|\overrightarrow{F}\right\| = \frac{9 10^{-12} 10^{16}}{10^7}\frac{1}{4 10^{-2}} = \frac{9}{40}\mathrm{N} = 0.225\,\mathrm{N} \qquad (13)
$$