Electricité et magnétisme - TD n°1
Loi de Coulomb

1. **Force électrique**

   Calculer le rapport entre force gravitationnelle et électrique entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. Soit a_0 la distance entre le proton et l'électron ($a_0 \simeq 0,53 \times 10^{-10} m$).

   $$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{SI}, [Nkg^{-2}\mathrm{m}^2] \qquad m_p \simeq 1,672 \times 10^{-27} kg \qquad m_e \simeq 0,91 \times 10^{-30} kg$$

   $$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \mathrm{SI} \qquad q_e = 1,6 \times 10^{-19} C$$

2. Deux boules de liège identiques de masse m et charge q pendent d'un plafond par des fils de longueur identique l. La distance entre les points d'attache au plafond est d. Soit θ l'angle entre les fils et la verticale. Trouver une relation entre θ, l, d, m. Comment peut-on utiliser cette relation pour vérifier la loi de Coulomb ?

3. La différence de potentiel entre deux plaques parallèles est $\Delta V = 100\mathrm{V}$, leur séparation $d = 1\mathrm{cm}$, leur longueur $L = 2\mathrm{cm}$. Un électron est projeté avec une vitesse $v_0 = 10^7 \mathrm{m\,s^{-1}}$ entre les plaques au sens de leur longueur.

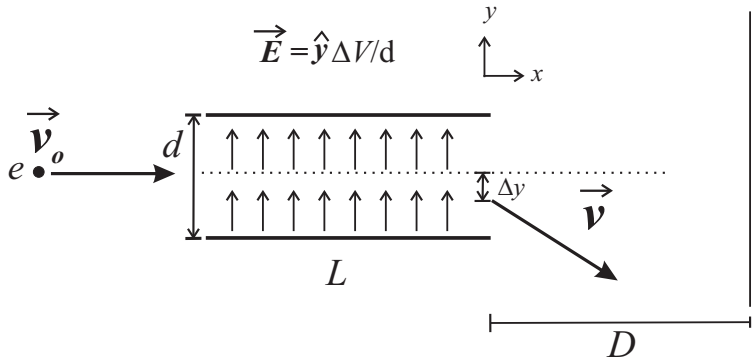

FIG. 1 – *Déviation d'un électron par un champ électrostatique*

   (a) Trouver sa déviation transverse, Δy, et sa vitesse transverse, v_y, quand il émerge des plaques.

   (b) Un écran est placé a $D = 0,5\,\mathrm{m}$ du bord final des plaques et perpendiculairement à la vitesse initiale. Trouver la position de l'impacte de l'électron sur l'écran.

4. **Expérience de Millikan**

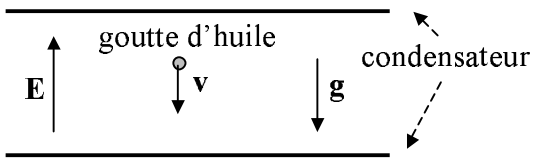

FIG. 2 – *Expérience de Millikan*

   Des gouttelettes d'huile sont pulvérisées dans un condensateur à l'intérieur duquel le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est constant. Une gouttelette se déplace à une vitesse constante v par effet de la gravité, du champ et de la friction visqueuse (voir figure 2).

(a) Exprimer le rayon r de la goutte en fonction de la vitesse limite v_0 qu'elle atteint lorsque le champ électrique est nul. On supposera que la force de frottement est $F_f = -6\pi\eta r v$, où $\eta = 1,8.10^{-5}$ Pa.s est la viscosité de l'air. (La masse volumique de l'huile est $\rho_h = 1,05.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et celle de l'air $\rho_a = 1,2\,\mathrm{kg.m^{-3}}$). **A.N.** Vitesse limite : $v_0 = 0,392\,\mathrm{mm.s^{-1}}$.

(b) On applique un champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ (colinéaire à la gravité) jusqu'à ce que la gouttelette se trouve à l'arrêt. Calculer la charge d'une gouttelette en fonction du champ électrique et de la vitesse limite à champ nul, v_0. **A.N.** : $E = \left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}\right\| = 482\,\mathrm{kV.m^{-1}}$.

5. **Coordonnées cylindriques et sphériques**

Soit (O, x, y, z) un repère en coordonnées cartésiennes, de vecteurs de base $\widehat{\mathbf{x}}$, $\widehat{\mathbf{y}}$, $\widehat{\mathbf{z}}$, et (O, r, ϕ, z) un repère en coordonnées cylindriques de vecteurs de base $\widehat{\mathbf{u}}_\rho$, $\widehat{\mathbf{u}}_\phi$, $\widehat{\mathbf{z}}$.

(a) Exprimer x et y en fonction de ρ et ϕ

(b) Exprimer $\widehat{\mathbf{u}}_\rho$ et $\widehat{\mathbf{u}}_\phi$ dans la base $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}})$.

(c) Donner l'expression du volume élémentaire dV en coordonnées cylindriques.

(d) Reprendre les questions (a) à (c) pour un repère (O, r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques, de vecteurs de base $\widehat{\mathbf{u}}_r$, $\widehat{\mathbf{u}}_\theta$, $\widehat{\mathbf{u}}_\phi$.

6. **Calotte sphérique chargée**

Soit une calotte sphérique chargée, de centre O, et d'axe de symétrie (Oz). Le rayon de la sphère est R, et le disque fermant la calotte est vu depuis O sous un angle θ_0 (figure 3). Calculer la charge totale de la calotte dans le cas où :

(a) la charge est répartie uniformément en volume avec une densité ρ_0.

(b) la charge est répartie uniformément en surface, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte, avec une densité σ_0.

(c) la charge est répartie en surface avec densité $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte (θ est la colatitude, en coordonnées sphérique).

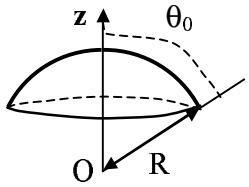

FIG. 3 – *Calotte sphérique chargée*

7. Un noyau d'uranium (92 protons) se désintègre en émettant une particule alpha, c-a-d un noyau d'hélium (2 protons et 2 neutrons). On suppose que la particule alpha est initialement au repos a une distance $d = 8,5 \times 10^{-15}$m du centre du noyau de Thorium (90 protons).

(a) Calculer l'accélération initiale et l'énergie de la particule alpha

(b) Calculer l'énergie et vitesse quand la particule alpha est très loin du Thorium.

8. Deux charges positives identiques sont fixées sur l'axe Oz en $z = a$ et $z = -a$. Calculer leur potentiel sur un point M dans le plan $x0y$ à une distance ρ de l'axe Oz, en déduire le champ électrique dans ce plan.

Electricité et magnétisme - TD n°2
Champ électrique créé par des distributions de charges données

1. **Charge linéique**

   On considère un fil rectiligne portant une densité de charge uniforme λ.

   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?

   (b) Déterminer le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ créé en un point M situé à une distance ρ de la ligne.
   - A partir de l'expression intégrale du champ électrostatique de Coulomb.
   - En utilisant le théorème de Gauss.

   (c) En déduire le potentiel $V(\rho)$ au point M.

2. **Sphère chargée**

   Soit une sphère de rayon R portant une densité volumique de charge uniforme ρ.

   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?

   (b) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon R. En déduire le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace.

   (c) Tracer les graphes $||\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})||$ et $V(r)$.

   (d) Reprendre les questions dans le cas d'une sphère chargée avec une densité surfacique σ uniforme.

3. **Charge surfacique portée par un plan**

   On considère un plan (P) infini portant une densité surfacique de charges uniforme σ (figure 1a).

   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?

   (b) En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ à une distance h de part et d'autre du plan (P).

   (c) Exprimer la discontinuité du champ à la traversée du plan en fonction de σ et ϵ_0.

   (d) Tracer le graphe $E_z(z)$.

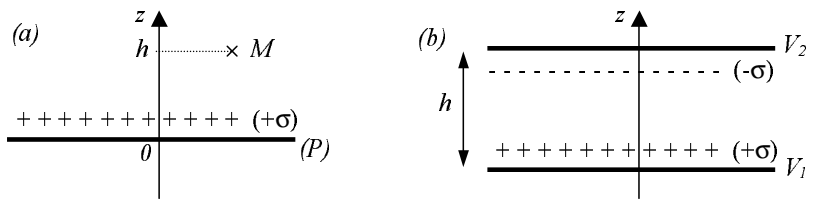

FIG. 1 – *a)1 plan chargé. b)Deux plans chargés*

4. **Deux plans chargés**

   Soient deux plans parallèles, situés à une distance h l'un de l'autre. Ils sont chargés avec des densités surfaciques de charge σ pour l'un et $-\sigma$ pour l'autre (figure 1 b).

   (a) En exploitant la symétrie du problème et en utilisant l'équation de Laplace, calculer le potentiel V, en tout point situé entre les deux plans, en fonction de h et de leurs potentiels V_1 et V_2.

   (b) Donner l'expression vectorielle du champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ en utilisant $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(V)$.

   (c) Trouver une autre expression du champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ entre les 2 plans en utilisant le théorème de superposition et les résultats de l'exercice 3.

   (d) En déduire l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux plans chargés.

5. **Disque chargé**

   On considère un disque de rayon R_0, d'axe (Ox), chargé avec une densité de charge uniforme σ.

   (a) Calculez le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'axe du disque. En déduire le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x)$.

   (b) On suppose que R_0 devient grand devant x. Que devient alors $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x)$? Pouvait-on prédire ce résultat d'une autre façon ?

   (c) On considère maintenant un plan percé d'un disque de rayon R_0 et uniformément chargé avec une densité de charge σ. Calculez le champ électrostatique créé sur l'axe du disque.

6. **Capacité d'un câble coaxial**

   Un câble coaxial est formé de deux cylindres conducteurs concentriques de longueur l. Le cylindre extérieur, creux, de rayon intérieur b, est chargé avec une charge $+Q$. Le cylindre intérieur, plein, de rayon $a < b$, est chargé avec $-Q$. On supposera que $l >> b$.

   (a) Calculez le champ électrique créé en un point quelconque. En déduire le potentiel électrostatique.

   (b) Calculez la capacité $C = Q/V$. Application numérique avec $a = 1\,\text{mm}$, $b = 3\,\text{mm}$, et $l = 1\,\text{m}$.

Electricité et magnétisme - TD n°3
Energie électrostatique

1. **Charge traversant un potentiel**

   Quelles sont l'énergie cinétique en Joules et la vitesse en m/s d'un noyau de oxygène ^{16}O (8 protons, 8 neutrons) après une accélération par une différence de potentiel de 10^7 V ?

2. **Energie d'un dipôle**

   Un dipôle peut être modélisé par deux charges ponctuelles q et $-q$ séparées d'une distance a. La quantité $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ est appelée moment dipolaire.

   (a) Déterminer l'énergie propre U_0 du dipôle en supposant que, la position de la charge $+q$ étant fixée, on approche la charge $-q$ depuis l'infini jusqu'à la distance a.

3. **Moment dipôlaire**

   Soit un triangle équilatéral de coté l. On place sur ses sommets une charge positive $2q$ et deux charges négatives $-q$.

   (a) Calculer son moment dipolaire électrique.

   (b) Déterminer l'énergie propre, U_0, de ce dipôle

   (c) Quelle est la valeur absolue maximale de la force que ce dipôle exerce sur une charge q placé à une distance de $1000l$ du dipôle ?

4. **Energie d'un cristal**

   Considérer un «cristal» formé d'une chaîne infini de charges (ions) $(+q)$ et $(-q)$ alternées, séparées par une distance a (voir figure 1).

   (a) Déterminer l'énergie nécessaire afin de retirer un ion de ce «cristal».

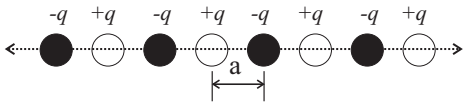

FIG. 1 – *Cristal linéaire.*

5. **Dipôle dans un champ uniforme**

Un dipôle est plongé dans un champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ uniforme. Son moment dipolaire $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ fait un angle β avec $\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ (voir figure 2).

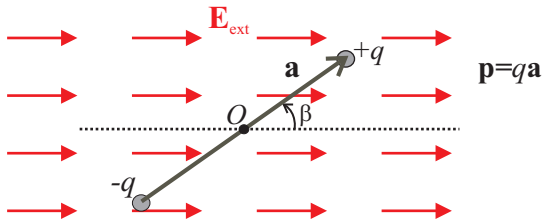

FIG. 2 – *Dipôle dans un champ extérieur uniforme.*

(a) Calculer la force totale exercée sur le dipôle.

(b) Calculer le moment $\overrightarrow{\mathbf{\Gamma}}$ des forces exercées sur le dipôle. Quelle est la position d'équilibre dans le champ extérieur ?

(c) En déduire le travail qu'il faut fournir au dipôle pour le faire tourner d'un angle β à partir de sa position d'équilibre. Exprimer alors l'énergie d'interaction U (énergie potentielle) avec le champ environnant.

(d) Pour quelles valeurs de β cette énergie est-elle extrémale ?

(e) Expliquer quelle est l'action des forces si le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ est central ?

Electricité et magnétisme - TD n°4
Champs électriques créés par des conducteurs à l'équilibre

1. **Sphères conductrices chargées et effet de pointe**

   Une sphère S_1, parfaitement conductrice, de rayon $R_1 = 9\text{cm}$, porte une charge Q_1 ; elle est placée dans le vide.

   (a) Quelle est la distribution de charges ?

   (b) Donner le champ créé dans tout l'espace par cette distribution de charges. En déduire le potentiel dans tout l'espace.

   (c) Exprimer le champ à la surface de la sphère S_1 en fonction de Q_1, R_1 et ϵ_0 puis avec σ, densité surfacique de charges, et ϵ_0.

   Une deuxième sphère conductrice, S_2, de rayon $R_2 = 3\text{cm}$, initialement neutre, est maintenant reliée par un fil conducteur long et fin à la sphère S_1 précédente (figure 1). On supposera que le fil ne porte aucune charge et que les effets d'influence d'une sphère sur l'autre sont négligeables. Après connexion, les charges des deux sphères sont notées respectivement Q'_1 et Q'_2.

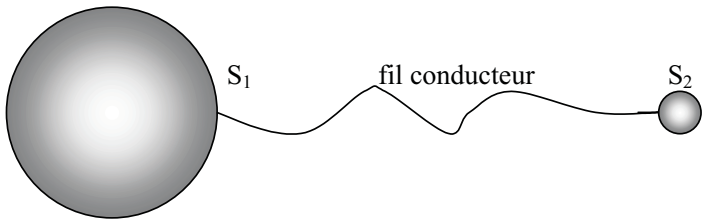

FIG. 1 – *Deux sphères conductrices reliées*

   (d) Exprimer Q'_1 et Q'_2 en fonction de R_1, R_2 et de Q_1.

   (e) Calculer les champs $\overrightarrow{\mathbf{E}}_1$ et $\overrightarrow{\mathbf{E}}_2$ à la surface des deux sphères ; en déduire une relation entre le rapport $||\overrightarrow{\mathbf{E}}_1||/||\overrightarrow{\mathbf{E}}_2||$ et le rapport R_1/R_2. Faire l'application numérique, que conclure ?

2. **Sphères concentriques**

   (a) On considère une sphère conductrice pleine, de rayon R_1, portée au potentiel V_1. Calculer la charge Q_1 portée par la sphère. Spécifier la distribution de cette charge.

   (b) En gardant la sphère 1 au même potentiel, on la place au centre d'une deuxième sphère conductrice, creuse, de rayon intérieur R_2 et extérieur $R_2 + d$, portée au potentiel $V_2 = 0$. On note Q_1 et Q_2 les charges portées par chacune des sphères.

      i. Déterminer le champ électrique dans tout l'espace, en fonction de Q_1 et Q_2. En déduire le potentiel partout.

      ii. Quel est le lien entre Q_1 et Q_2 ?

      iii. Quelle est la charge sur la surface extérieure de la deuxième sphère ?

      iv. Calculer la capacité de ce système.

   (c) Reprendre cet exercice avec la sphère 2 électriquement neutre ($Q_2 = 0$) et électriquement isolée (isolée à la fois de la sphère 1 et de la terre).

      i. Déterminer le champ électrique dans tout l'espace, en fonction de Q_1. En déduire le potentiel partout.

      ii. Quelle est la charge sur la surface extérieure de la deuxième sphère ?

      iii. Calculer la capacité de ce système.

   (d) Calculer l'énergie électrostatique des trois systèmes ((a), (b) et (c)) grâce à la formule :

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma(P)\, V(P)\, dS_P$$

   (e) Calculer l'énergie électrostatique des trois systèmes ((a), (b) et (c)) en utilisant à la formule :

$$\varepsilon_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int \left\|\overrightarrow{\mathbf{E}}(P)\right\|^2 d\mathcal{V}_P$$

   (f) Imaginer que la sphère de la partie (a) a une charge q. Le travail nécessaire afin d'amener une charge additionnelle dq est

$$dW = \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

   Calculer le travail total nécessaire afin de charger la sphère à une charge Q_1. (Pouvez-vous généraliser cette étude aux cas (b) et (c) ?)

Electricité et magnétisme - TD n°5
Diélectriques et Conducteurs

1. **Permittivité -** Le permittivité du diamant vaut $5\,10^{-11}$ F m^{-1}. Calculer sa constante diélectrique et sa susceptibilité.

2. **Milieux diélectrique -** Considérer une boule conductrice de rayon R dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ_m. La boule porte une charge Q. Calculer le champ électrique partout dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Calculer le potentiel électrique partout en prenant un point de référence à l'infini.

3. **Densité de courant - vitesse des porteurs**

   Le cuivre, qui est un bon conducteur du courant électrique, possède 1 électron libre par atome ; sa densité volumique de charge ρ vaut $1,36.10^{10}$ C.m^{-3}. Un fil de cuivre de section $s = 1\,\text{mm}^2$ est parcouru par un courant $I = 10\,\text{A}$. Calculer la densité de courant j et la vitesse moyenne des porteurs.

4. **Résistance ohmique**

   Un conducteur filaire de longueur l, de section S, est soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre ses extrémités.

   (a) En appelant $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ le vecteur densité de courant, montrer que, en régime permanent, le flux de $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ est conservateur.

   (b) Calculer la résistance R de cette portion de fil de conductivité γ.

5. **Résistance de fuite**

   L'âme de rayon $R_1 = 1\,\text{cm}$ d'un câble coaxial et sa gaine extérieure de rayon $R_2 = 2\,\text{cm}$ sont séparés par un isolant imparfait de conductivité $\gamma = 10^{-22}\,\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$.

   (a) Calculer la résistance de fuite R_f de ce câble.

   (b) En déduire le courant de déperdition latérale d'un kilomètre de câble soumis à une différence de potentiel de 1000 volts.

Electricité et magnétisme - TD n°6

Force de Lorentz : $\overrightarrow{\mathbf{F}} = q\left(\overrightarrow{\mathbf{E}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{B}}\right)$

1. **Rappels : Produit vectoriel**

   On considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{\mathbf{d}}$, dont les coordonnées cartésiennes sont : $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (-u, 0, u)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (u, 0, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{c}} = (2u, -u, u)$, $\overrightarrow{\mathbf{d}} = (-u, 0, 0)$.

   (a) Calculer les produits vectoriels : $\overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{c}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{d}}$.

   (b) Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{d}}$. Même chose pour les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

   (c) Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. Même chose pour celui formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{c}}$.

   (d) Est-ce que $\overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge (\overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{c}})$ est égale à $(\overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{b}}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{c}}$? Calculer également les produits mixtes : $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{b}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{c}})$ et $(\overrightarrow{\mathbf{a}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{b}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{c}}$.

2. **Force de Lorentz : Fréquence de cyclotron** -

   Des électrons avec vitesse de 10^6 m/s entrent dans une région avec un champ magnétique uniforme. Ils suivent une trajectoire circulaire de rayon 10 cm.

   (a) Quel est la vitesse angulaire de l'électron ?

   (b) Quel est le champ magnétique ?

3. **Force de Lorentz : Séparation d'isotopes** -

   Une façon de séparer les isotopes ^{235}U et ^{238}U d'uranium (92 protons) était basée sur la différence de rayons de leurs trajectoires dans un champ magnétique. On suppose que les atomes, une fois ionisés, partent d'une source commune et bougent perpendiculairement au champ. Trouver la séparation spatiale maximale des faisceaux avec un rayon de 0,5 m pour le ^{235}U dans un champ de 1,5 Tesla si :

   (a) les isotopes ont la même vitesse

   (b) les isotopes ont la même énergie.

4. **Effet Hall**

L'effet Hall, découvert en 1880, est lié à l'apparition d'une différence de potentiel (i.e. d'un champ électrique) quand un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ est appliqué perpendiculairement à un conducteur parcouru par un courant $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ (figure 1).

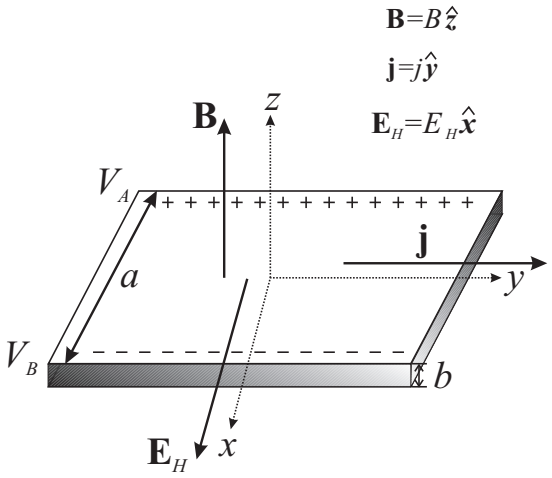

FIG. 1 – *Effet Hall*

(a) Calculer le champ de Hall à partir de la condition d'annulation de la force de Lorentz sur un électron du conducteur (condition d'équilibre).

(b) Déterminer la constante de Hall A_H en fonction du nombre de porteurs (n densité volumiques des porteurs) ; par définition on écrit $\overrightarrow{\mathbf{E}} = A_H \overrightarrow{\mathbf{B}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{j}}$ .La relation entre la densité des porteurs n et la densité volumique de courant $\mathbf{j}$:

(c) Application numérique (figure 1) : sur une sonde à arséniure d'indium InAs on applique un champ magnétique de $B = 37\,\mathrm{mT}$, et on mesure un courant $I = 150\,\mathrm{mA}$, pour une différence de potentiel de $V = 4,7\,\mathrm{mV}$ (épaisseur $b = 0,12\,\mathrm{mm}$), calculer la constante de Hall et le nombre de porteurs par unité de volume.

Electricité et magnétisme - TD n°7
Calcul de champs magnétiques

1. **Aspects mathématiques**

   (a) Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour un champ scalaire f arbitraire.

   (b) Calculer la divergence du champ vecteur suivant (coordonnées cartésiennes) :

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(M) = C\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)},\ \frac{x}{(x^2+y^2)},\ 0\right)$$

   (c) Ecrire le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ de b) en coordonnées cylindriques.

   (d) Calculer sa divergence en coordonnées cylindriques en utilisant la formule (coordonnées cylindriques)

$$\text{div}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   (e) Quelle conclusions en tirez-vous sur le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$?

2. **Spire parcourue par un courant**

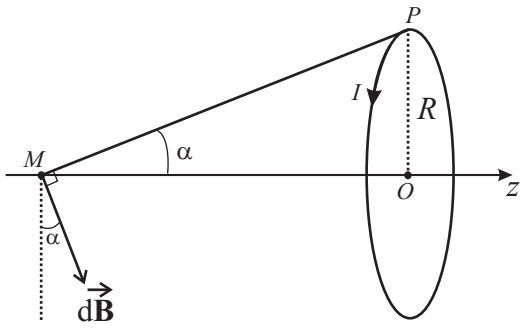

FIG. 1 – *Spire parcourue par un courant*

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I (figure 1). Déterminer le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en un point M de son axe Oz, d'abord en fonction de l'angle α sous lequel est vue la spire du point M, puis en fonction de l'abscisse z du point M. Quelle est la valeur du champ au centre de la spire ? Tracer les variations de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en fonction de z.

3. **Condition de Helmholtz**

Considérer deux cercles de rayon a à une distance $2b$. L'axe (Oz) passant par les deux centres est orthogonal aux plans des cercles. Les cercles portent des courant identiques et dans le même sens. Calculer le champ magnétique $B(z)$ sur l'axe des z.

   (a) Montrer que $dB/dz = 0$ à mi-chemin entre les spires.

   (b) Pour quelle valeur de b, la 2ème dérivée aussi s'annulle-t-elle au milieu ?

4. **Conducteur cylindrique**

Un conducteur cylindrique plein infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I.

(a) Etablir l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ créé par ce conducteur à une distance ρ dans les deux cas suivants : $\rho > a$ et $\rho < a$. Tracer les variations de $||\overrightarrow{\mathbf{B}}||$ en fonction de ρ.

Le même courant I circule dans un conducteur cylindrique creux de rayons intérieur b et extérieur c.

(b) Etablir l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ créé par ce conducteur dans les trois cas suivants : $\rho < b$, $b < \rho < c$ et $\rho > c$. Tracer les variations de $||\overrightarrow{\mathbf{B}}||$ en fonction de ρ.

5. **Solénoïde**

Un solénoïde est un circuit constitué de spires jointives (mais isolées) faites d'un conducteur de section très faible, enroulées sur un cylindre. Soit l la longueur du cylindre, R le rayon de sa section circulaire et N le nombre total de spires parcourues par un courant constant I. L'axe du solénoïde est orienté dans le sens du courant (règle de la tire bouchon). On adoptera l'approximation d'une spire infinie (c.-à.-d. $R \ll l$)

(a) Expliquer pourquoi le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ est parallèlle à l'axe du solénoïde partout (symétrie).

(b) A partir de a) et le théorème d'Ampère, argumenter que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}}$, soit constant.

(c) Montrer que $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ à l'extérieur du solénoïde soit constant et argumenter que $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

(d) Utiliser le théorème d'Ampère afin d'en déduire la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}}$.

(e) Vérifier que les *relations de passage* magnétiques sont satifaites dans ce problème et donner l'expression du courant surfacique, $\overrightarrow{\mathbf{j}}_s$.

6. **Bobine torique**

Une bobine torique est constituée par N spires régulièrement enroulées sur un tore à section circulaire (figure 2). On s'intéresse à la valeur du champ dans le plan (Oxy).

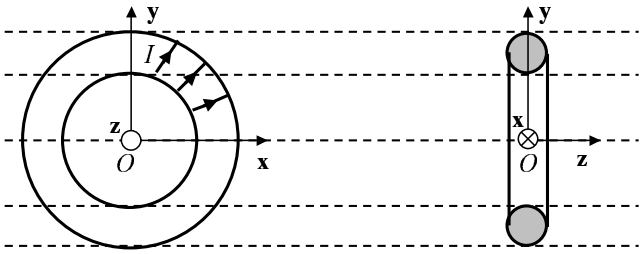

FIG. 2 – *Bobine torique*

(a) Quelle est la valeur du champ en un point situé à la distance r du centre de la bobine ?

(b) Montrer que supposer que le rayon de la bobine est beaucoup plus grand que le rayon de la section du tore revient à dire qu'on peut assimiler la bobine à un solénoïde infini.

Electricité et magnétisme - TD n° 8
Force de Laplace

1. **Force de Laplace entre deux fils**

   On considère deux fils conducteurs infinis parallèles et séparés par une distance d (figure 1). Les fils sont parcourus par un courant uniforme d'intensité I_1 pour le premier et I_2 pour le second. Calculer la force de Laplace exercée par le premier fil sur le second. Quelle est la force exercée par le second fil sur le premier.

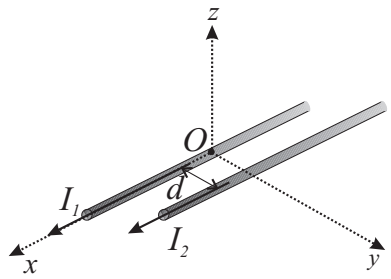

FIG. 1 – *Deux fils parcourus par un courant*

2. **Flux du champ magnétostatique et force de Laplace**

   Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant I est placé dans le plan d'une spire carrée de coté a parcouru par un courant i. Les deux conducteurs sont placés à une distance b l'un de l'autre (voir dessein).

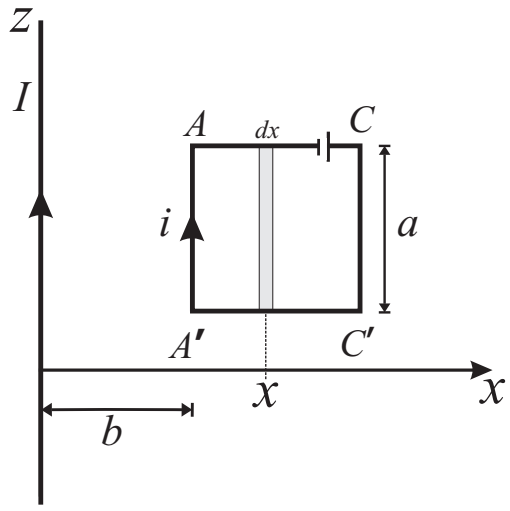

FIG. 2 – *Cadre carré près d'un fil électrique*

   (a) Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ traversant l'élément de surface dS centré sur x (surface hachurée sur le dessein) et en déduire le flux de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ à travers le circuit complet.

   (b) Donner l'expression de la force exercée par le conducteur rectiligne sur le circuit carré. En déduire le mouvement du circuit (attraction ou répulsion).

3. **Règle du flux maximal et dipôle magnétique**

Soit une bobine formée par N spires carrées identiques, de côté a, suspendue par un côté horizontal (figure 3). Sous l'action de la gravité $\overrightarrow{\mathbf{g}}$ et d'un champ magnétique vertical $\overrightarrow{\mathbf{B}}$, la bobine fait un angle θ avec la verticale dans sa position d'équilibre. **A.N.** : $a = 10\,\text{cm}$, $I = 0,1\,\text{A}$, $m = 80\,\text{g}$, $N = 200$ et $B = 115\,\text{mT}$.

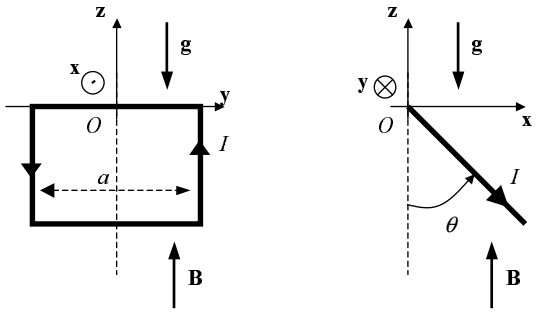

FIG. 3 – *Cadre parcouru par un courant, dans un champ magnétique*

(a) Moment dipolaire - Calculer le moment magnétique dipolaire de ce cadre.

(b) Calculer l'énergie magnétique "potentielle" et l'énergie potentielle gravitationnelle de la bobine. Quelle est la position d'équilibre du cadre sous la seule influence du champ magnétique, sous la seule influence gravitationnelle ?

(c) Calculer l'angle d'équilibre θ_0, en minimisant l'énergie potentielle totale.

(d) Retrouver le même résultat pour θ_0 à partir du moment de la force de Laplace et du moment du poids en O.

(e) Montrer que cet équilibre est effectivement stable (condition sur la dérivée deuxième de l'énergie).

Electricité et magnétisme - TD n°9
Induction

1. **Force électromotrice** Une tige métallique le longueur $l = 1,5\text{m}$ se trouve dans un champ magnétique uniforme, constant $B = 0,5\text{T}$. La tige est perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathbf{B}}$. Elle bouge avec une vitesse constante $v = 4\text{m/s}$ dans une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ et à la tige. Calculer la différence du potentiel électrique entre les extrémités de la tige.

2. **Force électromotrice** Le plan d'un cadre conducteur carrée de coté a contient un fil de courant constant I rectiligne infini qui ne touche pas le cadre. Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante, v , orthogonale au courant et dans le plan du cadre.
   (a) Calculer le potentiel électrique induit (force électromotrice) dans le cadre par le champ magnétique du courant en fonction de la distance b entre le fil et le cadre (voir dessein).
   (b) La spire carrée possède une résistance R. Calculer le courant $i(t)$ induite dans la spire carrée.
   (c) Calculer la puissance dissipé par l'effet joule.
   (d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.

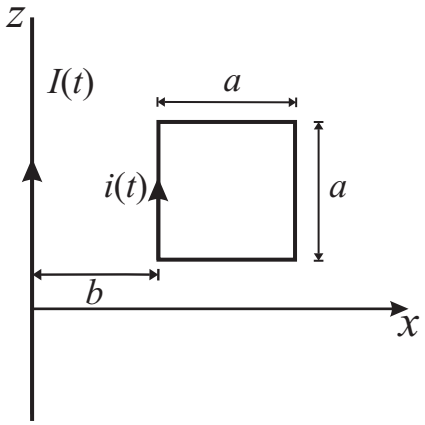

FIG. 1 – *Induction dans un cadre carré*

3. **Force électromotrice** On prend la même situation que dans le problème 2 mais on fixe la distance b constante et on prend le fil conducteur rectiligne de longueur infinie d'être parcouru par un courant alternatif $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ La spire carrée possède une résistance R.
   (a) Calculer le potentiel électrique induit (force électromotrice) dans le cadre.
   (b) Calculer le courant $i(t)$ induite dans la spire carrée.
   (c) Calculer la puissance dissipé par l'effet joule.
   (d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.

4. **Disque de Faraday**

   Parmi les nombreuses expériences effectuées par Faraday pour étudier le phénomène d'induction, une fut dédiée à montrer qu'un courant apparaît dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Pour cela, il considéra un disque conducteur mobile autour de son axe et placé dans un champ magnétique uniforme colinéaire à l'axe du disque. Un circuit contenant un galvanomètre reliait le centre du disque au bord du disque par un contact glissant (figure 2). Faraday observa que quand le disque tournait, l'aiguille du galvanomètre subissait une déflexion.

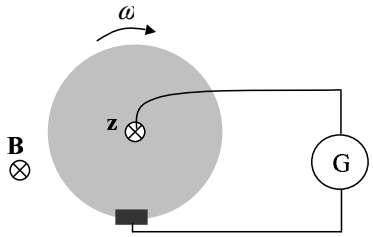

FIG. 2 – *Disque de Faraday*

   On considère un disque d'axe (Oz), de rayon R et d'épaisseur a, en rotation à la vitesse ω et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}} = B\widehat{\mathbf{z}}$ uniforme.

   (a) Expliquez l'origine du courant induit. Calculez la force électromotrice. Application numérique : $B = 0,2\,\mathrm{T}$, $R = 0,1\,\mathrm{m}$, $\omega = 50\,\mathrm{s}^{-1}$.

5. **Auto-inductance d'un solénoïde**

   On considère un solénoïde toroïdal de section carrée et parcouru par un courant I (côté $a = 4\,\mathrm{mm}$, grand rayon $R = 8\,\mathrm{cm}$, $N = 1000$ spires).

   (a) Calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique et son flux.

   (b) A partir de l'expression du flux magnétique, déduire l'inductance propre du tore L.

   (c) Estimer sa valeur numérique.

   (d) Trouver la tension $U(t)$, entre les bornes du solénoïde quand le courant a la forme : $I(t) = I_0\cos(\omega t)$. A.N. $\omega = 2\pi 50$ et $I_0 = 0.5$ A.

6. Soit $U(t) = U_0\cos(\omega t)$. Pour quelles valeurs de I_0 et ϕ, $I(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$ est-il solution de l'équation $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$?

7. En $t = 0$, un condensateur de capacité C portant une charge Q_0 est connecté a une bobine de self L. Calculer, pour tout temps, la charge du condensateur, l'énergie de son champ électrique et l'énergie du champ magnétique dans la bobine.

8. Un circuit RLC avec $R = 2\Omega$, $L = 10^{-3}$H, $C = 10^{-3}$ F (en série) est branché sur une tension alternante avec valeur maximale $U_0 = 100$V. Trouver sans calculette le courant maximal pour les fréquences angulaires (pulsation : ω) de la tension : 0 Hz, 10 Hz, 10^2 Hz, 10^3 Hz 10^4 Hz, 10^5 Hz. Faire un plot du courant maximal versus le logarithme de la fréquence.

Electricité et magnétisme - TD n°10
Induction

1. **Inductance mutuelle - transformateur**

   On considère un solénoïde de section circulaire, de rayon R_1, de longueur l_1, et constitué de N_1 spires. A l'intérieur de celui-ci, on place un deuxième solénoïde de rayon R_2, de longueur l_2, et constitué de N_2 spires.

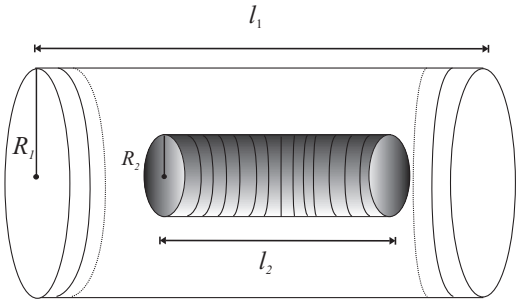

FIG. 1 – Inductance mutuelle de deux solénoïdes.

   (a) Calculer l'inductance mutuelle, M, entre les deux solénoides en utilisant l'approximation de solénoïdes infinis.

   (b) Exprimer M dans le cas où $l_2 \to l_1$ et $R_2 \to R_1$, mais avec $N_1 \neq N_2$.

   (c) On se rappelle que dans la mesure où les résistances des fils sont négligeables, les tensions aux bornes des solénoïdes s'expriment (dans la convention récepteur) :

$$U_1(t) = L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + M \frac{dI_2(t)}{dt}$$
$$U_2(t) = L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + M \frac{dI_1(t)}{dt}$$

   En prenant le cas étudié en b), calculer le rapport $U_2(t)/U_1(t)$ en fonction de N_1 et N_2. Voyez-vous une application intéressante ?

2. Considérer un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ uniforme et constant (dans le temps). Trouver un potentiel vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ dont le champ magnétique dérive, $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Votre solution, est-elle unique ?

3. **Générateur - Cadre tournant**

Une bobine plate, rectangulaire, et indéformable, de côtés $a = 20\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, est constituée d'un conducteur cylindrique de diamètre $d = 1\,\text{mm}$, et de résistivité $\rho = 1,6.10^{-8}\,\Omega.\text{m}$. Elle tourne avec une fréquence de 600 tours par minute autour d'un axe vertical situé dans le plan de la bobine. La bobine est placée dans un champ magnétique d'intensité $B = 1\,\text{T}$, perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 2).

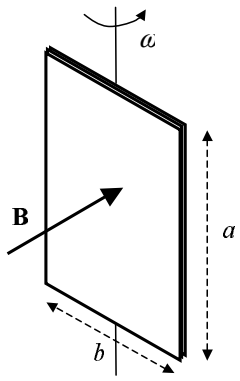

FIG. 2 – *Bobine rectangulaire dans un champ magnétique*

(a) Quelle est l'expression du courant circulant dans la bobine ? On calculera sa valeur efficace.

(b) Décrivez l'action mécanique de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ sur la spire.