Force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

Éléments du cours :
La force sur une particule de charge, q, placée dans un électrique, $\vec{E}$ et un champ magnétique, $\vec{B}$ est donné par la formule de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \tag{1}$$

Une particule chargée, placée dans un champ magnétique uniforme, décrit un mouvement circulaire autour de l'axe défini par la direction du champ. Ce mouvement est caractérisé par une pulsation (ou "fréquence angulaire" en anglais) de type gyro-synchrotron, donnée par :

$$\omega = \frac{|q|\, B}{m} \tag{2}$$

où $B = |\vec{B}|$ est l'amplitude du champ magnétique.Ce mouvement circulaire s'effectue avec un rayon de Larmor, donné par :

$$R_L = \left|\frac{v_\perp}{\omega}\right| = \left|\frac{m v_\perp}{qB}\right| \tag{3}$$

où $v_\perp$ est l'amplitude de la vitesse dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$. L'amplitude de la vitesse de la particule reste inchangée sous l'effet d'un champ $\vec{B}$ uniforme et statique.

1. **Spectromètre de masse :** Un ion de Sélénium entre dans une région où règne un champ électrique E =1.12×10^{5}V/m et un champ magnétique B = 0.54T uniformes, perpendiculaires à la vitesse de l'ion et l'un à l'autre.

   (a) Calculer la vitesse de la particule si elle passe non déviée dans cette région.
   Afin que que $\vec{F} = \vec{0}$, il faut que :

   $$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} \Longrightarrow vB = E \Longrightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{1.12}{0.54}10^5 \simeq 2.07\,10^5 \mathrm{m.s}^{-1} \tag{4}$$

   (b) A la sortie de cette région, l'ion traverse un zone où règne un champ magnétique B = 0.54T uniforme perpendiculaire à sa vitesse. En sachant que l'ion suit une trajectoire circulaire de rayon R_L = 32cm, déterminer la masse de l'ion de Sélénium et le nombre de masse (A = nombre de protons(Z) + nombre de neutrons) de l'isotope. (La masse d'un proton est $m_p = 1.6726\,10^{-27}$kg et $q_e = -e = -1.602\,10^{-19}$ C).
   Solution : A partir de l'énoncé, on a que le rayon de Larmor est $R_L = 0.32$m. On prend l'hypothèse que par "ion", on dit l'atome de de Sélénium a gagné un seul électron, Se$^-$, donc sa charge est $q = -e = -1.602\,10^{-19}$ C.

   $$R_L = \frac{m_{\mathrm{Se}} v_\perp}{qB} \Longrightarrow m_{\mathrm{Se}} = \frac{qBR_L}{v_\perp} = \frac{1.602\,10^{-19} \times 0.54 \times 0.32}{2.07\,10^5} = 1.335\,10^{-25}\,\mathrm{kg}\,. \tag{5}$$

   Si on divise ce résultat par la masse du proton $m_p = 1.6726\,10^{-27}$kg, on a :

   $$\frac{m_{\mathrm{Se}}}{m_p} \simeq 79.8 \tag{6}$$

   Comme sélénium a 34 protons, on déduit que nous avons affaire à l'isotrope le plus commun de Sélénium avec 80 − 34 = 46 neutrons.

2. **Force de Lorentz**

Des électrons avec une vitesse de $v_\perp = 10^6$m/s entrent dans une région avec un champ magnétique uniforme. La vitesse et le champ magnétique sont perpendiculaires. Les électrons suivent une trajectoire circulaire de rayon $R_L = 10$ cm. (La masse d'un électron est : $m_e = 9.109 \times 10^{31}$kg).

(a) Quel est la vitesse angulaire de l'électron ?

Solution :

$$v = \omega R \Longrightarrow \omega = \frac{v}{R} = 10^7 \text{m.s}^{-1}$$

(b) Quel est le champ magnétique ?

Solution :

$$\omega = \frac{|q|\, B}{m_e} \Longrightarrow B = \frac{\omega m_e}{q_e} = 5\, 10^{-5}\text{T} = 0.5\text{G} \; .$$

3. **Force de Lorentz : Mouvement hélicoïdal**

Un proton se déplace dans un champ magnétique uniforme $B_0 = 0.5$T appliqué le long de l'axe Ox. A $t = 0$, le proton a une vitesse $v_x = 1.5 \times 10^5$m/s, $v_y = 0$, $v_z = 2 \times 10^5$ m/s.

(a) Calculer la force de Lorentz qui agit sur le proton et son accélération à $t = 0$.

Solution : A $t = 0$, la force de Lorentz vaut :

$$\vec{\boldsymbol{F}}(t) = q_p \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = q_p B_0 \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = q_p B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

A $t = 0$, on a :

$$\vec{\boldsymbol{F}}(0) = q_p B_0 v_z^0 \widehat{\boldsymbol{y}} \simeq 1.6\, 10^{-14} \widehat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{N}$$

Son accélération vaut (si on néglige l'attraction terrestre)

$$\vec{\boldsymbol{a}}(0) = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(0)}{m_p} = \frac{q_e B_0 v_z^0}{m_p} \widehat{\boldsymbol{y}} = \frac{1.6\, 10^{-14}}{1.67 \times 10^{-27}} \widehat{\boldsymbol{y}} \simeq 9.58\, 10^{12} \widehat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{m.s}^{-2}$$

(b) Déterminer le rayon du mouvement hélicoïdal et le pas de l'hélicoïde (la distance parcourue le long de l'axe de l'hélicoïde dans une période).

Solution : Puisque le champ magnétique est orienté le long de l'axe Ox, la composante perpendiculaire perpendiculaire de la vitesse, $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(1.5 \times 10^5, 0, 2 \times 10^5\right)$m/s, est $v_\perp = v_z^0 = 2 \times 10^5$m/s. Le rayon du mouvement hélicoïdal est simplement le rayon de Larmor :

$$R_L = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{1.67\, 10^{-27} \times 2\, 10^5}{1.6\, 10^{-19} \times 0.5} \simeq 4.18\, 10^{-3}\text{m} = 4.18\text{mm} \tag{7}$$

La pulsation de ce mouvement (c.-à-d. sa fréquence angulaire) est :

$$\omega_p = \frac{|q| B}{m_p} = \frac{1.6\, 10^{-19} \times 0.5}{1.67\, 10^{-27}} = 4.79\, 10^7 \text{s}^{-1}$$

Une période de ce mouvement est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} \simeq 1.31\,10^{-7}\text{s}$$

Le pas du hélicoïde, $\mathcal{P}$, est :

$$\mathcal{P} = v_x^0 T = v_x^0 \frac{2\pi}{\omega_p} = 1.5 \times 10^5 \times 1.31\,10^{-7} = 0.197\text{m} = 19.7\text{cm}$$

4. **Force de Lorentz : Séparation d'isotopes**

Une façon de séparer les isotopes ^{235}U et ^{238}U d'uranium (92 protons) était basée sur la différence de rayons de leurs trajectoires dans un champ magnétique. On suppose que les atomes, une fois ionisés, partent d'une source commune et bougent perpendiculairement au champ. Trouver la séparation spatiale maximale des faisceaux avec un rayon de 0.5 m pour le ^{235}U dans un champ de 1.5 Tesla si :

(a) les isotopes ont la même vitesse,

Solution : Bien entendu, vous pouvez calculer L'éq.(3) :

$$R_L(m_{235}, v) = \frac{m_{235} v}{qB} \tag{8}$$

afin de trouver la vitesse, v, de l'ion de U_{235} et ensuite trouver le rayon de Larmor de l'ion de U_{238} mais vous savez que cette les différences atome par brute force est trouver la différence

Il est néanmoins plus simple et élégant édifiant d'utiliser la différentielle logarithmique où on traite $R_L(m, v)$ comme une fonction de m et de v. Dans ce cas, on peut évaluer la différentielle de R_L :

$$dR_L = dv_t \frac{m_U}{qB} + dm_U \frac{v_t}{q_U B} \qquad dR_L = \frac{dv_t}{v_t}\frac{m_U v_t}{qB} + \frac{dm_U}{m_U}\frac{m_e v_t}{q_U B} = \frac{dv_t}{v_t} R_L + \frac{dm_U}{m_U} R_L$$

Divisant les deux cotés par R_L, on obtient la différentielle logarithmique :

$$\frac{dR_L}{R_L} = \frac{dm}{m} + \frac{dv}{v}\ . \tag{9}$$

Si la vitesse des différentes isotopes sont tous les mêmes, $dv = 0$, et la variation est $\frac{\delta R_L}{R_L} \simeq \frac{\delta m}{m}$, on a :

$$\delta R_L \simeq \frac{\delta m_U}{m_U} R_L = \frac{3}{235} 0.5 \simeq 6.4\text{mm}\ .$$

La séparation des faisceaux après un demi-tour de son orbite est $2\delta R_L = 12,8$mm.

(b) les isotopes ont la même énergie.

Solution : On a toujours la validité de la différentielle logarithmique :

$$\frac{dR_L}{R_L} = \frac{dm}{m} + \frac{dv}{v}\ , \tag{10}$$

mais à énergie constante, on a simultanément $dm \neq 0$ et $dv \neq 0$. Le fait que

$$E_c = \frac{1}{2} m_U v^2$$

est une constante, on peut en conclure que :

$$
\begin{aligned}
& m_U v dv + \frac{1}{2} dm_U v^2 = 0 \\
\Rightarrow \qquad & m_U v dv = -\frac{1}{2} dm_U v^2 \\
\Rightarrow \qquad & \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\frac{dm_U}{m_U}
\end{aligned}
$$

Mettant ceci dans l'éq.(10) :

$$
\begin{aligned}
\frac{dR_L}{R_L} &= \frac{dm_U}{m_U} + \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\frac{dm_U}{m_U} \\
\Rightarrow \qquad \delta R_L &\simeq \frac{1}{2}\frac{\delta m_U}{m_U} R_L \simeq 3.2\text{mm}
\end{aligned}
$$

La séparation des faisceaux après un demi-tour de son orbite est $2\delta R_L = 6,4$mm.
La conclusion ici est qu'il est avantageux (par un facteur de 2) de séparer les isotopes, ^{235}U et ^{238}U s'ils ont au départ la même vitesse, plutôt que la même énergie.

Exercices Supplémentaires

5. **Effet Hall**

L'effet Hall, découvert en 1880, est lié à l'apparition d'une différence de potentiel (i.e. d'un champ électrique) quand un champ magnétique $\vec{B}$ est appliqué perpendiculairement à un conducteur parcouru par un courant $\vec{j}$ (figure 1).

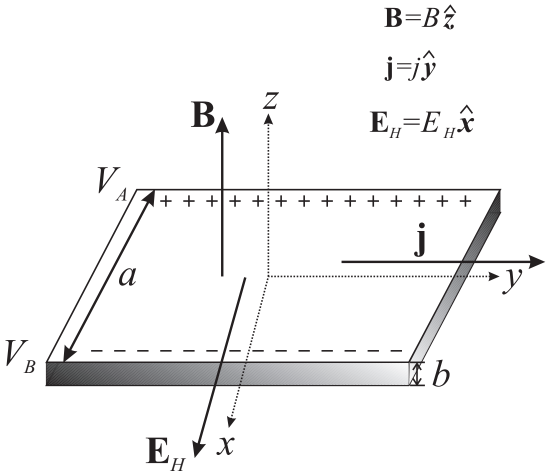

Figure 1: *Effet Hall*

(a) Calculer le champ de Hall à partir de la condition d'annulation de la force de Lorentz sur un électron du conducteur (condition d'équilibre).

Solution : La force de Lorentz sur les porteurs de courant est :

$$\vec{F}_p = q_p\vec{E} + q_p\vec{v}_p \wedge \vec{B}$$

La force $q\vec{v}_p \wedge \boldsymbol{B}$ va pousser les électrons sur un côté du conducteur jusqu'au moment où le champ Hall $\boldsymbol{E}_H$ est :

$$q_p\vec{E}_H + q_p\vec{v}_p \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_p \wedge \vec{B}$$

où $\vec{v}_p$ est la vitesse moyenne des porteurs de courant.

(b) Déterminer la constante de Hall A_H en fonction du nombre de porteurs (n_p densité volumiques des porteurs) ; par définition on écrit $\vec{E} = A_H\vec{B} \wedge \vec{j}_p$.

Solution : La relation entre la densité des porteurs n et la densité volumique de courant $\vec{j}$ est :

$$\vec{j}_p = n_p q_p \vec{v}_p$$

Compte tenu du résultat dans Donc le champ de Hall est :

$$\vec{E}_H = -\frac{1}{n_p q_p}\vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{n_p q_p}\vec{B} \wedge \vec{j}_p$$

et la constante de Hall est :

$$A_H = \frac{1}{n_p q_p}\,.$$

(c) Application numérique : sur une sonde à arséniure d'indium InAs on applique un champ magnétique de $B = 37\,\mathrm{mT}$, et on mesure un courant $I = 150\,\mathrm{mA}$, pour une différence de potentiel de $V = 4.7\,\mathrm{mV}$ (épaisseur $b = 0.12\,\mathrm{mm}$), calculer la constante de Hall et le nombre de porteurs par unité de volume.

Solution :

$$V_H = a\left|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_H\right| = \frac{a}{nq}Bj = \frac{a}{nq}B\frac{I}{ab}$$
$$= \frac{1}{nq}\frac{IB}{b} = A_H\frac{IB}{b}$$

$$\Rightarrow A_H = \frac{bV_H}{IB} = \frac{0.12 \times 4.7}{150 \times 37} \simeq 10^{-4}\mathrm{m}^3\mathrm{C}^{-1}$$
$$n_p = \frac{1}{A_H q_p} \simeq \frac{1}{10^{-4} \times 1.6 \times 10^{-19}} \simeq 6.15 \times 10^{22}\mathrm{m}^{-3}\ .$$

C'est-à-dire, il y a un porteur de courant dans un volume de,

$$\frac{1}{n_p} \simeq 1.6 \times 10^7 \mathring{A}^3$$

Donc un porteur dans une boite de $\sim 250\mathring{A}$ ce qui est beaucoup plus grand que la distance inter moléculaire. Ceci est attendu pour un semi-conducteur où les charges de conduction sont introduit par le "dopage" d'impuretés dans un réseaux cristallin.