

Diélectriques et Conducteurs

1. **Permittivité** - Le permittivité du diamant vaut $\epsilon_m = 5 \cdot 10^{-11} \text{ F m}^{-1}$. Calculer sa constante diélectrique et sa susceptibilité.

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 9 \cdot 10^9 & \Rightarrow \epsilon_0 &= \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \simeq 8.8410^{-12} \text{ Fm}^{-1} \\ \epsilon_m &= \epsilon_r \epsilon_0 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ Fm}^{-1} & \Rightarrow \epsilon_r &= \frac{\epsilon_m}{\epsilon_0} = \frac{5 \cdot 10^{-11}}{8.8410^{-12}} \simeq 5,7 \\ \epsilon_r &= 1 + \chi_m & \Rightarrow \chi_m &\simeq 4,7 \end{aligned}$$

2. **Milieux diélectrique** - Considérer une boule conductrice de rayon R dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ_m . La boule porte une charge Q . Calculer le champ électrique partout dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Calculer le potentiel électrique partout en prenant un point de référence à l'infini.

Solution :

$$\begin{aligned} r > R : \vec{E}(r) &= \hat{u}_r E_r = \hat{u}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \hat{u}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_m r^2} & V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_m r} \\ r < R : \vec{E}(r) &= \hat{u}_r E_r = \vec{0} & V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_m R} \end{aligned}$$

3. **Densité de courant - vitesse des porteurs**

Le cuivre, qui est un bon conducteur du courant électrique, possède 1 électron libre par atome; sa densité volumique de charge ρ vaut $1,36 \cdot 10^{10} \text{ C.m}^{-3}$. Un fil de cuivre de section $s = 1 \text{ mm}^2$ est parcouru par un courant $I = 10 \text{ A}$. Calculer la densité de courant j et la vitesse moyenne des porteurs.

Solution :

$$\begin{aligned} I &= |\vec{j}| s \\ |\vec{j}| &= \frac{I}{s} \stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{10}{(10^{-3})^2} = 10^7 \text{ Cs}^{-1} \text{ m}^{-2} \\ \vec{j} &= \rho_p \vec{v} \\ |\vec{v}| &= \frac{|\vec{j}|}{\rho_p} \stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{10^7 \text{ m.s}^{-1}}{1,36 \cdot 10^{10}} \simeq 10^{-3} \text{ m.s}^{-1} = 1 \text{ mm.s}^{-1} \end{aligned}$$

4. **Résistance ohmique**

Un conducteur filaire de longueur ℓ , de section $\mathcal{S}$, est soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre ses extrémités.

- (a) En appelant $\vec{j}$ le vecteur densité de courant, montrer que, en régime permanent, le flux de $\vec{j}$ est conservatif.

Solution : Les équations de base en magnétostatique sont :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}\tag{1}$$

Le premier montre que le flux de $\vec{B}$ est conservatif :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

On peut prendre la divergence du deuxième équation du magnétostatique afin de trouver :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} \equiv 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

ce qui veut dire que le flux de $\vec{j}$ est conservatif car mettant ce résultat dans le théorème de Green-Ostrogradsky, on trouve qu'en magnétostatique :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} = \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Autrement dit le flux de la densité de courant à travers une surface fermée en magnétostatique est nul. (tout charge qui entre dans le volume est compensé par une charge qui sort (et vice versa)).

- (b) Calculer la résistance R de cette portion de fil de conductivité γ .

Solution : Nous avons que $\vec{j}$, $\vec{E}$, et $d\vec{\ell}$ sont colinéaires.

$$I = jS = \gamma ES$$

et

$$U = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E\ell$$

donc

$$\begin{aligned}I &= \gamma ES = -\gamma \frac{U}{\ell} S \\ U &= -I \frac{\ell}{S\gamma}\end{aligned}$$

Dans la convention générateur de U positif et I positif sont dans le même sens $U = -IR$ donc on peut conclure que :

$$R = \frac{\ell}{S\gamma}$$

5. Résistance de fuite

L'âme de rayon $\rho_1 = 1 \text{ cm}$ d'un câble coaxial et sa gaine extérieure de rayon $\rho_2 = 2 \text{ cm}$ sont séparés par un isolant imparfait de conductivité $\gamma = 10^{-22} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. On considère une longueur, $\mathcal{L}$, de câble.

- (a) Calculer la résistance de fuite R_f de ce câble.

Solution : Pour un fil on peut écrire

$$dR_f = \frac{d\ell}{S\gamma}$$

$$R_f = \int dR_f = \int \frac{d\ell}{S\gamma} = \frac{\ell}{S\gamma}$$

C'est le même problème ici sauf que la section est variable

$$R_f = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\ell}{S\gamma}$$

avec

$$d\ell = dr$$

$$S = 2\pi r\mathcal{L}$$

donc

$$R = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{dr}{2\pi r\mathcal{L}\gamma} = \frac{1}{2\pi\mathcal{L}\gamma} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathcal{L}\gamma} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

- (b) En déduire le courant de déperdition latérale d'un kilomètre de câble soumis à une différence de potentiel de 1000 volts.

Solution :

$$R \stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{1}{2 \times 3.1416 \times 10^{-22} \times 10^3} \ln 2 \simeq 1.1 \times 10^{18} \Omega$$

$$IR = U = 10^3$$

$$I \stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{10^3}{1.1 \times 10^{18}} \simeq 9 \times 10^{-16} \text{ A}$$