

Énergie électrostatique

Éléments du cours :

Le moment dipolaire (électrique) d'un système de N charges ponctuelles est donné par :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \iiint \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r, \quad (1)$$

où la seconde égalité s'applique à une distribution continue de charges, représentée par une densité volumique de charge ρ .

L'énergie potentielle $\mathcal{E}_e(M)$ d'une charge q en un point M dans un champ électrique s'exprime par :

$$\mathcal{E}_e(M) = qV(M), \quad (2)$$

où $V(M)$ désigne le potentiel électrique en ce point.

L'énergie électrique d'un système de N charges ponctuelles s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i, \quad (3)$$

où V_i désigne le potentiel électrique créé par tous les charges à l'exception de la charge q_i .

Pour une distribution continue de charges, l'énergie électrique s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iiint \rho(P) V(P) d\mathcal{V}, \quad (4)$$

Une application de cette équation à un système de N conducteurs portant des charges, Q_i , et des potentiels respectifs, V_i :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i, \quad (5)$$

Un condensateur possède deux armatures en influence quasi totale, ce qui implique que $Q_2 \simeq -Q_1$. Par conséquent, l'énergie stockée par le condensateur est :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \longrightarrow \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q_1 U_{12} = \frac{1}{2} C U_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}. \quad (6)$$

On a dérivé en cours que l'énergie électrique se calcul aussi en intégrant $\vec{D} \cdot \vec{E}/2$ sur tout l'espace :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}. \quad (7)$$

1. Charge traversant un potentiel

Quelles sont l'énergie cinétique en Joules et la vitesse en m/s d'un noyau de oxygène ^{16}O (8 protons, 8 neutrons) après une accélération par une différence de potentiel de $\Delta V = 10^7$ V ?

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{T} &= 1.28 \times 10^{-11} \text{ J} \\ v_{\text{fin}} &\simeq 3.1 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Ici on a invoqué une unité d'énergie, «electron volt » (eV). C'est l'énergie transféré à un électron quand il descend 1 Volt de potentiel. C'est une unité très pratique quand on parle d'énergie à l'échelle atomique. Pour transformé en unités SI, on utilise $1\text{eV} = 1.609 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

2. Énergie potentielle

- (a) Trois charges ponctuelles identiques avec $q = 1.2\mu\text{C}$ sont situées aux trois sommets d'un triangle équilatéral de côté 0.5m . Calculer l'énergie potentielle du système.
- (b) Quatre électrons sont situés aux sommets d'un carré de côté $2a=10\text{nm}$ et une particule α (charge $+2e$) est située au centre du carré. Calculer le travail nécessaire pour déplacer la particule α du centre du carré au milieu d'un côté.

Solution :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{U}_p \equiv \Delta\mathcal{E}_e(0) &= qV_{OB} = 2q_p [V(B) - V(O)] = 2q_p [V(B) - V(O)] \\ &\simeq -0.038\text{eV} \simeq -6.15 \cdot 10^{-21}\text{J} .\end{aligned}$$

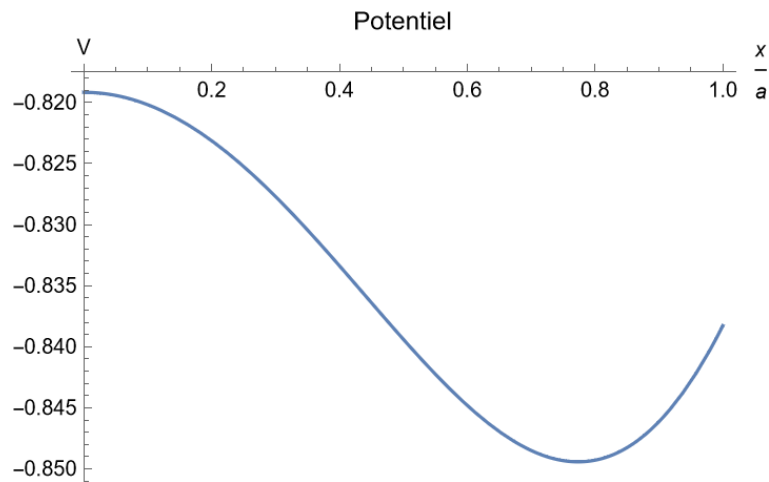


Figure 1: Potentiel d'une carré d'électrons entre le centre et un bord du carré

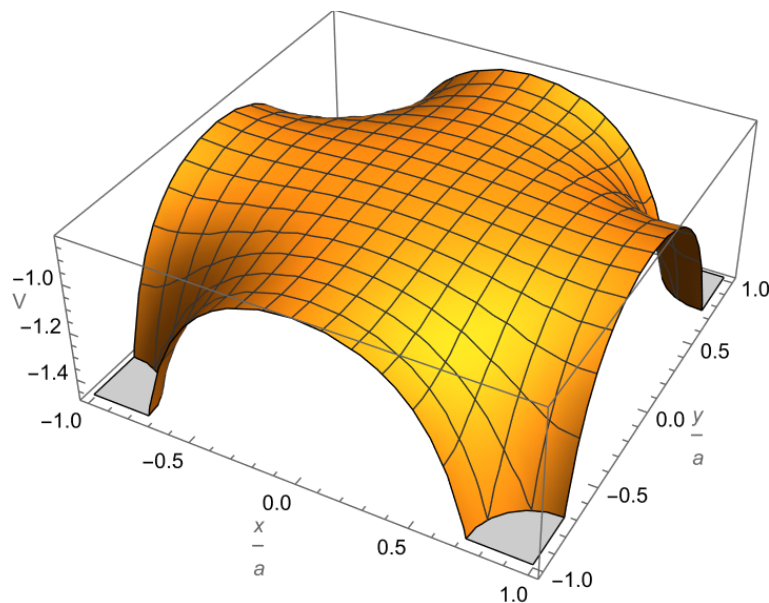


Figure 2: 2D plot du potentiel d'une carré d'électrons

3. Énergie propre d'un dipôle

Un dipôle peut être modélisé par deux charges ponctuelles q et $-q$ séparées d'une distance a . La quantité $\vec{p} = q\vec{a}$ est appelée moment dipolaire.

Déterminer l'énergie propre, $\mathcal{U}_0$, du dipôle en supposant que, la position de la charge $+q$ étant fixée, on approche la charge $-q$ depuis l'infini jusqu'à la distance a .

$$\mathcal{W}_d = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}.$$

4. Énergie d'un cristal

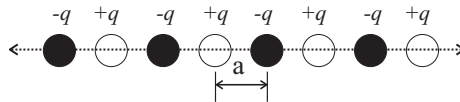


Figure 3: *Cristal linéaire.*

Considérer un «cristal» formé d'une ligne infini de charges (ions) $(+q)$ et $(-q)$ alternées, séparées par une distance a (voir figure 3).

(a) Déterminer l'énergie nécessaire afin de retirer un ion de ce « cristal ».

$$\mathcal{E}_e = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

Le travail nécessaire pour arracher cet ion doit donc compenser cette énergie potentielle, ce qui donne : $\mathcal{W}_e = -\mathcal{E}_e$.

Démonstration de la série $\ln 2$: On commence avec la série géométrique :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

On intègre le premier membre :

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z} = \ln|1+x| - \ln|1| = \ln|1+x| \Rightarrow \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \ln 2 \quad (8)$$

et ensuite la deuxième :

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) dz &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \Rightarrow \int_0^1 (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) dz &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned} \quad (9)$$

Comparaison de l'éq.(8) et l'éq.(9) nous donne :

$$\Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Énergie emmagasinée dans un condensateur

Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge $+q$, est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse, de rayon intérieur b et rayon extérieur c . La sphère creuse a une charge $-q$. Un diélectrique de permittivité relatif, ϵ_r , remplit l'espace, $b > r > a$ entre les deux sphères. Calculer l'énergie potentielle emmagasinée dans ce condensateur :

- (a) en utilisant la capacité du système.

Solution :

Nous avons vu dans le cours que l'énergie électrique, s'écrit $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$:

Avec les méthodes du cours et TD n°3, la capacité de ce condensateur s'écrit :

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a}$$

L'énergie électrique est donc :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{2} \frac{b-a}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab}$$

- (b) en intégrant la densité d'énergie électrique.

Solution : On utilise le théorème de Gauss afin de déterminer que dans la région $b > r > a$.

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r}.$$

L'énergie électrique du système se trouvent en intégrant, $\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{D}\cdot\vec{E}$ sur la région $b > r > a$ car en dehors de cette région, $\vec{D} = \vec{E} = \vec{0}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} 4\pi \int_a^b \frac{q^2}{4^2\pi^2\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] = \frac{q^2}{2} \frac{b-a}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab}. \end{aligned}$$

Comme nous avons trouvé en cours que l'énergie d'un condensateur est $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ on retrouve donc à partir des considération purement énergétique que la capacité est donnée par

6. Dipôle dans un champ uniforme

Un dipôle est plongé dans un champ électrique $\vec{E}_{\text{ext}}$ uniforme. Son moment dipolaire $\vec{p}$ fait un angle β avec $\vec{E}_{\text{ext}}$ (voir figure 4).

- (a) Calculer la force totale exercée sur le dipôle.

Solution : Sous l'action du champ extérieur, le dipôle est soumis à une action mécanique. Cette action est caractérisée par une force extérieure, $\vec{F}_{\text{ext}}$, donné par la somme des forces sur la charge négative, $\vec{F}_N$ et positive, $\vec{F}_P$:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_N + \vec{F}_P = -q\vec{E}_{\text{ext}} + q\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0},$$

car les deux forces sont opposées. Le gradient est nul car le champ électrique externe est uniforme. De même, le moment dipolaire est constant.

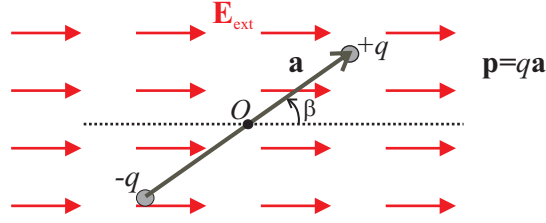


Figure 4: Dipôle dans un champ extérieur uniforme.

- (b) Calculer le moment $\vec{\Gamma}$ des forces exercées sur le dipôle. Quelle est la position d'équilibre dans le champ extérieur ?

Solution : Le moment des forces n'est pas nul par contre :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_+ + \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}_- & \vec{F}_+ &= -\vec{F}_- = q\vec{E} & \overrightarrow{OP} &= \frac{\vec{a}}{2} & \overrightarrow{ON} &= -\overrightarrow{NO} = -\frac{\vec{a}}{2} \\ \vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_+ - \overrightarrow{ON} \wedge (\vec{F}_+) = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NO}) \wedge \vec{F}_+ = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{F}_+ \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} = q\vec{a} \wedge \vec{E} \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E} \implies |\vec{\Gamma}| = pE |\sin \beta| .\end{aligned}$$

La position d'équilibre correspond à celle où le moment est nul, donc lorsque $\beta = 2k\pi$. Dans ce cas, le dipôle et le champ électrique sont alignés. Si $\beta = 0$, l'équilibre est stable, si $\beta = \pi$, l'équilibre est instable.

- (c) En déduire le travail qu'il faut fournir au dipôle pour le faire tourner d'un angle β à partir de sa position d'équilibre. Exprimer alors l'énergie d'interaction U (énergie potentielle) avec le champ environnant.

Finalement :

$$U = -pE (\cos \beta - 1) + cte' = -\vec{p} \cdot \vec{E} + cte$$

- (d) Pour quelles valeurs de β cette énergie est-elle extrême ?
 (e) Expliquer quelle est l'action des forces si le champ $\vec{E}_{\text{ext}}$ est central ?

Solution :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Donc, un dipôle $\vec{p}$ dans un champ $\vec{E}$, aura tendance à s'aligner (afin de minimiser) son énergie. Ceci n'est pas tout : On a vu en (6a) que la force sur un dipôle est nulle dans un champ homogène, mais un champ central n'est pas homogène. Le plus simple est d'utiliser la méthode des travaux virtuels :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla} (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})\end{aligned}$$

Dans le cas d'un champ créé par une charge électrique, $E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, la force sur le dipôle est radial,

$$F_r = p \frac{\partial}{\partial r} |\vec{E}| = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} = -\frac{pq}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

Ce phénomène est bien connu pour des charges placées dans un liquide diélectrique. Ceci s'appelle l'effet d'écrantage du champ électrique et son effet est de diminuer le champ électrique par rapport à la valeur qu'il aurait eu si la charge était placée dans le vide.

Exercices Supplémentaires

7. Deux charges ponctuelles fixes sont situées le long de l'axe Ox , une de charge $q_1 = 3\text{nC}$ située à l'origine et une de charge $q_2 = -3\text{nC}$ située au point $x = 3\text{cm}$. Une particule de masse $m = 5\mu\text{g}$ et charge $q_0 = 2\text{nC}$ se déplace le long de l'axe Ox à partir du point a ($x = 1\text{cm}$), où elle se trouve au repos, jusqu'au point b ($x = 2\text{cm}$). Quelle est la vitesse de cette particule au point b ?

Solution : Sachant la formule générale pour le potentiel produit par N charges ponctuelles :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{P_iM}|},$$

le potentiel le long de l'axe Ox (en fonction de x) est :

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x - 3|} \right)$$

Aux points $V(x_a = 10^{-2}\text{m})$ et $V(x_b = 2 \cdot 10^{-2}\text{m})$:

$$\begin{aligned} V(x_a = 10^{-2}) &= \frac{9 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1350\text{V} \\ V(x_b = 2 \cdot 10^{-2}) &= \frac{9 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -1350\text{V} \end{aligned}$$

La différence d'énergie électrique potentiel en passant du point a au point b est :

$$\Delta\mathcal{U} = q_0 (V_b - V_a) = 2 \times 10^{-9} \times 2.70 \times 10^3 = -5.4 \cdot 10^{-6}\text{J}$$

L'énergie cinétique acquise lors de ce déplacement est :

$$\Delta\mathcal{T} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -\Delta\mathcal{U} = 5.4 \cdot 10^{-6}\text{J}$$

Puisque $v_a = 0$, on a $\frac{1}{2}mv_b^2 = \Delta\mathcal{T}$, la vitesse de la particule en arrivant sur b est :

$$v_b = \sqrt{\frac{2\Delta\mathcal{T}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 5.4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}}}\text{m/s} \simeq 1.47\text{m/s}$$

8. Moment dipolaire

Soit un triangle équilatéral de côté ℓ . On place sur ses sommets une charge négative $-2q$ et deux charges positives q .

- (a) Calculer son moment dipolaire électrique.

Détails de la solution :

$$\vec{p} = \sum_{i=0}^{N=3} q_i \vec{OP}_i$$

Il convient de placer le triangle dans un plan $z = 0$. On choisit l'origine au centre d'une base du triangle de manière que les deux charges positives $q_1 = q_2 = q$ se trouvent aux positions $\vec{OP}_1 = \{-\ell/2, 0\}$, $\vec{OP}_2 = \{\ell/2, 0\}$, et la charge, $q_3 = -2q$ au sommet à la position $\vec{OP}_3 = \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\}$.

$$\vec{p} = q\vec{OP}_1 + q\vec{OP}_2 - 2q\vec{OP}_3 = -2q\vec{OP}_3 = -2q\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\hat{z} = -q\frac{\sqrt{3}}{\ell}\hat{z}.$$

- (b) Déterminer l'énergie propre,
- $\mathcal{U}_0 = \mathcal{E}_e$
- , de ce dipôle.

Solution :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{q_i q_j}{|\vec{P}_i \vec{P}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i \\ &= \frac{1}{2} [-2qV(P_3) + qV(P_1) + qV(P_2)] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{[-4q^2 - q^2 - q^2]}{\ell} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q^2}{\ell}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé :

$$\begin{aligned} V(P_3) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ell} \\ V(P_1) &= V(P_2) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ell} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} \end{aligned}$$

On aurait pu obtenir le même résultat pour $\mathcal{U}_0$ en sommant l'énergie des trois couple d'interaction.

- (c) Quelle est la valeur absolue maximale de la force que ce dipôle exerce sur une charge
- q
- placée à une distance de
- 1000ℓ
- du dipôle ?

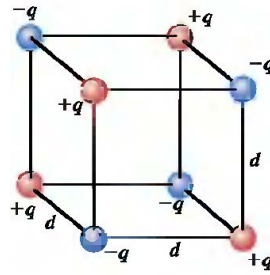
Solution : On se rappelle que le potentiel d'un dipôle est:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Le potentiel et ses variations sont les plus forts dans la direction de $\vec{p}$, et dans cette direction nous avons:

$$\begin{aligned} V(r, \theta = 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\text{grad}}V = -\hat{r} \frac{\partial V(r, \theta = 0)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \hat{r} \\ |\vec{F}_q(1000\ell)| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2pq}{\ell^3 10^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{3}q^2\ell}{\ell^3 10^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{3}q^2}{\ell^2 10^3} \end{aligned}$$

9. Une « maille » d'un cristal ionique (de type NaCl) est formée de huit charges ponctuelles situées aux sommets d'un cube de côté d . Les charges des ions sont $+q$ et $-q$. Calculer l'énergie potentielle de cette « maille ». Commenter le résultat.



- (a) Calculer le moment dipolaire électrique de la maille.

Solution :

$$\vec{p} = \sum_{i=0}^{N=8} q_i \overrightarrow{OP_i} = \vec{0}$$

- (b) Déterminer l'énergie propre, U_0 , de cette maille.

Solution : Le plus simple est de compter le nombre de couples de même sorte. Il y a : 12 arêtes, 6 faces, 4 diagonales. On calcule l'énergie pour chaque type de couple, qui donne:

$$12 \text{ bords : } \mathcal{E}_e^{\text{bord}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{d}$$

$$12 \text{ diagonaux sur les faces : } \mathcal{E}_e^{\text{face-diag}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d\sqrt{2}}$$

$$4 \text{ diagonaux centrales : } \mathcal{E}_e^{\text{diag-cent}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{d\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{12}{d} + \frac{12}{d\sqrt{2}} - \frac{4}{d\sqrt{3}} \right) = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d} \left(-3 + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$