

Théorème de Gauss - Champ électrique créé par des distributions de charges

Éléments du cours :

L'équation différentielle de la loi Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \left(\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad (1)$$

L'autre équation de l'électrostatique est :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \left(\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \right), \quad (2)$$

ce qui n'est valable quand les charges sont stationnaires. Cette équation implique que $\vec{E}$ est un champ conservateur, ce qui veut dire qu'on peut toujours définir un champ de potentiel électrique $V(\vec{r})$ tel que :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(\vec{r}) \quad \left(\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \right) \quad (3)$$

Mettant ceci dans l'équation (1) on obtient l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

où nous avons introduit le *Laplacien*, $\Delta \equiv \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} = \nabla \cdot \nabla$. En coordonnées cartésiennes ceci s'écrit :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (5)$$

La solution intégrale à cette équation est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{|\overrightarrow{PM}|} \rho(P) d\mathcal{V}_P \quad (6)$$

Prenant le gradient de cette équation on obtient une solution intégrale du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \rho(P) d\mathcal{V}_P \quad (7)$$

Quand on considère des densités de charge surfaciques et linéiques on récrit l'éq.(7) comme :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \sigma(P) dS_P \\ \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \lambda(P) d\ell_P, \end{aligned}$$

et avec des charges ponctuelles l'éq.(7) s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{|\overrightarrow{P_i M}|^3}, \quad (8)$$

ce qui est la formule que nous avons appris à utiliser dans TD°1.

Le théorème d'Ostrogradsky (voir cours): relie le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$, arbitraire, à travers la surface *fermée*, S , du volume à l'intégrale de la divergence du champ $\vec{A}$ sur le volume $\mathcal{V}$:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} d\mathcal{V} \quad (9)$$

Loi de Gauss intégrale : Grâce au théorème de Green-Ostrogradsky, la version *intégrale* du théorème de Gauss est une *conséquence* de sa version différentielle :

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\mathcal{V} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (10)$$

où dans la deuxième égalité, on a fait appel à la version *différentielle* de la loi de Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (11)$$

Ceci complimenter la dérivation inverse de la version différentielle de la loi de Gauss à partir de sa version intégrale comme démontré dans le cours (voir aussi 2.III du Perez).

Différence de potentiel :

Si l'on connaît le champ $\vec{E}(\vec{r})$ dans une région de l'espace, on peut déterminer la différence de potentiel électrique entre n'importe quelle paire de points A et B en effectuant l'intégrale de circulation le long de n'importe quel chemin reliant ces points:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (12)$$

1. Loi de Gauss

- Dans une région de l'espace, le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme. Utiliser la loi de Gauss pour prouver que cette région doit être électriquement neutre. Est-ce que le réciproque est valide, c'est-à-dire dans une région de l'espace où il n'y a pas de charge le champ électrique doit-il être uniforme ?
- On considère une densité volumique de charge ρ constant, implique-t-elle que $\vec{E}$ soit uniforme dans cette région ?

2. Charge linéique

On considère un long fil rectiligne portant une densité de charge uniforme λ_0 (approximation du fil infini).

- Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances? Que pouvez vous en conclure pour le champ électrique ?
- Déterminer le champ $\vec{E}$ créé en un point M situé à une distance ρ de la ligne.

- A partir de l'expression intégrale du champ électrostatique de Coulomb. (La solution se trouve dans chapitre 2 de la polycopié. Comme ceci c'est un peu long pour refaire en séance de TD - passer directement à la deuxième partie de la question en séance TD où on retrouve la solution avec le théorème de Gauss.)

Solution : Bien que cette méthode fonctionne, elle est nettement plus lourde que la méthode de Gauss. Voici les détails :

Selon la loi de Coulomb, le champ électrique en un point M situé à une distance ρ de la ligne s'écrit :

$$\vec{E}(M(\rho, \phi, z)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \lambda(P) d\ell_P$$

$$\lambda(P) = \lambda(z) = \lambda_0 \quad \forall z$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} dz_P$$

$$\vec{PM} = \rho\hat{\rho} - z_P\hat{z}$$

$$|\vec{PM}| = (\rho^2 + z_P^2)^{1/2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} dz_P = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\hat{\rho} - z_P\hat{z}}{(\rho^2 + z_P^2)^{3/2}} dz_P$$

On sait par symétrie que le composant E_z du champ est nul. Il suffit donc de calculer l'intégrale pour le composant, $E_\rho = \vec{E} \cdot \hat{\rho}$ on peut évaluer l'intégral en introduisant une variable angulaire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\tan \alpha = \frac{z_P}{\rho} \rightarrow z_P = \rho \tan \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho}{|\vec{PM}|} \rightarrow |\vec{PM}| = \frac{\rho}{\cos \alpha}$$

$$dz_P = \rho d(\tan \alpha) = \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Comme dans le cours, on calcul $E_\rho(\rho)$ en évaluant l'intégrale:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho) &= \vec{E}(M) \cdot \hat{\rho} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{PM} \cdot \hat{\rho}}{|\vec{PM}|^3} dz_P = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho}{\frac{\rho^3}{\cos^3 \alpha}} \frac{\rho}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \alpha}{\rho} \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho} [\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left[\frac{z_1}{(\rho^2 + z_1^2)^{1/2}} - \frac{z_2}{(\rho^2 + z_2^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 \rho} \left[\frac{z_1/\rho}{\left(1 + (z_1/\rho)^2\right)^{1/2}} - \frac{z_2/\rho}{\left(1 + (z_2/\rho)^2\right)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas d'une tige finie le champ possédait également un composant selon la direction $\hat{z}$. On sait par symétrie que cette composante est nul pour le fil infini,

mais on peut vérifier ceci par un calcul direct si l'on veut :

$$\begin{aligned}
 E_z &= \vec{E}(M) \cdot \hat{z} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-z_P}{|\vec{PM}|^3} dz_P = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan \alpha \cos \alpha d\alpha \\
 &= -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_2 \rightarrow -\pi/2}^{\alpha_1 \rightarrow \pi/2} \sin \alpha d\alpha \\
 &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(\rho^2 + z_1^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\rho^2 + z_2^2)^{1/2}} \right] \\
 &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(1 + (z_1/\rho)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + (z_2/\rho)^2\right)^{1/2}} \right] \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

dans les limites $\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ($z_1 \rightarrow \infty$ et $z_2 \rightarrow -\infty$).

Notre résultat final est :

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

- En utilisant la loi de Gauss.

Le champ électrique déduit à partir de la loi de Gauss s'écrit :

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

On remarque que c'était nettement plus facile d'obtenir $\vec{E}$ par la loi de Gauss, qu'avec la loi de Coulomb.

- (c) En déduire le potentiel, $V(\rho)$ au point M .

Solution :

$$V(\rho) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + cte \quad (13)$$

3. Un fil infini, rectiligne et aligné le long de l'axe Oz , porte une charge linéique $\lambda_1 = 2,40\text{nC/m}$. Un second fil, également infini, rectiligne et parallèle à l'axe Oz , est situé en $y = +0,40\text{m}$ et porte une charge linéique $\lambda_2 = -2,40\text{nC/m}$.

- (a) Calculez le champ électrique sur une ligne en $y = +0,2\text{m}$, parallèle à l'axe Oz .

Solution : Le champ électrique créé par un fil infinie de électrique λ_1 est

$$\vec{E}_i(M) = \frac{\lambda_i}{2\pi\epsilon_0\rho_i} \hat{\rho}_i. \quad (14)$$

Pour un axe, Oz le champ radial s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\hat{\rho}_z(\phi) = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}. \quad (15)$$

Sur l'axe, Oz , $\rho_1 = |y| = 0,2\text{m}$, $\rho_2 = |y - y_2| = 0,2\text{m}$ et $\phi_1 = \pi/2$, et $\phi_2 = 3\pi/2$ et les champs créé par les lignes de charge à la position $y = 0,2\text{m}$ sont:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1(M) &= \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \hat{y} = \frac{2\lambda_1}{4\pi\epsilon_0\rho_1} \hat{y} = \frac{4,810^{-9} 10^9}{0.2} \hat{y} = 216\text{V.m}^{-1} \hat{y} \\
 \vec{E}_2(M) &= -\frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0\rho_2} \hat{y} = -\frac{2\lambda_2}{4\pi\epsilon_0\rho_2} \hat{y} = \frac{4,810^{-9} 10^9}{0.2} \hat{y} = 216\text{V.m}^{-1} \hat{y}
 \end{aligned}$$

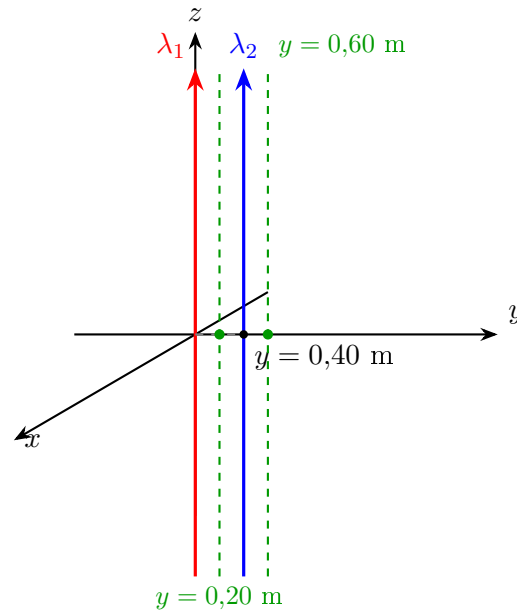


Figure 1: Fil infini le long de Oz portant λ_1 , second fil infini parallèle à Oz en $y = 0,40$ m portant λ_2 , et lignes en pointillé vert, parallèles à Oz , en $y = 0,20$ m et $y = 0,60$ m où le champ électrique est évalué.

et leur somme est :

$$\vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = 432\hat{y}\text{V.m}^{-1}.$$

- (b) Calculez le champ électrique sur une ligne en $y = +0,6\text{m}$, parallèle à l'axe Oz .

Solution :

Quand $y = 0,6$, $\rho_1 = |y| = 0,6\text{m}$, $\rho_2 = |y - y_2| = 0,2\text{m}$ et $\phi_1 = \pi/2$, et $\phi_2 = \pi/2$ et les champs créés par les lignes de charge à la position $y = 0,2\text{m}$ sont:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(M) &= \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0\rho_1}\hat{y} = \frac{2\lambda_1}{4\pi\epsilon_0\rho_1}\hat{y} = \frac{4,810^{-9}10^9}{0,6}\hat{y} = 72\text{V.m}^{-1}\hat{y} \\ \vec{E}_2(M) &= \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0\rho_2}\hat{y} = \frac{2\lambda_2}{4\pi\epsilon_0\rho_2}\hat{y} = \frac{4,810^{-9}10^9}{0,2}\hat{y} = -216\text{V.m}^{-1}\hat{y} \\ \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) &= -144\hat{y}\text{V.m}^{-1}\end{aligned}$$

On remarque que même si la ligne de charge 2 contient moins de charge que la ligne 1, son influence domine ici à cause de sa proximité du point de mesure.

- (c) Si l'on suppose maintenant que les deux fils de charges sont orientés le long de l'axe Ox , trouvez le champ électrique en $y = +0,2\text{m}$ et en $y = +0,6\text{m}$ sans effectuer de nouveaux calculs.

Solution : On obtient cette orientation en faisant une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe Oy . Comme le champ électrique est parallèle à $\hat{y}$ sur cette axe, le champ électrique n'est pas modifié. Ceci serait le cas par rotation sur n'importe quelle rotation autour de l'axe Oy d'ailleurs.

4. Un long cylindre, de rayon $a = 2\text{cm}$, est chargé avec une densité de charge uniforme ρ_0 en volume et en longueur (densité $\lambda_0 = 4\text{nC/m}$ en longueur, donc $\rho_0 = \frac{\lambda_0}{\pi a^2}$).

- (a) Trouver une expression pour le potentiel électrique en fonction de ρ en fixant le potentiel $V(a) = 0$. Quelles sont les surfaces équipotentielles pour cette distribution de charges ?

Solution : Le champ électrique pour $\rho > a$, on a :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho},$$

alors que pour $\rho < a$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{a^2} \hat{\rho}.$$

On peut calculer le potentiel par rapport au potentiel à la distance $\rho = a$:

$$V(\rho) - V(a) = \int_{\rho}^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Quand $\rho > a$:

$$V(\rho) - V(a) = \int_{\rho}^a \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho'} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho' = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho}^a \frac{d\rho'}{\rho'} = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a}$$

Quand $\rho < a$:

$$V(\rho) - V(a) = \int_{\rho}^a \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 a^2} \rho' \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho' = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_{\rho}^a \rho' d\rho' = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - \rho^2}{2a^2}$$

Dans tous les cas figure les surfaces d'équipotentiel sont de la forme $\rho = Cte$.

Dans la région, $\rho > a$, $V(\rho) < V(a)$, et dans la région $\rho < a$, $V(\rho) > V(a)$. Donc, en prenant $V(a) = 0$, on a $V(\rho) < 0$ dans la région $\rho > a$, et $V(\rho) > 0$ dans la région $\rho < a$.

- (b) Toujours en considérant que le potentiel est nul (référence) à la surface du cylindre, quelles sont les rayons des surfaces équipotentielles correspondant respectivement à 10V, 20V et 30V ? Sont-elles également espacées ?

Solution : On voit que le potentiel maximal :

$$V_{\max} = V(0) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 36V$$

$$\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - \rho^2}{2a^2} = V_0 \implies \rho = a \sqrt{1 - \frac{4\pi\epsilon_0}{\lambda_0} V_0} = a \sqrt{1 - \frac{V_0}{V_{\max}}}$$

Les valeurs des rayons d'équipotentiel sont :

$$\begin{aligned} \rho(30V) &= \frac{a}{\sqrt{6}} \\ \rho(20V) &= a \frac{2}{3} \\ \rho(10V) &= a \frac{\sqrt{\frac{13}{2}}}{3} \end{aligned}$$

et on voit qu'elles ne sont pas également espacées.

5. Sphère chargée

Soit une sphère de rayon R portant une densité volumique de charge uniforme ρ_0 .

- (a) Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances? Que pouvez-vous en conclure pour le champ électrique ?

Solution : La symétrie sphérique du problème se caractérise par le fait que tout plan contenant l'origine est un plan de symétrie, ce qui implique que l'orientation du champ est nécessairement selon $\hat{r}$. L'invariance par translation (c'est-à-dire par rotation) des coordonnées θ et ϕ indique que E_r ne peut pas dépendre de ces coordonnées. On en déduit que le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = E_r(r) \hat{r}$$

- (b) En utilisant la loi de Gauss, calculer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon R . En déduire le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace.

Solution : La surface de Gauss appropriée est une sphère de rayon r , et on trouve :

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

A l'extérieur de la sphère : la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement la charge totale de la sphère, $Q_{\text{sphère}}$, et l'éq.(5b) nous donne la dépendance du champ électrique sur r :

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_{\text{ext},r}(r) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{\epsilon_0} \\ E_{\text{ext},r}(r) &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi r^2 \epsilon_0}, \end{aligned} \quad (16)$$

où $Q_{\text{sphère}}$ est la charge de la sphère.

En se rappelant que charge total pour la sphère pleine s'écrit :

$$Q_{\text{sphère}} = \iiint_{V_{\text{sph}}} \rho dV = \rho_0 \iiint_{V_{\text{sph}}} dV = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0,$$

nous pouvons écrire le résultat de l'éq.(16) en fonction de la densité volumique de la sphère, ρ_0 :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext},r}(r) &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ \vec{E}_{\text{ext},r}(\mathbf{r}) &= \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad r > R \end{aligned}$$

A l'intérieur de la sphère : une surface sphérique est toujours la surface de Gauss adaptée, mais la charge à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique de rayon r s'écrit :

$$Q_{\text{int}}(r) = \iiint_{r' < r} \rho dV = \rho_0 \iiint_{r' < r} dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0,$$

où r est la distance radiale à laquelle on souhaite mesurer le champ (à ne pas confondre avec le rayon de la sphère) :

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot \hat{n} ds &= 4\pi r^2 E_{\text{int},r}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \\ E_{\text{int},r}(r) &= \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\vec{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{\mathbf{r}} \quad r < R$$

On remarque qu'à la surface de la sphère, on a $E(R^-) = \frac{R\rho_0}{3\epsilon_0}$ évalué juste à l'intérieur de la surface et $E(R^+) = \frac{Q_t}{4\pi R^2\epsilon_0} = \frac{1}{3} \frac{R\rho_0}{\epsilon_0}$. Donc le champ électrique est continu à la surface. Ceci est un exemple du règle générale *qu'en absence charge surfacique*, la composante normale du champ électrique est continue.

Le champ électrique déduit avec la loi de Gauss est :

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{\mathbf{r}} & r < R \\ \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & r > R \end{cases}$$

Le potentiel à l'extérieur de la sphère est :

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}}(r) &= - \int_{\infty}^r \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} \quad d\vec{\ell} = dr' \hat{\mathbf{r}}' + r' d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r' \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= - \int_{\infty}^r \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}' dr' \\ &= - \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Le potentiel à la surface de la sphère est :

$$V_{\text{ext}}(R) = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Le potentiel à l'intérieur de la sphère est :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}}(r) - V(R) &= - \int_R^r \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{\ell} \quad d\vec{\ell} = dr' \hat{\mathbf{r}}' + r' d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r' \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= - \int_R^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r' \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}' dr' \\ &= - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_R^r r' dr' = - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} [r'^2]_R^r \\ &= - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) \quad r < R \\ V_{\text{int}}(r) &= - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 + V(R) \\ &= - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 + \frac{2\rho_0}{6\epsilon_0} R^2 \\ &= \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \quad r < R \end{aligned} \tag{18}$$

- (c) Tracer les graphes $|\vec{E}(r)|$ et $V(r)$.
 (d) Reprendre les questions dans le cas d'une sphère chargée avec une densité surfacique σ_0 uniforme.

Solution :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext},r}(r) &= \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{4\pi r^2\epsilon_0} \\ \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{R^2}{r^2} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \quad r > R \end{aligned} \tag{19}$$

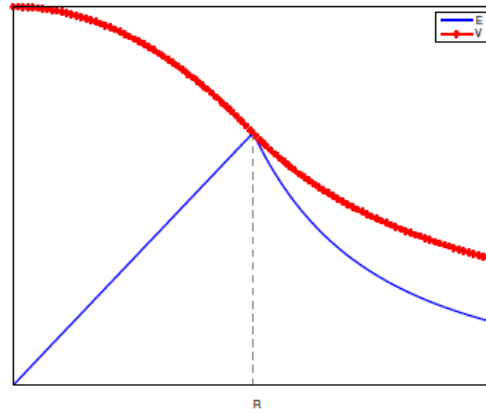


Figure 2: $E_r(r)$ et $V(r)$ pour une surface sphère de rayon R remplie d'une charge volumique homogène ρ_0 .

Figure 3: $E_r(r)$ et $V(r)$ d'une sphère de rayon R remplie d'une charge volumique homogène, ρ_0 .

$$\vec{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{0}} \quad r < R$$

$$V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R$$

$$V_{\text{ext}}(r) = V_{\text{ext}}(R) = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \quad r < R$$

On remarque que le potentielle à l'intérieur de la surface sphérique de charge est constant.

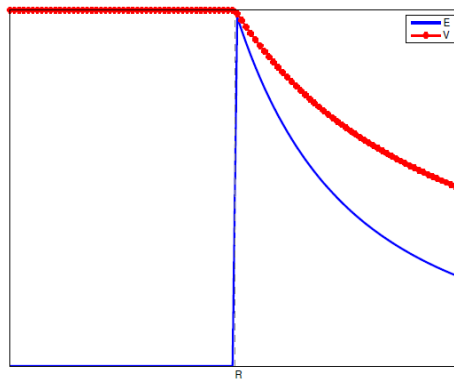


Figure 4: $E_r(r)$ et $V(r)$ pour une surface sphérique de rayon R possédant une densité surfacique σ_0 homogène.

6. Charge surfacique portée par un plan

On considère un plan (P) infini portant une densité surfacique de charges uniforme σ_0 , (figure 5a).

- (a) Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances?

Solution : Ce problème est détaillé dans le cours dans section -3.1.5). Il y a une symétrie par rapport au plan $z = 0$ ainsi qu'une symétrie par rapport à n'importe quel plan $x = \text{cst}$ ou $y = \text{cst}$. On a donc forcément $\vec{E} = E_z(x, y, z)\hat{z}$. Il y a de plus invariance selon x et y . On a donc $\vec{E} = E_z(z)\hat{z}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= E_z(z)\hat{z} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= E_z(z)\frac{z}{|z|}\hat{z}\end{aligned}$$

- (b) En utilisant la loi de Gauss, exprimer le champ électrostatique $\vec{E}$ à une distance h de part et d'autre du plan (P).

Solution :

$$2AE_z(z) = Q_{\text{int}} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- (c) Exprimer la discontinuité du champ à la traversée du plan en fonction de σ_0 et ϵ_0 .
(d) Tracer le graphe $E_z(z)$.

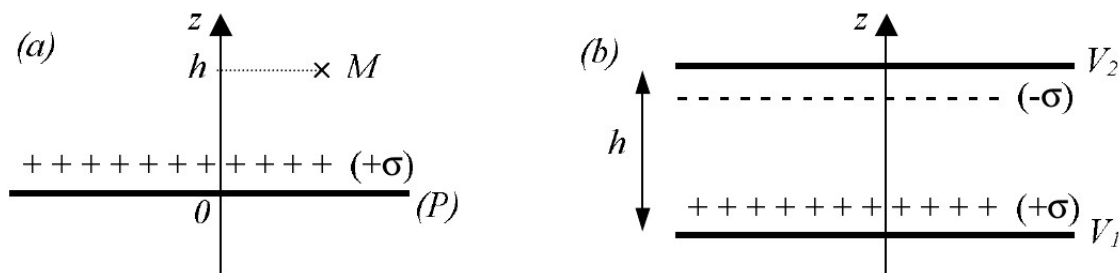


Figure 5: a) 1 plan chargé. b) Deux plans chargés

7. Deux plans chargés

Soient deux plans parallèles, situés à une distance h l'un de l'autre. Ils sont chargés avec des densités surfaciques de charge σ_0 pour l'un et $-\sigma_0$ pour l'autre (figure 5 b).

- (a) En exploitant la symétrie du problème et en utilisant l'équation de Laplace, calculer le potentiel V , en tout point situé entre les deux plans, en fonction de h et de leurs potentiels V_1 et V_2 .

La solution de l'équation de Laplace entre les armatures s'écrit :

$$V(z) = z \frac{V_2 - V_1}{h} + V_1 = V_1 - \frac{z}{h} \Delta V,$$

où $\Delta V \equiv U = V_1 - V_2$

- (b) Donner l'expression vectorielle du champ électrostatique, $\vec{E}$, en utilisant $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$.

Solution :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\hat{z} \frac{d}{dz} V(z) = \hat{z} \frac{V_1 - V_2}{h} = \hat{z} \frac{\Delta V}{h}$$

- (c) Trouver une autre expression du champ électrostatique $\vec{E}$ entre les 2 plans en utilisant le théorème de superposition et les résultats de l'exercice 6.

Solution :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Ces différentes méthodes sont consistantes puisque :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^h \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z} \cdot \hat{z} dz = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} h$$

- (d) En déduire l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux plans chargés.

Solution :

$$C = \frac{S\epsilon_0}{h}$$

La capacité du condensateur dépend donc de sa taille et de l'espacement entre les deux plaques, mais pas de la densité surfacique.

8. Une différence de potentiel de 480V est établie entre deux plaques métalliques parallèles. On considère que le potentiel d'une plaque est 480V et le potentiel de l'autre est 0V. La distance entre les deux plaques est de 1.70cm.

- (a) Tracer les surfaces équipotentielles qui correspondent à 0V, 120V, 240V, 360V et 480V.

Solution : Les équipotentielles sont forcément des plans $z = \text{cst}$, de part la configuration. D'après l'exercice précédent, on a :

$$V(z) = V_1 - \frac{z}{h} \Delta V \Rightarrow z = h \frac{V_1 - V(z)}{\Delta V}.$$

Donc

$$\begin{aligned} z_0 &= h = 1.7\text{cm} \\ z_{120} &= h = 1.7 \frac{480 - 120}{480} = 1.28\text{cm} \\ z_{240} &= h = 1.7 \frac{480 - 240}{480} = 0.85\text{cm} \\ z_{360} &= h = 1.7 \frac{480 - 360}{480} = 0.43\text{cm} \\ z_{480} &= 0\text{cm} \end{aligned}$$

- (b) Tracer les lignes de champ électrique. Commenter.

Solution : Les lignes de champs électriques sont elles orientées selon l'axe $\hat{z}$, elles sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Elles vont forcément dans le sens des potentiels décroissants.

Exercices Supplémentaires

9. Une sphère de masse $m = 1.5\text{g}$ et charge $q = 8.9 \times \mu\text{C}$ pend d'un plafond par un fil entre deux plaques parallèles verticales. Les deux plaques ont une densité de charge uniforme sur leur surface de $+\sigma$ et $-\sigma$ et sont espacées de $d = 5\text{cm}$. Quelle doit être la différence de potentiel entre les plaques pour que le fil soit incliné d'un angle $\theta = 30^\circ$ par rapport à la verticale ?

Solution : On met une sphère entre deux plaques parallèles verticales, attachée à mi-distance entre les deux armatures. On a donc un champ électrique qui est porté par l'axe $\hat{x}$, si on suppose que cet axe correspond à la normale aux deux plaques. L'axe $\hat{y}$ est le long des deux armatures. On fait un bilan des forces en présence : force d'attraction gravitationnelle, force électrostatique et force de tension du fil. Quand la sphère est au repos, on a donc :

$$\vec{F}_g + \vec{F}_e + \vec{T} = \vec{0}$$

ce qui en projetant sur les axes nous donne deux équations :

$$\begin{aligned} q \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - T \sin \theta &= 0 && \text{en projetant sur } \hat{x} \\ -mg + T \cos \theta &= 0 && \text{en projetant sur } \hat{y} \end{aligned}$$

donc, si on se rappelle que $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \Delta V/d$,

$$\begin{aligned} \frac{q\sigma_0}{\epsilon_0 mg} = \tan \theta &\implies \frac{q\Delta V}{mgd} = \tan \theta \\ \implies \Delta V = \frac{mgd \tan \theta}{q} &= \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \times 9.81 \times 0.05 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{8.9 \cdot 10^{-6}} = 47.7\text{V} \end{aligned}$$

10. Une charge q est située à l'un des coins arrière d'un cube comme indiqué sur la figure. Quel est le flux de $\vec{E}$ à travers la face ombrée ?
11. Deux charges positives identiques sont fixées sur l'axe z en $z = a$ et $z = -a$. Calculer leur potentiel sur un point M dans le plan xOy à une distance ρ de l'axe Oz , en déduire le champ électrique sur l'axe dans ce plan.

Solution :

$$\overrightarrow{OM}(\rho, \phi, 0) = \rho \hat{\rho}$$

$$\begin{aligned} V(\rho, \phi, 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|a\hat{z} + \rho\hat{\rho}|} + \frac{q}{|-a\hat{z} + \rho\hat{\rho}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(a\hat{z} + \rho\hat{\rho}) \cdot (a\hat{z} + \rho\hat{\rho})}} + \frac{q}{\sqrt{(-a\hat{z} + \rho\hat{\rho}) \cdot (-a\hat{z} + \rho\hat{\rho})}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} + \frac{q}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V(\rho) = -\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} V(\rho) \\ &= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (a^2 + \rho^2)^{-1/2} = \frac{2q\rho}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho} \end{aligned}$$

Par symétrie, $E_z = E_\phi = 0$.

$$\nabla V = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} V + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} V + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} V$$

12. Disque chargé

On considère un disque de rayon R_0 , d'axe (Ox) , chargé avec une densité de charge uniforme σ_0 .

- (a) Calculez le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'axe du disque. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}(z)$.

Solution : La solution pour le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{P})}{|\vec{PM}|} dS_P.$$

Il faut utiliser les coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_P(\rho,\phi)}{|\vec{PM}|} dS_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \frac{\sigma_P(\rho,\phi)}{|\vec{PM}|} \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

où

$$\vec{OP} = (\rho, \phi, 0) \quad \vec{OM} = (0, 0, z)$$

(Considérons un anneau de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$ centré sur le trou. La charge dq contenu dans cet anneau est $dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 2\pi\rho d\rho$)

Le potentiel sur l'axe z est donc :

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} d\rho \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Changement de variables :

$$\begin{aligned} u^2 &= \rho^2 + z^2 \\ u du &= \rho d\rho \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{u du}{u} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R du \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} u \Big|_{(z^2)^{1/2}}^{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{1/2} - (z^2)^{1/2} \right] \\ V(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{1/2} - (z^2)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

On peut connaître E_z sur l'axe z seulement :

$$\begin{aligned} E_z(z) &= -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \left[(z^2)^{1/2} + (R^2 + z^2)^{1/2} \right] \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right) \end{aligned}$$

On aurait pu calculer E_z de façon direct.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dq \cos \theta}{\rho^2 + z^2} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

S'il n'y avait pas de trou, on obtient avec le théorème de Gauss :

$$\mathbf{E}(z) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{\mathbf{z}}$$

Considérons un anneau de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$ centré sur le trou. La charge dq contenu dans cet anneau est :

$$dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 2\pi \rho d\rho$$

Le composant $\hat{\mathbf{z}}$ du champ dû à un anneau de charge $d\rho$ de rayon ρ centré sur la charge est :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \cos \theta}{(\rho^2 + z^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\sigma_0 2\pi \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

où :

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Le champ E_z est donc :

$$E_z = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

On obtient avec et le changement de variables :

$$u^2 = \rho^2 + z^2 \quad u du = \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{udu}{u^3} \\ &= \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{du}{u^2} = -\frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{u} \Big|_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

Une autre façon de faire ceci est en dérivant :

$$d(\cos \theta) = d\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) = -\frac{z}{2} 2\rho d\rho (\rho^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{z\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Le champ total est :

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{dq \cos \theta}{\rho^2 + z^2} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\
 &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_{z/\sqrt{z^2}}^{z/\sqrt{R^2+z^2}} d(\cos \theta) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos \theta \Big|_{z/\sqrt{z^2}}^{z/\sqrt{R^2+z^2}} \\
 &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]
 \end{aligned}$$

où nous avons effectué un changement de variable vers $\cos \theta$.

- (b) On suppose que R_0 devient grand devant x . Que devient alors $\vec{E}(x)$? Pouvait-on prédire ce résultat d'une autre façon?

Solution : On remarque que si $R_0 \rightarrow \infty$, on récupère le résultat d'un plan de charge infini.

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$$

- (c) On considère maintenant un plan percé d'un disque de rayon R_0 et uniformément chargé avec une densité de charge σ_0 . Calculez le champ électrostatique créé sur l'axe du disque.

Solution : Par superposition :

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \\
 &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

On remarque que E_z est maintenant continu puisque il ne transverse pas une charge surfacique.

Champs électriques créés par des conducteurs à l'équilibre

Éléments du cours :

Différence de potentiel :

Si l'on connaît le champ $\vec{E}(\vec{r})$ dans une région de l'espace, on peut déterminer la différence de potentiel électrique entre n'importe quelle paire de points A et B en effectuant l'intégrale de circulation le long de n'importe quel chemin reliant ces points:

$$U_{AB} \equiv V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (20)$$

Théorème de Coulomb : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}} \quad , \quad (21)$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur du conducteur.

Définition : La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \quad , \quad (22)$$

où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V . L'unité de la capacité est le Farad (symbole F) - unité fondamentale ($A^2.s^4.m^{-2}.kg^{-1}$).

Un condensateur est constitué de deux conducteurs, a et b appelés armatures, généralement en influence quasi-totale : . La capacité du condensateur est liée à la différence de potentiel entre les deux conducteurs selon :

$$\boxed{U_{ab} \equiv V_a - V_b = \frac{Q_a}{C}} \quad , \quad (23)$$

où Q_a est la charge électrique sur l'armature aa à l'équilibre. Cette capacité se mesure également en farads (symbole F). Notez que l'unité de ϵ_0 est $[F.m^{-1}]$, ce qui est utile pour vérifier les calculs.

1. Sphères conductrices chargées et effet de pointe

Une sphère S_1 , parfaitement conductrice, de rayon $R_1 = 9cm$, porte une charge Q_1 ; elle est placée dans le vide.

(a) Quelle est la distribution de charges?

Solution : La distribution de charge est surfacique car la sphère est conductrice. En effet, comme expliqué dans le cours, si il y avait une distribution volumique ρ , on aurait d'après le théorème de Gauss :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} dV = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad , \quad (24)$$

car le champ $\vec{E}$ est nul partout à l'intérieur d'un conducteur. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -). Toutes les charges non compensées se trouvent donc forcément à la surface du conducteur.

(b) Exprimer le champ à la surface de la sphère S_1 en fonction de Q_1 , R_1 et ϵ_0 puis avec σ , densité surfacique de charges, et ϵ_0 .

Solution :

$$\vec{E}(R_1 \hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

- (c) Donner le champ créé dans tout l'espace par cette distribution de charges. En déduire le potentiel dans tout l'espace.

Solution :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{E} = \vec{0} & r < R_1 \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} & r > R_1 \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} & r > R_1 \end{cases}$$

Une deuxième sphère conductrice, S_2 , de rayon $R_2 = 3\text{cm}$, initialement neutre, est maintenant reliée par un fil conducteur long et fin à la sphère S_1 précédente (figure 3). On supposera que le fil ne porte aucune charge et que les effets d'influence d'une sphère sur l'autre sont négligeables. Après connexion, les charges des deux sphères sont notées respectivement Q'_1 et Q'_2 .

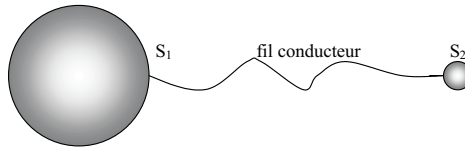


Figure 1: Deux sphères conductrices reliées

- (d) Exprimer Q'_1 et Q'_2 en fonction de R_1 , R_2 et de Q_1 .

Solution : Par conservation de charge, on sait que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 ,$$

c'est-à-dire qu'une fois que les deux sphères sont reliées par un fil conducteurs les charges peuvent se redistribuer sur les deux sphères mais la somme de leurs charges est égale à la charge Q_1 d'origine.

Le fait qu'ils sont reliés par un fil conducteur impose que leurs potentiels soient égales.

$$V' = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow Q'_1 R_2 = Q'_2 R_1 ; ,$$

Combinant ces deux équations :

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2 = Q'_1 + Q'_1 \frac{R_2}{R_1} = Q'_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow Q'_1 = Q_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} . \quad (25a)$$

et similairement

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2 = Q'_2 \frac{R_1}{R_2} + Q'_2 = Q'_2 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \Rightarrow Q'_2 = Q_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} . \quad (25b)$$

- (e) Calculer les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ à la surface des deux sphères; en déduire une relation entre le rapport $|\vec{E}_1|/|\vec{E}_2|$ et le rapport R_1/R_2 . Faire l'application numérique, que conclure?

Solution : Avec le théorème de Coulomb, on a

$$\begin{aligned} |\vec{E}_1| &= \sigma'_1 \\ |\vec{E}_2| &= \sigma'_2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} \quad (26)$$

Puisque les charges sont homogènes sur les surfaces surfaciques respectives, on a

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{Q_1}{4\pi} \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_1 + R_2} \\ \sigma'_2 &= \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q_1}{4\pi R_2^2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{Q_1}{4\pi} \frac{1}{R_2} \frac{1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les résultats des éqs.(25).

Mettant ces résultats dans l'équation (26), on a :

$$\frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = \frac{R_1}{R_2} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 3$$

2. Sphères concentriques

Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge q , (objet 1) est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse (objet 2), de rayon intérieur b et rayon extérieur c . La sphère creuse n'est pas chargée.

- (a) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère creuse ? Quelle est la charge sur la surface extérieure ?

Charge sur la surface extérieure de la sphère intérieure (1) : $Q_1^{\text{ext}} = q$

Charge sur la surface intérieure de la sphère creuse : $Q_1^{\text{int}} = -q$

Charge sur la surface intérieure de la sphère creuse : $Q_1^{\text{ext}} = q$

- (b) Déterminer le champ électrique dans tout l'espace.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & a < r < b \\ \vec{0} & b < r < c \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > c \end{cases}$$

- (c) Tracer une graphe de $|\vec{E}(\vec{r})|$.

- (d) Tracer les lignes de champ du système en considérant la charge q positive.

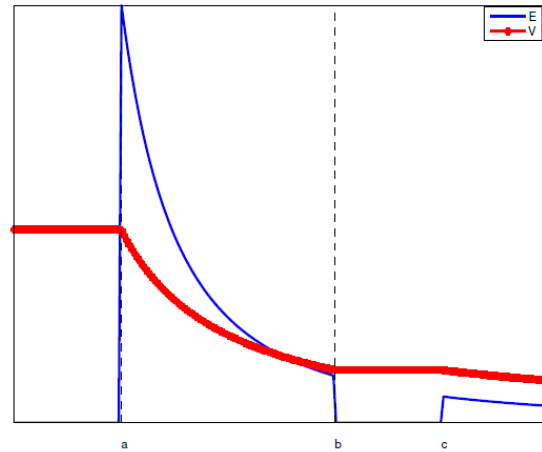


Figure 2: *Champ et potentiel avec $Q_1 = q$ et $Q_2 = 0$*

- (e) Calculer le potentiel à $r = 0$, $r = a$, $r = b$, et $r = c$. On considère la référence du potentiel à l'infini.

$$V \rightarrow \begin{cases} V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ V(b) = V(c) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \\ V(c) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \end{cases} .$$

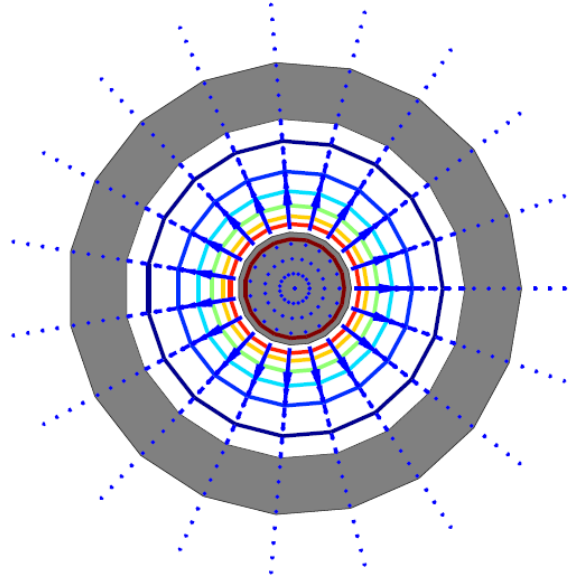


Figure 3: *Lignes de champ et surfaces de potentiel constant avec $Q_1 = q$ et $Q_2 = 0$*

On maintient la charge sur la sphère intérieure à $+q$, mais on relie maintenant la sphère conductrice creuse à la terre.

- (f) Déterminer le champ électrique entre les deux sphères et à l'extérieur de la deuxième sphère ($r > c$).
- (g) Calculer le potentiel $V(r)$.

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

- (h) Tracer les lignes de champ électrique et les surfaces équipotentiellles entre les sphères.
- (i) Calculer la capacité de ce système.

3. Capacité d'un câble coaxial

Un câble coaxial est formé de deux longs cylindres conducteurs concentriques, de longueur ℓ . Le cylindre extérieur, creux, de rayon intérieur b , porte une charge $-Q$. Le cylindre intérieur, plein, de rayon $a < b$, porte une charge $+Q$ (on utilise l'approximation de cylindres infinis : $\ell \gg b$).

- (a) Calculer le champ électrique entre les deux conducteurs.

$$E_\rho(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q_a}{\ell} \frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

où $\frac{Q_a}{\ell} = \frac{Q}{\ell}$ est la charge par unité de longueur sur le conducteur intérieur.

- (b) Calculer le potentiel $V(r)$ dans la région, $b > r > a$ en considérant $V = 0$ à $r = b$.

$$V(r) = \frac{Q_a}{2\pi\epsilon_0\ell} \ln \frac{b}{r}$$

- (c) Déterminer la différence de potentiel U_{ab} entre les deux conducteurs.

Solution :

$$\begin{aligned} U_{ab} = V_a - V_b &= \frac{Q_a}{2\pi\epsilon_0\ell} \ln \frac{b}{a} \equiv \frac{Q_a}{C} \\ \Rightarrow C &= \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (27)$$

- (d) Calculer la capacité par unité de longueur de ce système.

Solution :

$$C/\ell = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{2 \ln \frac{b}{a}} = \frac{10^7}{18 \times 10^{16} \ln 3} \simeq 5 \times 10^{-11} \text{F.m}^{-1}$$

Ce n'est pas demandé, mais des valeurs typiques sont : $a = 1\text{mm}$, $b = 3\text{mm}$, $\ell = 1\text{m}$ et avec : $4\pi\epsilon_0 = \frac{10^7}{c^2} \text{Fm}^{-1}$ on obtient A.N..

$$C/\ell = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{2 \ln \frac{b}{a}} = \frac{10^7}{18 \times 10^{16} \ln 3} \simeq 5 \times 10^{-11} \text{F.m}^{-1}$$

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

4. **Sphères creuses concentriques** Une sphère conductrice creuse, de rayon intérieur a et rayon extérieur b , est située à l'intérieur d'une autre sphère conductrice creuse de rayon intérieur c et rayon extérieur d . Les deux sphères sont concentriques. La sphère intérieure a une charge totale $+2q$ et la sphère extérieure a une charge totale $+4q$.

- (a) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère intérieure ? Quelle est la charge sur la surface extérieure de la sphère intérieure ? Mêmes questions pour la sphère extérieure.

Solution : Avant de calculer, on regarde ce qui se passe à l'équilibre. On sait que $Q_1^{\text{tot}} = +2q = Q_1^{\text{int}} + Q_1^{\text{ext}}$. Si on applique le théorème de Gauss avec une surface dont le rayon est tel que $a < r < b$, on trouve un champ nul, donc une charge Q_{int} nulle donc $Q_1^{\text{int}} = 0$. Par conséquent, toutes les charges sont sur la surface extérieure de la petite sphère creuse.

Pour la deuxième sphère creuse, on a comme d'habitude, $Q_2^{\text{int}} = -Q_1^{\text{tot}} = -2q$. Pour la charge totale, c'est toujours celle d'avant l'équilibre, donc, $Q_2^{\text{tot}} = +4q = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{\text{ext}}$. Donc $Q_2^{\text{ext}} = Q_2^{\text{tot}} - Q_2^{\text{int}} = +6q$.

- (b) Déterminer le champ électrique dans l'espace.

Solution : Pour calculer le champ électrique, on applique le théorème de Gauss. Par symétrie et invariance, on sait que $\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r)\hat{r}$.

- Pour $r < a$, il n'y a pas de charges, donc $\vec{E} = \vec{0}$.
- Pour $a < r < b$, on est dans un conducteur donc $\vec{E} = \vec{0}$.
- Pour $b < r < c$, la charge $Q_{\text{int}} = 2q$, donc :

$$E_r(r) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Pour $c < r < d$, on est dans un conducteur, donc $\vec{E} = \vec{0}$.
- Pour $d < r$, la charge $Q_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 = 2q + 4q = 6q$ et donc :

$$E_r(r) = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- (c) Tracer le graphe de $\vec{E}(\vec{r})$.

5. Une charge Q est placée à une distance, a , d'un plan conducteur infini tenu à un potentiel nul (par une mise à la terre). On peut montrer que le champ électrique entre le conducteur et la charge Q est le même que celui qu'on obtiendrait en enlevant le conducteur et en plaçant une charge opposée $-Q$ ("charge image") à une distance $2a$ de Q .

Solution : Il s'agit ici de la méthode des images: une technique très puissante et pratique quand il s'agit de charges au dessus de plans conducteurs et des sphères (et dans un moindre mesure pour des surfaces et plans diélectriques)

- (a) Montrer que le potentiel électrique est bien constant ($= 0$) sur le plan où se trouvait le conducteur.

Solution : On prend la surface du conducteur pour définir le plan $z = 0$, de sorte que la direction $\hat{z}$ soit perpendiculaire au conducteur. Le potentiel dans le plan $z = 0$ est :

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + (z + a)^2)^{1/2}} = 0$$

et on remarque immédiatement que

$$V(x, y, 0) = 0$$

En conséquence, des théorèmes mathématiques nous assurent que ceci est l'unique solution pour ce problème dans la région $z \geq 0$.

- (b) Montrer que le champ électrique sur le plan est perpendiculaire au plan.

Solution :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}}V(x, y, z)$$

Avec le calcul :

$$-\vec{\text{grad}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2)^{1/2}} = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2)^{3/2}} \\ \frac{(z \mp a)}{(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

on arrive à :

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

ce qui est bien entendu perpendiculaire au plan $z = 0$.

- (c) Calculer la densité de charges, $\sigma(x, y)$ sur le plan conducteur.

Solution : Sachant le champ $\vec{E}(x, y, 0)$ à la surface $z = 0$ du conducteur, $\sigma(x, y)$ se déduit directement du théorème de Coulomb qui nous dit qu'à la surface d'un conducteur : $\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$. La densité de charge surfacique est donc :

$$\sigma(x, y) = -\frac{2Qa}{4\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{Qa}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}},$$

où dans la dernière égalité, nous avons adopté des coordonnées cylindriques. On remarque bien que ce résultat est conforme avec notre intuition.

- (d) Calculer la charge totale (induite par Q) sur le plan.

Solution :

$$\begin{aligned} Q_{\text{ind}} &= \iint \sigma(x, y) dS = - \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Qa}{2\pi(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= -Qa \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = -Qa \int_a^\infty \frac{du}{u^2} = Qa \left[\frac{1}{u} \right]_a^\infty = -Q, \end{aligned}$$

où nous utilisons le fait que $dS = \rho d\rho d\phi$ et effectuons le changement de variable, $u^2 = \rho^2 + a^2$ et le fait que $u du = \rho d\rho$.

Le résultat trouvé est enfin logique. Une charge $+Q$ située au-dessus d'un plan conducteur relié à la terre va induire une charge $-Q$ à la surface, neutralisant ainsi le champ $\vec{E}$ à l'intérieur du conducteur. On peut dire que la charge $+Q$ est en influence totale avec le plan conducteur relié à la terre.