Induction

Éléments du cours :

Quand on considère deux circuits en proximité, le flux magnétique à travers des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ s'appuyant respectivement sur ces circuits s'écrivent respectivement :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$
$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

où L_i sont les auto-inductances des circuits et M, leur inductance mutuelle.

1. **Inductance mutuelle - transformateur**

On considère un solénoïde de section circulaire, de rayon R_1, de longueur ℓ_1, et constitué de N_1 spires. A l'intérieur de celui-ci, on place un deuxième solénoïde de rayon R_2, de longueur ℓ_2, et constitué de N_2 spires.

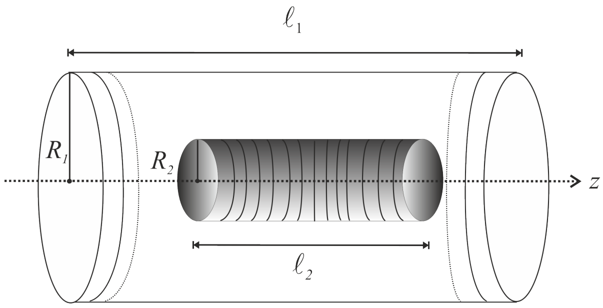

Figure 1: Inductance mutuelle de deux solénoïdes.

(a) Calculer l'inductance mutuelle, M, entre les deux solénoïdes en utilisant l'approximation de solénoïdes infinis.

Solution : Dans l'approximation de solénoïdes infinis, on obtient les champs $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ respectivement :

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \hat{\boldsymbol{z}}\mu_0 n_1 I_1 = \hat{\boldsymbol{z}}\mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} I_1 \tag{1}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \hat{\boldsymbol{z}}\mu_0 n_2 I_2 = \hat{\boldsymbol{z}}\mu_0 \frac{N_2}{\ell_2} I_2 \tag{2}$$

Bien qu'il n'est pas évident comment déterminer le flux de $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ à travers le circuit 1 produit par un courant, I_2 dans le circuit 2, on peut facilement déterminer le flux de $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ à travers circuit 2 créé par un courant I_1 dans le circuit 1 :

$$\Phi_{1\to 2} = \pi N_2 R_2^2 \left|\vec{\boldsymbol{B}}_1\right| = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} I_1 \equiv M_{21} I_1$$

donc on peut conclure que l'inductance mutuelle est :

$$M = M_{21} = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_1 N_2}{\ell_1}$$

(b) Exprimer M dans le cas où $\ell_2 \to \ell_1$ et $R_2 \to R_1$, mais avec $N_1 \neq N_2$.

Solution :

$$M \to \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \,. \tag{3}$$

(c) On se rappelle que dans la mesure où les résistances des fils sont négligeables, les tensions aux bornes des solénoïdes s'expriment (dans la convention récepteur):

$$\begin{aligned} U_1(t) &= L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + M \frac{dI_2(t)}{dt} \\ U_2(t) &= L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + M \frac{dI_1(t)}{dt} \end{aligned} \tag{4}$$

En prenant le cas étudié en b), calculer le rapport $U_2(t)/U_1(t)$ en fonction de N_1 et N_2. Voyez-vous une application intéressante ?

Solution :

Si nous traitons d'abord la bobine 1 toute seule, la valeur du champ magnétique trouvé en l'éq.(1), nous obtenons que le flux magnétique à travers chacune des N_1 spires de cette bobine est égale à :

$$\Phi_{1,\text{spire}} = \iint_S \vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} dS = \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} \pi R_1^2 I_1$$

Le flux total à travers la bobine est donc :

$$\Phi_{1,\text{bobine}} = N_1 \Phi_{1,\text{spire}} = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell_1} \pi R_1^2 I_1$$

En comparant ceci avec l'expression de l'éq.(**??**) (avec $I_2 = 0$), on déduit l'expression de l'inductance propre de la bobine 1 :

$$L_1 = \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1^2}{\ell_1} \tag{5}$$

Les mêmes considérations pour la bobine 2 nous donne l'inductance propre de la bobine 2:

$$L_2 = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_2^2}{\ell_2} \tag{6}$$

Mettant les relations de l'éq.(5), l'éq.(6), dans l'éq.(4), on obtient :

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1^2}{\ell_1} \frac{dI_1(t)}{dt} + \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \frac{dI_2(t)}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{\ell_1} \left[N_1^2 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_1 N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \\ &= N_1 \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{\ell_1} \left[N_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \\ U_2(t) &= \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_2^2}{\ell_1} \frac{dI_2(t)}{dt} + \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{\ell_1} \frac{dI_1(t)}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{\ell_1} \left[N_2^2 \frac{dI_2(t)}{dt} + N_1 N_2 \frac{dI_1(t)}{dt} \right] \\ &= N_2 \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{\ell_1} \left[N_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \end{aligned} \tag{7}$$

Le rapport est donc :

$$\frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

La grande importance de ce résultat est qu'il est indépendant des courants, $I_1(t)$, $I_2(t)$ et leurs variations dans le temps. Ceci implique que le rapport des tensions des deux circuits reste fixe, indépendamment des variations de résistances dans les circuits. Notamment : chaque fois que vous allumer n'importe quelle dispositif électrique (lustres, machines, etc), vous êtes en train de modifier la résistance d'un circuit. Il est impératif pour les réseaux électrique que les transformateurs gardent les mêmes rapports de tension lors de ces changements.)

2. Considérer un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ uniforme et constant dans l'espace. Trouver un potentiel vecteur $\vec{\boldsymbol{A}}$ dont le champ magnétique dérive, c'est-à-dire $\vec{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$. Votre solution, est-elle unique ?

Solution :

On adopte des axes telle que $\vec{\boldsymbol{B}} = B\,\hat{\boldsymbol{z}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}} &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = B\,\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{8}$$

Ceci nous donne les 3 équations

$$\Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

A cause de l'invariance en z, on a

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

impliquant que A_z est constant :

$$A_z = C_1 \ ,$$

Il nous reste qu'à déterminer A_y et A_z tel que :

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B \tag{9}$$

. La solution de cette équation n'est pas unique. Si on prend arbitrairement, $\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = B \ ,$$

qui par intégration nous donne la solution :

$$A_y\,(x) = Bx + C_2 \qquad A_x\,(x) = C_3$$

avec C_2 et C_3 comme constants d'intégration. Puisque C_1, C_2 et C_3 sont tous arbitraire, il est claire que le potentiel vecteur n'est pas unique. On a donc le droit de simplifier notre solution en prenant $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ afin que notre choix pour $\vec{\boldsymbol{A}}$, désormais noté $\vec{\boldsymbol{A}}_1$ s'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{A}}_1 = (0, Bx, 0) \tag{10}$$

La nature arbitraire de $\vec{A}$ ne s'arrête pas la. On peut de la même manière vérifier également vérifier que :

$$\vec{A}_2 = (-By, 0, 0) \tag{11}$$

(obtenu en prenant $\frac{\partial A_y}{\partial x} = 0$) est une toute aussi bonne choix pour le potentiel vecteur. Même la condition imposée par la jauge de Coulomb ne suffit pas afin d'imposer un choix par rapport à l'autre puisque,

$$\text{div}\,\vec{A}_1 = \text{div}\,\vec{A}_2 = 0 \tag{12}$$

pour les deux choix.

Encore un autre possibilité est la solution $\vec{A}_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right)$, donc :

$$\vec{A}_3 = \frac{B}{2}(-y, x, 0) = \frac{B\rho}{2}(-\sin\phi, \cos\phi, 0) = \frac{B\rho}{2}\widehat{\boldsymbol{\phi}} \tag{13}$$

où nous sommes passé en coordonnées cylindriques. Cette dernière choix de $\vec{A}_3(\rho) = \frac{B\rho}{2}\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ est plus symétrique que $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$, et on le préfère en générale, mais en générale n'importe quelle forme de $\vec{A}$ est acceptable du moment que le champ magnétique obtenu par $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{A}$ n'est pas modifié. La présence de cette ambiguïté ne devrait pas être perçue comme un défaut, mais plutôt comme une propriété essentielle de la théorie de l'électromagnétisme, appelée *liberté de jauge*. Cette caractéristique se manifeste dans toutes les théories des forces fondamentales formulées à ce jour.

3. **Générateur - Cadre tournant**

Une bobine plate, rectangulaire, et indéformable, de côtés $a = 20\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, est constituée d'un conducteur cylindrique de diamètre $d = 1\,\text{mm}$, et de résistivité $\eta = 1.6\,10^{-8}\,\Omega.\text{m}$ (voir eq.(6.12) de la polycopié). Elle tourne avec une fréquence de 600 tours par minute autour d'un axe vertical situé dans le plan de la bobine. La bobine est placée dans un champ magnétique d'intensité $B = 1\,\text{T}$, perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 2).

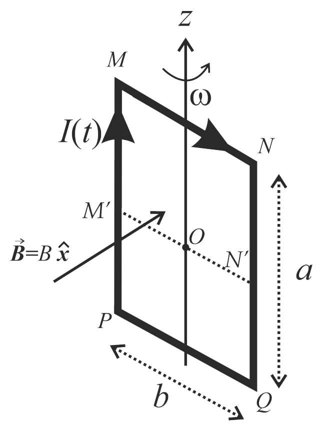

Figure 2: *Bobine rectangulaire dans un champ magnétique*

(a) Quelle est l'expression du courant circulant dans la bobine? On calculera sa valeur efficace, I_{eff}.

Solution : On définit l'axe $\widehat{\boldsymbol{z}}$ comme l'axe de rotation du cadre. On défini un temps $t = 0$ tel que la direction $\widehat{\boldsymbol{n}}$ normale au circuit tourne comme :

$$\widehat{\boldsymbol{n}}(t) = \widehat{\boldsymbol{x}}\cos\omega t + \widehat{\boldsymbol{y}}\sin\omega t\ .$$

Puisque la fréquence de la bobine est :

$$f = 600 \text{ tours/minute} = 600 \, \frac{\text{tours}}{\text{minute}} \times \frac{1 \text{ minute}}{60 \text{ seconds}} = 10 \text{tours/seconde} = 10 \text{s}^{-1} \,,$$

sa pulsation (fréquence angulaire) est donc $\omega = 2\pi f = 10 \times 2\pi$ radians s^{-1}.
Puisque l'énoncé spécifie que $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{cte}$ est perpendiculaire à $\widehat{\boldsymbol{z}}$, on peut le choisir d'être orienté selon l'axe $\widehat{\boldsymbol{x}}$, c.-à-d. $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B\widehat{\boldsymbol{x}}$. Le flux magnétique du est donc donné par :

$$\Phi(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}(t) \, S = B\widehat{\boldsymbol{x}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}(t) \, ab = Bab\cos(\omega t) \;.$$

Pour une bobine en mouvement dans un champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ constant, la force magnétique de l'équation de Lorentz sur les charges libres induit résulte en un champ une force électromotrice dont la valeur est donné par le "règle du flux" *i.e.* que la force électromotrice du circuit est égale à $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ où Φ est le flux à travers le circuit :

$$e(t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -Bab\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = Bab\omega \sin \omega t$$

La résistance totale du circuit est :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\eta \times 2(a+b)}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\eta \times 6\, 10^{-1}}{\pi \left(\frac{10^{-3}}{2}\right)^2} = \frac{\eta 24 \times 10^{-1}}{\pi 10^{-6}} = \frac{24 \times \eta \times 10^5}{\pi} \\ &= \frac{24 \times 1.6 \times 10^{-3}}{\pi} \simeq 12.2 \times 10^{-3} \Omega \end{aligned}$$

Le courant dans le circuit est :

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{e(t)}{R} = \frac{Bab\omega}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \\ I_0 &= \frac{Bab\omega}{R} = \frac{BS\omega}{R} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 10 \times 2\pi}{12.2 \times 10^{-3}} = \frac{200 \times 2\pi}{12.2} \simeq 103 \text{A} \end{aligned}$$

La valeur efficace, I_{eff} du courant est par définition :

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}}^2 &\equiv \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt = \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt \\ &= \frac{I_0^2}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)\,dt = \frac{I_0^2}{2T}\left[t - 2\omega \sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{I_0^2}{2} \,, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ et la relation :

$$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t \longrightarrow \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \;.$$

La valeur efficace du courant oscillant est donc :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 73\text{A} \;.$$

(b) Décrivez l'action mécanique de $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ sur la spire.
Solution : Puisque il y'a du courant, $I(t)$ dans un champ magnétique, il y a de la Force de Laplace sur la bobine. Puisque le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ est constant dans le temps, le travail fait par la Le théorème de Maxwell donne :

$$\frac{d\mathcal{W}_L}{dt} = I(t)\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -Ie(t) = -I^2 R \,.$$

Le travail fourni est identique à celle dissipée par l'effet joule dans la bobine. Si on n'utilise pas le théorème de Maxwell, on doit revenir aux forces de Laplace et le problème est bien plus difficile.