Electricité et magnétisme - TD n°1
Loi de Coulomb

1. **Force électrique**

   Calculer le rapport entre force gravitationnelle et électrique entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. On considère que la distance entre le proton et l'électron est a_0. *A.N.* : $a_0 \simeq 0,53 \times 10^{-10} m$), $G \simeq 6.67 \times 10^{-11}$SI, [$\mathrm{Nkg^{-2}m^2}$], $m_p \simeq 1,672 \times 10^{-27}$kg, $m_e \simeq 0,91 \times 10^{-30}$kg, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9$SI, $q_e = 1,6 \times 10^{-19}$C.

2. Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 sont alignées le long de l'axe Oy du repère $R(Oxy)$. La charge q_1 est située au point $A(x = 0, y = 0.30m)$ et la charge q_2 est située au point $B(x = 0, y = -0.30\mathrm{m})$. Une troisième charge Q est située au point $M(x = 0.40\mathrm{m}, y = 0)$.

   (a) Déterminer le vecteur force exercée par q_1 et q_2 sur la charge Q. Pour cela, vous ferez un dessin et vous calculerez les composantes de la force dans le repèere $R(Oxy)$.

   (b) Calculer l'angle θ que fait la force avec l'axe Ox.

   (c) Calculer le module de la force.

   A.N. : $q_1 = q_2 = 2\mu\mathrm{C}$; $Q = 4\mu\mathrm{C}$.

3. Trois charges ponctuelles identiques q sont situées aux trois sommets d'un carré de coté L. Trouver la direction et le module de la force exercée sur une charge ponctuelle $-3q$ située :

   (a) au centre du carré.

   (b) au sommet vacant du carré.

4. Deux boules de liège identiques de masse $m = 30$g et charge q pendent d'un plafond par des fils de longueur identique $\ell = 15$cm. Les deux fils sont attachés au même point O du plafond. Soit θ=30° l'angle entre les fils et la verticale à l'équilibre. Trouver la charge de chaque sphère. Qu'arrive-t-il si les charges ne sont pas égales ?

5. **Champ électrique**

   La différence de potentiel entre deux plaques parallèles est $\Delta V = 100$V, leur séparation $d = 1$cm, leur longueur $L = 2$cm. Un électron est projeté avec une vitesse $v_0 = 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ entre les plaques, avec une vitesse initiale parallèle aux deux plaques. On suppose que le champ électrique entre les plaques est uniforme et dirigé vers le haut, et le champ à l'extérieur des plaques est nul.

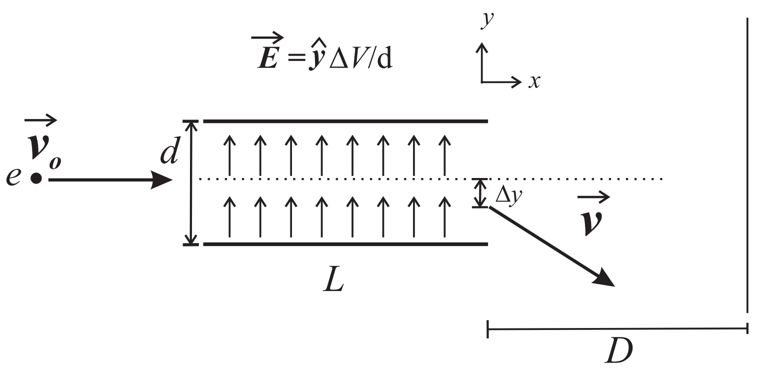


FIGURE 1 – *Déviation d'un électron par un champ électrostatique*

   (a) Trouver sa déviation transverse, Δy, et sa vitesse transverse, v_y, quand il émerge des plaques.

(b) Un écran est placé à $D = 0,5\,\text{m}$ du bord final des plaques et perpendiculairement à la vitesse initiale. Trouver la position de l'impact de l'électron sur l'écran.

6. **Dipôle électrique**
Un dipôle électrique est constitué de deux charges ponctuelles alignées le long de l'axe Ox : $q_1 = -2.5\text{nC}$ situé au point $A(x = -10\text{cm})$ et $q_2 = +2.5\text{nC}$ situé au point $B(x = +10\text{cm})$. Déterminer le champ électrique :
(a) au point $(x = 20cm, y = 0)$.
(b) au point $(x = 0, y = 10\text{cm})$.

7. **Quadrupôle électrique** Trois charges ponctuelles sont alignées le long de l'axe Oy : une charge q située à $y = a$, une charge $-2q$ située à l'origine et une charge q située à $y = -a$. Un tel arrangement constitue un quadrupôle électrique.
(a) Calculer le champ électrique sur l'axe Ox.
(b) Que devient l'expression du champ électrique pour $x \gg a$? Comparer cette expression avec celle d'une charge ponctuelle et celle d'un dipôle électrique.

Exercices Supplémentaires

8. **Expérience de Millikan**
Des gouttelettes d'huile de rayon r sont pulvérisées dans un condensateur à l'intérieur duquel le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ est constant. Une gouttelette se déplace par effet de la gravité, du champ et de la friction visqueuse(voir figure 2). On supposera que la force de frottement est donnée par la formule : $\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\eta = 1,8.10^{-5}$ Pa.s est la viscosité de l'air. On néglige la poussée d'Archimède.

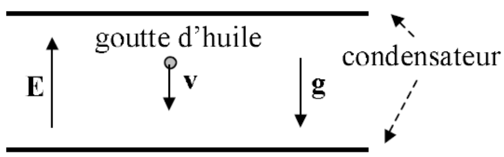


FIGURE 2 – *Expérience de Millikan*

(a) Calculer la vitesse (en fonction du temps) de la goutte lorsque le champ électrique est nul. On suppose que la vitesse initiale de la goutte est nulle.
(b) Déduire l'existence d'une vitesse limite v_l.
(c) On suppose que la gouttelette est sphérique et a une masse volumique ρ_h uniforme. Calculer le rayon de la gouttelette en fonction de ρ_h et v_l.
(d) On applique un champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ (colinéaire à la gravité) jusqu'à ce que la gouttelette se trouve à l'arrêt. Exprimer la charge d'une gouttelette en fonction uniquement du champ électrique, de η, du rayon r et de la vitesse limite, v_l. Donner sa valeur numérique.
A.N. : La masse volumique de l'huile est $\rho_h = 1,05.10^3\text{kg.m}^{-3}$ $E = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\right| = 482\,\text{kV.m}^{-1}$. $v_l = 4,12 \times 10^{-4}\,\text{m.s}^{-1}$.

9. **Rappel : Coordonnées cylindriques et sphériques**

   Soit (O, x, y, z) un repère en coordonnées cartésiennes, de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{x}}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}$, $\widehat{\boldsymbol{z}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_x$, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_y$, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_z$), et (O, r, ϕ, z) un repère en coordonnées cylindriques de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$, $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$, $\widehat{\mathbf{z}}$ (c.-à-d. $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_\rho$, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_\phi$, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_z$).

   (a) Exprimer x et y en fonction de ρ et ϕ

   (b) Exprimer $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ et $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ dans la base $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}})$.

   (c) Donner l'expression du volume élémentaire $d\mathcal{V}$ en coordonnées cylindriques.

   (d) Reprendre les questions (a) à (c) pour un repère (O, r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques, de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{r}}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$.

10. **Calotte sphérique chargée**

    Soit une calotte sphérique chargée, de centre O, et d'axe de symétrie (Oz). Le rayon de la sphère est R, et le disque fermant la calotte est vu depuis O sous un angle θ_0 (figure 3). Calculer la charge totale de la calotte dans le cas où :

    (a) la charge est répartie uniformément en volume avec une densité ρ_0.

    (b) la charge est répartie uniformément en surface, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte, avec une densité σ_0.

    (c) la charge est répartie en surface avec densité $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte (θ est la colatitude, en coordonnées sphérique).

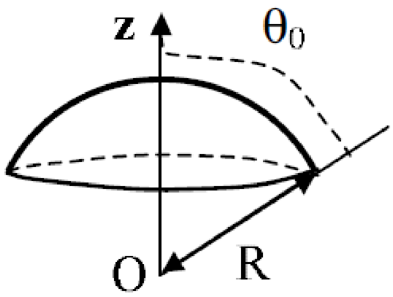


FIGURE 3 – *Calotte sphérique chargée*

Electricité et magnétisme - TD n°2

Théorème de Gauss - Champ électrique créé par des distributions de charges données

1. **Loi de Gauss**
   (a) Dans une région de l'espace, le champ électrique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ est uniforme. Utiliser la loi de Gauss pour prouver que cette région doit être électriquement neutre. Est-ce que le réciproque est valide, c'est-à-dire dans une région de l'espace où il n'y a pas de charge le champ électrique doit-t-il être uniforme ?
   (b) Dans une région de l'espace, la densité volumique de charge ρ est uniforme et positive. Est-ce que $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ peut être uniforme dans cette région ?
2. **Charge linéique**
   On considère un long fil rectiligne portant une densité de charge uniforme λ (approximation du fil infini).
   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?
   (b) Déterminer le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ créé en un point M situé à une distance ρ de la ligne.
   (c) A partir de l'expression intégrale du champ électrostatique de Coulomb.
   (d) En utilisant le théorème de Gauss.
   (e) En déduire le potentiel $V(\rho)$ au point M.
3. Un fil rectiligne infini aligné le long de l'axe Ox a une charge par unité de longueur de 4.80μC/m. Un deuxième fil rectiligne, parallèle avec l'axe Ox et situé à $y = +0.4$m, a une charge linéique de -2.40μC/m. Calculer le champ électrique en $y = +0.2$m et en $y = 0.6$m.
4. Un cylindre long, de rayon $R = 2$cm, est chargé avec une densité de charge uniforme ρ_0 en volume et en longueur (densité λ_0=1.5nC/m en longueur)
   (a) Quelles sont les surfaces équipotentielles pour ce cylindre ?
   (b) En considérant que le potentiel est nul (référence) à la surface du cylindre, quelles sont les rayons des surfaces équipotentielles correspondant à 10V, 20V et respectivement 30V ? Sont-elles également espacées ?
5. **Sphère chargée**
   Soit une sphère de rayon R portant une densité volumique de charge uniforme ρ.
   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?
   (b) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon R. En déduire le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace.
   (c) Tracer les graphes $|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})|$ et $V(r)$.
   (d) Reprendre les questions dans le cas d'une sphère chargée avec une densité surfacique σ uniforme.
6. **Charge surfacique portée par un plan** On considère un plan (P) infini portant une densité surfacique de charges uniforme σ (figure 1a).
   (a) Quelle est la symétrie du problème ? Quelles sont les invariances ?
   (b) En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ à une distance $z = \pm h$ de part et d'autre du plan (P).
   (c) Exprimer la discontinuité du champ à la traversée du plan en fonction de σ et ϵ_0.
   (d) Tracer le graphe $E_z(z)$.

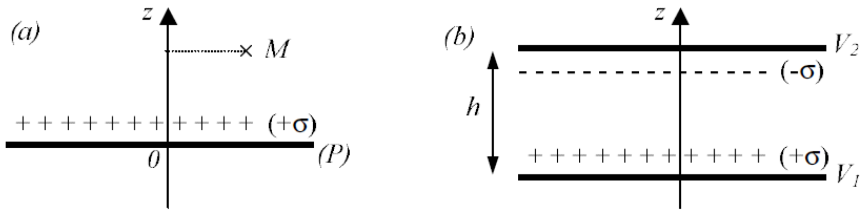


FIGURE 1 – *a)1 plan chargé. b)Deux plans chargés*

7. **Deux plans chargés**
   Soient deux plans parallèles, situés à une distance h l'un de l'autre. Ils sont chargés avec des densités surfaciques de charge σ pour l'un et $-\sigma$ pour l'autre (figure 1 b).
   (a) En exploitant la symétrie du problème et en utilisant l'équation de Laplace, calculer le potentiel V, en tout point situé entre les deux plans, en fonction de h et de leurs potentiels V_1 et V_2.
   (b) Donner l'expression vectorielle du champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ en utilisant $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(V)$.
   (c) Trouver une autre expression du champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ entre les 2 plans en utilisant le théorème de superposition et les résultats de l'exercice 6.
   (d) En déduire l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux plans chargés.
8. Une différence de potentiel de 480V est établie entre deux plaques métalliques parallèles. On considère que le potentiel d'une plaque est 480V et le potentiel de l'autre est 0V. La distance entre les deux plaques est de 1.70cm.
   (a) Tracer les surfaces équipotentielles qui correspondent à 0V, 120V, 240V, 360V et 480V.
   (b) Tracer les lignes de champ électrique. Commenter.
9. Une sphère de masse $m = 1.5$g et charge $q = 8.9 \times \mu$C pend d'un plafond par un fil entre deux plaques parallèles verticales. Les deux plaques ont une densité de charge uniforme sur leur surface de $+\sigma$ et $-\sigma$ et sont espacées de $d = 5$cm. Quelle doit être la différence de potentiel entre les plaques pour que le fil soit incliné d'un angle $\theta = 30°$ par rapport à la verticale ?

Exercices Supplémentaires

10. **Disque chargé**

    On considère un disque de rayon R_0, d'axe (Ox), chargé avec une densité de charge uniforme σ.

    (a) Calculez le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'axe du disque. En déduire le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x)$.

    (b) On suppose que R_0 devient grand devant x. Que devient alors $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(x)$? Pouvait-on prédire ce résultat d'une autre façon ?

    (c) On considère maintenant un plan percé d'un disque de rayon R_0 et uniformément chargé avec une densité de charge σ. Calculez le champ électrostatique créé sur l'axe du disque.

Electricité et magnétisme - TD n°3

Champs électriques créés par des conducteurs à l'équilibre

1. **Sphères conductrices chargées et effet de pointe**

   Une sphère S_1, parfaitement conductrice, de rayon $R_1 = 9$cm, porte une charge Q_1 ; elle est placée dans le vide.

   (a) Quelle est la distribution de charges ?

   (b) Exprimer le champ à la surface de la sphère S_1 en fonction de Q_1, R_1 et ϵ_0 puis avec σ, densité surfacique de charges, et ϵ_0.

   (c) Donner le champ créé dans tout l'espace par cette distribution de charges. En déduire le potentiel dans tout l'espace.

   Une deuxième sphère conductrice, S_2, de rayon $R_2 = 3$cm, initialement neutre, est maintenant reliée par un fil conducteur long et fin à la sphère S_1 précédente (figure 1). On supposera que le fil ne porte aucune charge et que les effets d'influence d'une sphère sur l'autre sont négligeables. Après connexion, les charges des deux sphères sont notées respectivement Q'_1 et Q'_2.

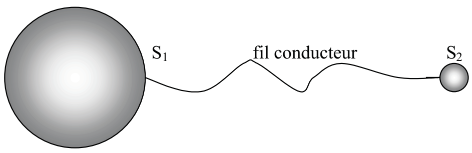


FIGURE 1 – *Deux sphères conductrices reliées*

   (d) Exprimer Q'_1 et Q'_2 en fonction de R_1, R_2 et de Q_1.

   (e) Calculer les champs $\vec{\boldsymbol{E}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ à la surface des deux sphères ; en déduire une relation entre le rapport $|\vec{\boldsymbol{E}}_1|/|\vec{\boldsymbol{E}}_2|$ et le rapport R_1/R_2. Faire l'application numérique, que conclure ?

2. **Sphères concentriques**

   Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge q, est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse, de rayon intérieur b et rayon extérieur c. La sphère creuse n'est pas chargée.

   (a) Déterminer le champ électrique dans tout l'espace.

   (b) Tracer le graphe $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

   (c) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère creuse ? Quelle est la charge sur la surface extérieure ?

   (d) Tracer les lignes de champ du système en considérant la charge q positive.

   (e) Calculer le potentiel à $r = 0$, $r = a$, $r = b$, et $r = c$. On considère la référence du potentiel à l'infini.

   On considère maintenant que la charge de la sphère intérieure est $+q$ et la charge de la sphère conductrice creuse est $-q$.

   (f) Déterminer le champ électrique entre les deux sphères et à l'extérieur de la deuxième sphère ($r > c$).

   (g) Calculer le potentiel $V(r)$.

(h) Tracer les lignes de champ électrique et les surfaces équipotentielles entre les sphères.

(i) Calculer la capacité de ce système.

3. Une sphère conductrice creuse, de rayon intérieur a et rayon extérieur b, est située à l'intérieur d'une autre sphère conductrice creuse de rayon intérieur c et rayon extérieur d. Les deux sphères sont concentriques. La sphère intérieure a une charge totale $+2q$ et la sphère extérieure a une charge totale $+4q$.

(a) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère intérieure ? Quelle est la charge sur la surface extérieure de la sphère intérieure ? Mêmes questions pour la sphère extérieure.

(b) Déterminer le champ électrique dans l'espace.

(c) Tracer le graphe de $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

4. **Capacité d'un câble coaxial**

Un câble coaxial est formé de deux longs cylindres conducteurs concentriques, de longueur l. Le cylindre extérieur, creux, de rayon intérieur b, porte une charge $-Q$. Le cylindre intérieur, plein, de rayon $a < b$, plein, porte une charge $+Q$ (on utilise l'approximation de cylindres infinis : $l \gg b$).

(a) Calculer le champ électrique entre les deux conducteurs.

(b) Calculer le potentiel $V(r)$ en considérant $V = 0$ à $r = b$.

(c) Déterminer la différence de potentiel V_{ab} entre les deux conducteurs.

(d) Calculer la capacité par unité de longueur de ce système.

Exercices supplémentaires

1. Une charge Q est placée à une distance a d'un plan conducteur infini tenu à un potentiel nul (par une mise à la terre). On peut montrer que le champ électrique entre le conducteur et la charge Q est le même que celui qu'on obtiendrait en enlevant le conducteur et en plaçant une charge opposée $-Q$ ("charge image") à une distance $2a$ de Q.

(a) Montrer que le potentiel électrique est bien constant ($= 0$) sur le plan où se trouvait le conducteur.

(b) Montrer que le champ électrique sur le plan est perpendiculaire au plan.

(c) Calculer la densité de charges sur le plan conducteur.

(d) Calculer la charge totale (induite par Q) sur le plan.

Électricité et magnétisme - TD n°4

Énergie électrostatique

1. **Charge traversant un potentiel**

   (a) Quelles sont l'énergie cinétique en Joules et la vitesse en m/s d'un noyau de oxygène ^{16}O (8 protons, 8 neutrons) après une accélération par une différence de potentiel de 10^7 V ?

2. **Énergie potentielle**

   (a) Trois charges ponctuelles identiques avec $q = 1.2\mu C$ sont situées aux trois sommets d'un triangle équilatéral de coté 0.5m. Calculer l'énergie potentielle du système.

   (b) Quatre électrons sont situés aux sommets d'un carré de coté 10nm et une particule α (charge $+2e$) est située au centre du carré. Calculer le travail nécessaire pour déplacer la particule α du centre du carré au milieu d'un coté.

3. **Énergie d'un dipôle**
   Un dipôle peut être modélisé par deux charges ponctuelles q et $-q$ séparées d'une distance a. La quantité $\vec{p} = q\vec{a}$ est appelée moment dipolaire. Déterminer l'énergie propre U_0 du dipôle en supposant que, la position de la charge $+q$ étant fixée, on approche la charge $-q$ depuis l'infini jusqu'à la distance a.

4. **Énergie d'un cristal**

   (a) Considérer un «cristal» formé d'une chaîne infinie de charges (ions) $(+q)$ et $(-q)$ alternées, séparées par une distance a (voir figure 1). Déterminer l'énergie nécessaire afin de retirer un ion de ce «cristal» .

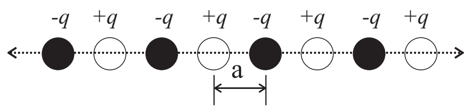


FIGURE 1 – *Cristal linéaire.*

5. **Énergie emmagasinée dans un condensateur**
   Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge $+q$, est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse, de rayon intérieur b et rayon extérieur c. La sphère creuse a une charge $-q$. Calculer l'énergie potentielle emmagasinée dans ce condensateur :

   (a) en utilisant la capacité du système.

   (b) en intégrant la densité d'énergie électrique.

6. **Dipôle dans un champ uniforme**
   Un dipôle est plongé dans un champ électrique $\vec{E}_{\text{ext}}$ uniforme. Son moment dipolaire $\vec{p}$ fait un angle β avec $\vec{E}_{\text{ext}}$ (voir figure 2).

   (a) Calculer la force totale exercée sur le dipôle.

   (b) Calculer le moment $\vec{\Gamma}$ des forces exercées sur le dipôle. Quelle est la position d'équilibre dans le champ extérieur ?

   (c) En déduire le travail qu'il faut fournir au dipôle pour le faire tourner d'un angle β à partir de sa position d'équilibre. Exprimer alors l'énergie d'interaction U (énergie potentielle) avec le champ environnant.

   (d) Pour quelles valeurs de β cette énergie est-elle extrémale ?

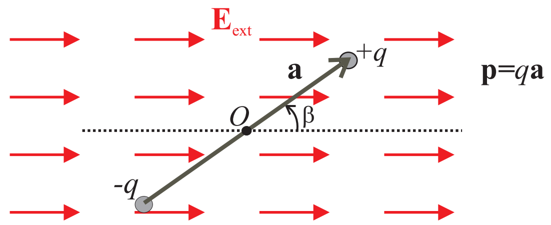
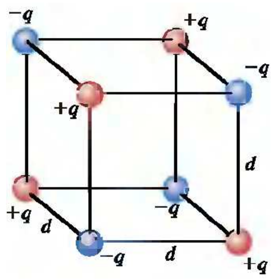


FIGURE 2 – *Dipôle dans un champ extérieur uniforme.*

(e) Expliquer quelle est l'action des forces si le champ $\vec{E}_{\text{ext}}$ est central ?

Exercices Supplémentaires

1. **Moment dipolaire** Soit un triangle équilatéral de coté l. On place sur ses sommets une charge positive $2q$ et deux charges négatives $-q$.
2. Une «maille» d'un cristal ionique (de type NaCl) est formée de huit charges ponctuelles situées aux sommets d'un cube de coté d. Les charges des ions sont $+q$ et $-q$. Calculer l'énergie potentielle de cette «maille» . Commenter le résultat.



   (a) Calculer son moment dipolaire électrique.

   (b) Déterminer l'énergie propre, U_0, de ce dipôle.

   (c) Quelle est la valeur absolue maximale de la force que ce dipôle exerce sur une charge q placé à une distance de $1000l$ du dipôle ?

3. Deux charges ponctuelles fixes sont situées le long de l'axe Ox, une de charge q_1= 3nC située à l'origine et une de charge q_2=-3nC située au point x=3cm. Une particule de masse m=5μg et charge q_0=2nC se déplace le long de l'axe Ox à partir du point a (x=1cm), où elle se trouve au repos, jusqu'au point b (x=2cm). Quelle est la vitesse de cette particule au point b ?

Électricité et magnétisme - TD n°5
Diélectriques et Conducteurs

1. **Permittivité -** Le permittivité du diamant vaut $5\,10^{-11}$ F m^{-1}. Calculer sa constante diélectrique et sa susceptibilité.

2. **Milieux diélectrique -** Considérer une boule conductrice de rayon R dans un milieu diélectrique de permittivité ϵ_m. La boule porte une charge Q. Calculer le champ électrique partout dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Calculer le potentiel électrique partout en prenant un point de référence à l'infini.

3. **Densité de courant - vitesse des porteurs**
   Le cuivre, qui est un bon conducteur du courant électrique, possède 1 électron libre par atome ; sa densité volumique de charge ρ vaut $1,36.10^{10}$ C.m^{-3}. Un fil de cuivre de section $s = 1\,\mathrm{mm}^2$ est parcouru par un courant $I = 10\,\mathrm{A}$. Calculer la densité de courant j et la vitesse moyenne des porteurs.

4. **Résistance ohmique**
   Un conducteur filaire de longueur l, de section S, est soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre ses extrémités.
   (a) En appelant $\vec{j}$ le vecteur densité de courant, montrer que, en régime permanent, le flux de $\vec{j}$ est conservatif.
   (b) Calculer la résistance R de cette portion de fil de conductivité γ.

5. **Résistance de fuite**
   L'âme de rayon $R_1 = 1\,\mathrm{cm}$ d'un câble coaxial et sa gaine extérieure de rayon $R_2 = 2\,\mathrm{cm}$ sont séparés par un isolant imparfait de conductivité $\gamma = 10^{-22}\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.
   (a) Calculer la résistance de fuite R_f de ce câble.
   (b) En déduire le courant de déperdition latérale d'un kilomètre de câble soumis à une différence de potentiel de 1000 volts.

Electricité et magnétisme - TD n°6
Calcul de champs magnétiques

1. **Conducteurs cylindriques**

   (a) Un conducteur cylindrique plein infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I. Etablir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce conducteur à une distance ρ dans les deux cas suivants : $\rho > a$ et $\rho < a$. Tracer les variations de $||\vec{B}||$ en fonction de ρ.

   (b) Le même courant I circule dans un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur b et extérieur c. Etablir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce conducteur dans les trois cas suivants : $\rho < b$, $b < \rho < c$ et $\rho > c$. Tracer les variations de $||\vec{B}||$ en fonction de ρ.

   (c) Un câble coaxial est formé de deux long cylindres conducteurs concentriques. Le cylindre extérieur, creux, a un rayon intérieur b et un rayon extérieur c. Le cylindre intérieur, plein, a un rayon $a < b$. Les deux conducteurs sont parcourus par des courants égaux (uniformes) I mais des directions opposées. Calculer le champ magnétique de ce système.

2. **Champ créé par des fils rectilignes**

   (a) Deux fils parallèles rectilignes infinis sont situés à 40cm l'un de l'autre. Un fil est parcouru par un courant de 25A et le deuxième par un courant de 75A. Trouver les points où le champ magnétique créé par les deux fils s'annule. Considérer les deux cas : les courants ont la même direction ou des directions opposées.

   (b) Quatre fils parallèles rectilignes infinis sont parcourus par un courant de 100A chacun. Les 4 fils sont situés aux sommets d'un carré de côté de 20cm (figure 1). Calculer le champ magnétique au centre du carré pour les 3 cas suivants :

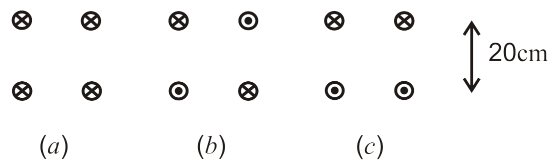


FIGURE 1 – *fils rectilignes et parallèles portant des courant $I = 100A$.*

3. **Spires parcourues par un courant**

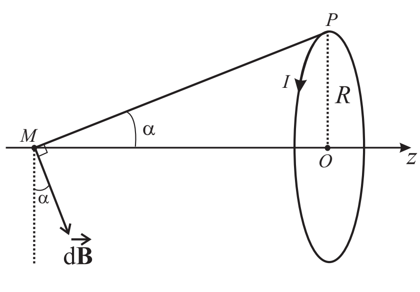


FIGURE 2 – *Spire parcourue par un courant*

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I (figure 2).

   (a) Déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en un point M de son axe Oz, d'abord en fonction de l'angle α sous lequel est vue la spire du point M, puis en fonction de l'abscisse z du point M.

   (b) Quelle est la valeur du champ au centre de la spire ?
   (c) Tracer les variations de $\vec{B}$ en fonction de z.
4. Déterminer le champ magnétique au point P :
   (a) créé par le courant circulant dans la partie circulaire du fil (figure 3a).
   (b) créé par les courants I_1 et I_2 (figure 3b).

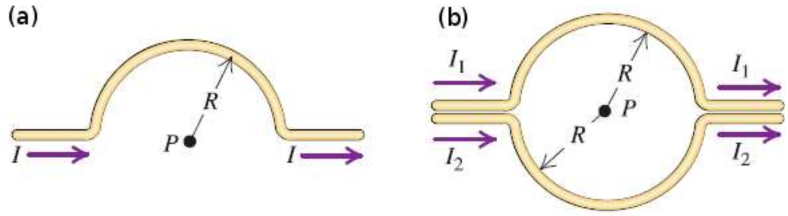


FIGURE 3 – *Fils de avec des segments semi-circulaires.*

5. **Solénoïde**
   Un solénoïde est un circuit constitué de spires jointives (mais isolées) faites d'un conducteur de section très faible, enroulées sur un cylindre. Soit l la longueur du cylindre, R le rayon de sa section circulaire et N le nombre total de spires parcourues par un courant constant I. L'axe du solénoïde est orienté dans le sens du courant (règle du tire-bouchon). On adoptera l'approximation d'un solénoïde infini (c.-à.-d. $R \ll l$)
   (a) Expliquer pourquoi le champ $\vec{B}$ est parallèle à l'axe du solénoïde partout (symétrie).
   (b) A partir de a) et le théorème d'Ampère, argumenter que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, $\vec{B}_{\text{int}}$, est constant.
   (c) Montrer que $\vec{B}_{\text{ext}}$ à l'extérieur du solénoïde soit constant et argumenter que $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$.
   (d) Utiliser le théorème d'Ampère afin d'en déduire la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde $\vec{B}_{\text{int}}$.
   (e) Vérifier que les relations de passage magnétiques sont satisfaites dans ce problème et donner l'expression du courant surfacique, $\vec{j}_s$.
6. **Bobine torique**
   Une bobine torique est constituée par N spires régulièrement enroulées sur un tore à section circulaire (figure 4). On s'intéresse à la valeur du champ dans le plan (Oxy).

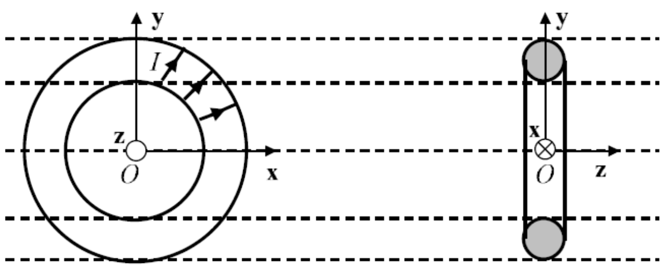


FIGURE 4 – *Bobine torique*

   (a) Quelle est la valeur du champ en un point situé à la distance r du centre de la bobine ?
   (b) Montrer que supposer que le rayon de la bobine est beaucoup plus grand que le rayon de la section du tore revient à dire qu'on peut assimiler la bobine à un solénoïde infini.

7. **Bobines d'Helmholtz** On considère deux bobines circulaires de rayon a, chacune constituée par N spires parcourues par un courant constant I et situées à une distance a l'une de l'autre. Le courant circule dans le même sens dans les deux bobines, produisant un champ magnétique très uniforme dans la région entre eux.

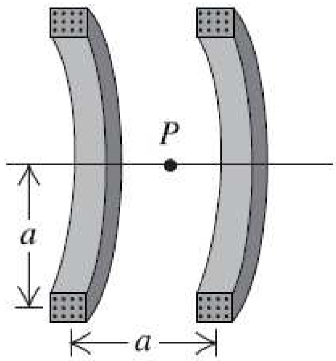


FIGURE 5 – *Bobines d'Helmholtz*

   (a) Calculer le champ magnétique sur l'axe (Oz) des bobines.

   (b) Tracer l'allure du graphe du $B(z)$ et comparer avec celui du champ magnétique produit par une seule bobine.

   (c) Déterminer le champ magnétique au point P (milieu de la distance entre les 2 bobines).

   (d) Calculer $\frac{dB}{dz}$ et $\frac{d^2B}{dz^2}$ au point P. Expliquer pourquoi le champ est uniforme près du point P.

   A.N. : N=300 tours, $I = 6$A, a=8cm.

Exercices Supplémentaires

1. **Aspects mathématiques**

   (a) Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour un champ scalaire f arbitraire.

   (b) Calculer la divergence du champ vecteur suivant (coordonnées cartésiennes) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(M) = C\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)},\ \frac{x}{(x^2+y^2)},\ 0\right)$$

   (c) Ecrire le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ de b) en coordonnées cylindriques.

   (d) Calculer sa divergence en coordonnées cylindriques en utilisant la formule (coordonnées cylindriques)

$$\text{div}\,\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   (e) Quelle conclusion en tirez-vous sur le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$?

Électricité et magnétisme - TD n°7

Force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

1. **Spectromètre de masse**

   Un ion de Sélénium entre dans une région où règne un champ électrique $E = 1.12\times10^5$V/m et un champ magnétique $B = 0.54$T uniformes, perpendiculaires à la vitesse de l'ion et l'un à l'autre.

   (a) Calculer la vitesse de la particule si elle passe non déviée dans cette région.

   (b) A la sortie de cette région, l'ion traverse un zone où règne un champ magnétique $B = 0.54$T uniforme perpendiculaire à sa vitesse. En sachant que l'ion suit une trajectoire circulaire de rayon $r = 31$cm, déterminer la masse de l'ion de Sélénium et le nombre de masse (A = nombre de protons(Z) + nombre de neutrons) de l'isotope.

2. **Force de Lorentz**

   Des électrons avec une vitesse de 10^6 m/s entrent dans une région avec un champ magnétique uniforme. La vitesse et le champ magnétique sont perpendiculaires. Les électrons suivent une trajectoire circulaire de rayon 10 cm.

   (a) Quel est la vitesse angulaire de l'électron ?

   (b) Quel est le champ magnétique ?

3. **Force de Lorentz : Mouvement hélicoïdal**

   Un proton se déplace dans un champ magnétique uniforme $B = 0.5$T appliqué le long de l'axe Ox. A $t = 0$, le proton a une vitesse $v_x = 1.5 \times 10^5$m/s, $v_y = 0$, $v_z = 2 \times 10^5$ m/s.

   (a) Calculer la force de Lorentz qui agit sur le proton et son accélération à $t = 0$.

   (b) Déterminer le rayon du mouvement hélicoïdal et le pas de l'hélicoïde (la distance parcourue le long de l'axe de l'hélicoïde dans une période).

4. **Force de Lorentz : Séparation d'isotopes**

   Une façon de séparer les isotopes ^{235}U et ^{238}U d'uranium (92 protons) était basée sur la différence de rayons de leurs trajectoires dans un champ magnétique. On suppose que les atomes, une fois ionisés, partent d'une source commune et bougent perpendiculairement au champ. Trouver la séparation spatiale maximale des faisceaux avec un rayon de 0,5 m pour le ^{235}U dans un champ de 1,5 Tesla si :

   (a) les isotopes ont la même vitesse,

   (b) les isotopes ont la même énergie.

5. **Effet Hall**
L'effet Hall, découvert en 1880, est lié à l'apparition d'une différence de potentiel (i.e. d'un champ électrique) quand un champ magnétique $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ est appliqué perpendiculairement à un conducteur parcouru par un courant $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ (figure 1).

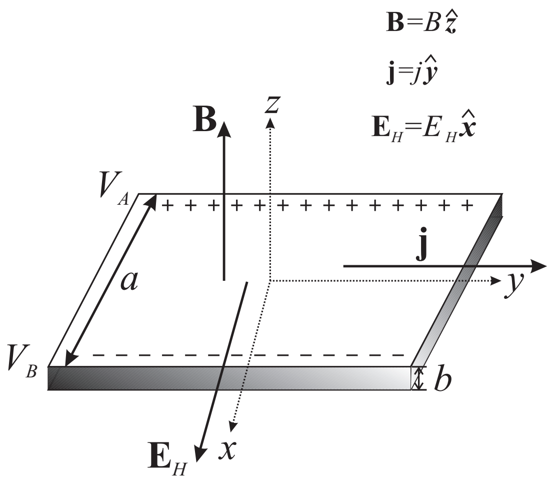


Figure 1 – *Effet Hall*

(a) Calculer le champ de Hall à partir de la condition d'annulation de la force de Lorentz sur un électron du conducteur (condition d'équilibre).

(b) Déterminer la constante de Hall A_H en fonction du nombre de porteurs (n densité volumiques des porteurs) ; par définition on écrit $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = A_H \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{j}}$. La relation entre la densité des porteurs n et la densité volumique de courant $\boldsymbol{j}$:

(c) Application numérique : sur une sonde à arséniure d'indium InAs on applique un champ magnétique de $B = 37\,\text{mT}$, et on mesure un courant $I = 150\,\text{mA}$, pour une différence de potentiel de $V = 4,7\,\text{mV}$ (épaisseur $b = 0,12\,\text{mm}$), calculer la constante de Hall et le nombre de porteurs par unité de volume.

Exercices Supplémentaires

1. **Rappels : Produit vectoriel**
On considère les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{c}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}$, dont les coordonnées cartésiennes sont : $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (-u, 0, u)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (u, 0, 0)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (2u, -u, u)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{d}} = (-u, 0, 0)$.

(a) Calculer les produits vectoriels : $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{c}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{c}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{d}}$.

(b) Calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}$. Même chose pour les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{c}}$.

(c) Calculer l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$. Même chose pour celui formé par les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{c}}$.

(d) Est-ce que $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \wedge (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{c}})$ est égale à $(\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{b}}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{c}}$? Calculer également les produits mixtes : $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{c}})$ et $(\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{b}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{c}}$.

Électricité et magnétisme - TD n°8
Force de Laplace

1. **Force de Laplace entre deux fils**
   On considère deux fils conducteurs infinis parallèles et séparés par une distance d (figure 1). Les fils sont parcourus par un courant uniforme d'intensité I_1 pour le premier et I_2 pour le second. Calculer la force de Laplace exercée par le premier fil sur le second. Quelle est la force exercée par le second fil sur le premier ?

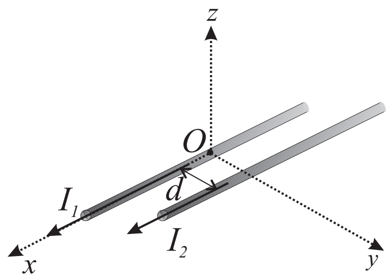


FIGURE 1 – *Deux fils parcourus par un courant*

2. Trois fils conducteurs infinis parallèles et séparés par une distance d sont parcourus par un courant uniforme d'intensité I dans le sens indiqué sur la figure 2. Calculer la force magnétique sur chaque fil.

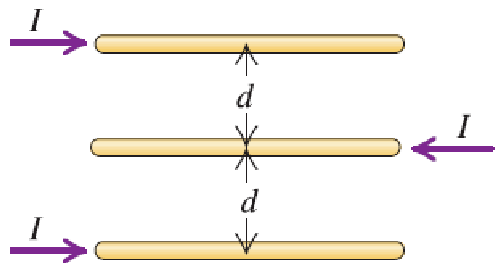


FIGURE 2 – *Trois fils parcourus par un courant*

3. **Flux du champ magnétostatique et force de Laplace**

   Un fil conducteur rectiligne de longueur infini parcouru par un courant I est placé dans le plan d'une spire carrée de côté a parcouru par un courant i. Les deux conducteurs sont placés à une distance b l'un de l'autre (figure 3).

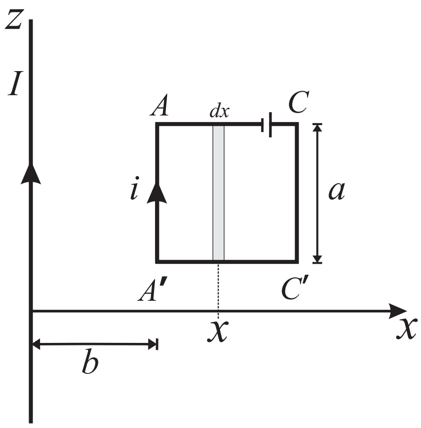


FIGURE 3 – *Cadre carré près d'un fil électrique*

   (a) Calculer le flux de $\vec{B}$ traversant l'élément de surface dS centré sur x (surface hachurée sur le dessin) et en déduire le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit complet.

   (b) Donner l'expression de la force exercée par le conducteur rectiligne sur le circuit carré. En déduire le mouvement du circuit (attraction ou répulsion).

4. **Règle du flux maximal et dipôle magnétique**

   Soit une bobine formée par N spires carrées identiques, de côté a, suspendue par un côté horizontal (figure 4). Sous l'action de la gravité $\vec{g}$ et d'un champ magnétique vertical $\vec{B}$, la bobine fait un angle θ avec la verticale dans sa position d'équilibre.

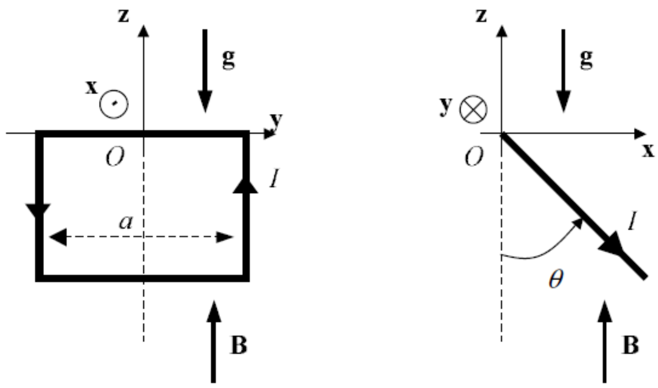


FIGURE 4 – *Cadre parcouru par un courant, dans un champ magnétique*

   (a) Calculer le moment magnétique dipolaire de ce cadre.

   (b) Calculer le moment de la force de Laplace et le moment du poids en O.

   (c) Déterminer l'angle d'équilibre θ_0.

   A.N. : $a = 10\,\mathrm{cm}$, $I = 0,1\,\mathrm{A}$, $m = 80\,\mathrm{g}$, $N = 200$ et $B = 115\,\mathrm{mT}$.

Électricité et magnétisme - TD n°9
Induction

1. **Force électromotrice** Une tige métallique le longueur $l = 1,5$m se trouve dans un champ magnétique uniforme, constant $B = 0,5$T. La tige est perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{B}}$. Elle bouge avec une vitesse constante $v = 4$m/s dans une direction perpendiculaire à $\vec{\boldsymbol{B}}$ et à la tige. Calculer la différence du potentiel électrique entre les extrémités de la tige.

2. Une bobine de rayon $r = 4$cm et constituée de $N = 500$ spires est placée dans un champ magnétique uniforme qui varie dans le temps selon la loi : $B(t) = at + bt^4$. La bobine est perpendiculaire au champ magnétique et elle est reliée à une résistance $R = 600\Omega$. On néglige la résistance de la bobine.
   (a) Déterminer la tension électromotrice induite dans la bobine.
   (b) Quel est le courant traversant la résistance à $t = 5s$?
   A.N. : $a = 0.012$ T/s, $b = 3 \times 10^{-5}$ T/s^{-4}.

3. **Force électromotrice** Le plan d'un cadre conducteur carrée de coté a contient un fil de courant constant I rectiligne infini qui ne touche pas le cadre (figure 1). Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante, $\vec{v} = v\hat{x}$, , orthogonale au courant et dans le plan du cadre.

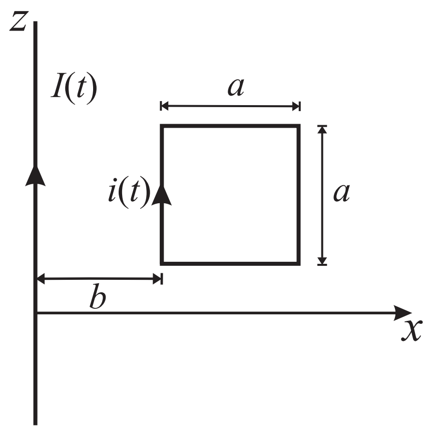


FIGURE 1 – *Induction dans un cadre carré*

   (a) Calculer la tension électromotrice induite (force électromotrice) dans le cadre par le champ magnétique généré par le fil infini en fonction de la distance b entre le fil et le cadre.
   (b) La spire carrée possède une résistance R. Calculer le courant $i(t)$ induit dans la spire carrée.
   (c) Calculer la puissance dissipée par effet joule.
   (d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.
   (e) Reprendre les questions (a)-(d), en considérant la distance b fixe et le courant dans le fil de type $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

4. **Disque de Faraday**
   Parmi les nombreuses expériences effectuées par Faraday pour étudier le phénomène d'induction, une fut dédiée à montrer qu'un courant apparaît dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Pour cela, il considéra un disque conducteur mobile autour de son axe et placé dans un champ magnétique uniforme colinéaire à l'axe du disque. Un circuit contenant un galvanomètre reliait le centre du disque au bord du

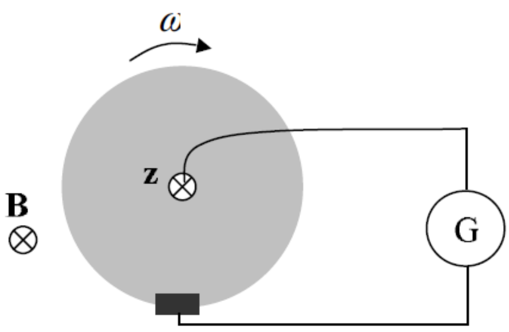


FIGURE 2 – *Disque de Faraday*

disque par un contact glissant (figure 2). Faraday observa que quand le disque tournait, l'aiguille du galvanomètre subissait une déflexion.

On considère un disque d'axe (Oz), de rayon R et d'épaisseur a, en rotation à la vitesse ω et placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\hat{z}$ uniforme.

(a) Expliquez l'origine du courant induit. Calculez la force électromotrice. Application numérique : $B = 0,2\,\mathrm{T}$, $R = 0,1\,\mathrm{m}$, $\omega = 50\,\mathrm{s}^{-1}$.

5. **Auto-inductance d'un solénoïde**
   On considère une bobine torique de section carrée et parcourue par un courant I (côté h, rayon intérieur a, rayon extérieur b, N spires) (figure 3).

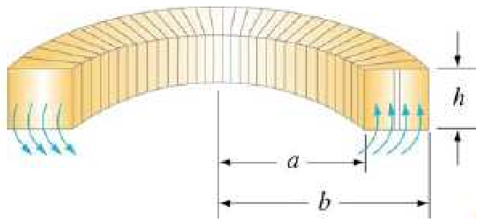


FIGURE 3 – *Bobine torique de section carré*

(a) Calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique et son flux.
(b) A partir de l'expression du flux magnétique, déduire l'inductance propre du tore L.
(c) Calculer l'énergie totale magnétique emmagasinée dans la bobine torique.

6. Soit $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Pour quelles valeurs de I_0 et ϕ, $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ est-il solution de l'équation $L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$?

7. En $t = 0$, un condensateur de capacité C portant une charge Q_0 est connecté à une bobine de self L. Calculer, pour tout temps, la charge du condensateur, l'énergie de son champ électrique et l'énergie du champ magnétique dans la bobine.

8. Un circuit RLC avec $R = 2\Omega$, $L = 10^{-3}$H, $C = 10^{-3}$ F (en série) est branché sur une tension alternante avec valeur maximale $U_0 = 100$V. Trouver sans calculette le courant maximal pour les fréquences angulaires (pulsation : ω) de la tension : 0 Hz, 10 Hz, 10^2 Hz, 10^3 Hz 10^4 Hz, 10^5 Hz. Faire un tracé du courant maximal versus le logarithme de la fréquence.

Électricité et magnétisme - TD n° 10
Induction

1. **Champ électrique induit par le champ magnétique variable** Un solénoïde de section circulaire, de rayon R, de longueur ℓ, constitué de N spires, est parcouru par un courant alternatif $I = I_0 \cos \omega t$.
   (a) Déterminer le champ électrique induit à l'extérieur du solénoïde.
   (b) Calculer le champ électrique induit à l'intérieur du solénoïde.
2. **Inductance mutuelle - transformateur**
   On considère un solénoïde de section circulaire, de rayon R_1, de longueur ℓ_1, et constitué de N_1 spires. A l'intérieur de celui-ci, on place un deuxième solénoïde de rayon R_2, de longueur ℓ_2, et constitué de N_2 spires.

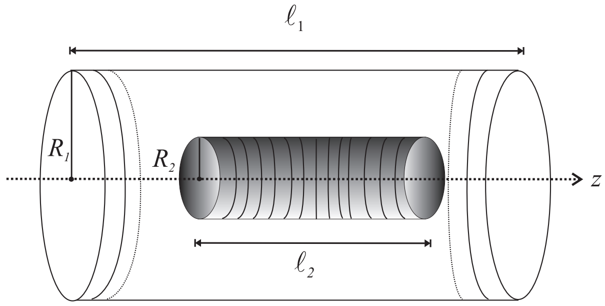


Figure 1 – Inductance mutuelle de deux solénoïdes.

   (a) Calculer l'inductance mutuelle, M, entre les deux solénoïdes en utilisant l'approximation de solénoïdes infinis.
   (b) Exprimer M dans le cas où $\ell_2 \to \ell_1$ et $R_2 \to R_1$, mais avec $N_1 \neq N_2$.
   (c) On se rappelle que dans la mesure où les résistances des fils sont négligeables, les tensions aux bornes des solénoïdes s'expriment (dans la convention récepteur) :

$$U_1(t) = L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + M \frac{dI_2(t)}{dt}$$
$$U_2(t) = L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + M \frac{dI_1(t)}{dt}$$

   En prenant le cas étudié en b), calculer le rapport $U_2(t)/U_1(t)$ en fonction de N_1 et N_2. Voyez-vous une application intéressante ?

3. Considérer un champ magnétique $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ uniforme et constant (dans le temps). Trouver un potentiel vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ dont le champ magnétique dérive, $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{A}}$. Votre solution, est-elle unique ?

4. **Générateur - Cadre tournant**
   Une bobine plate, rectangulaire, et indéformable, de côtés $a = 20\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, est constituée d'un conducteur cylindrique de diamètre $d = 1\,\text{mm}$, et de résistivité $\rho = 1,6.10^{-8}\,\Omega.\text{m}$. Elle tourne avec une fréquence de 600 tours par minute autour d'un axe vertical situé dans le plan de la bobine. La bobine est placée dans un champ magnétique d'intensité $B = 1\,\text{T}$, perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 2).

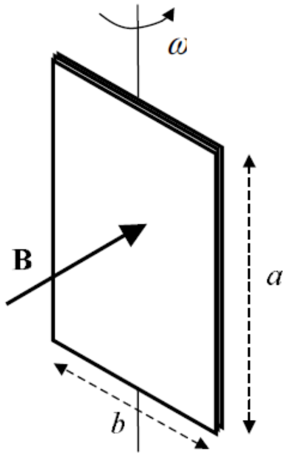


FIGURE 2 – *Bobine rectangulaire dans un champ magnétique*

   (a) Quelle est l'expression du courant circulant dans la bobine ? On calculera sa valeur efficace.
   (b) Décrivez l'action mécanique de $\vec{B}$ sur la spire.