

Électricité et magnétisme - TD n°9

Induction

Éléments du cours :

Dans le langage de l'électrocinétique, l'expression «force électromotrice» est le plus souvent réservée à l'intégrale de cette force sur un circuit fermé :

$$e(t) \equiv \oint_C \frac{d\vec{F}_{\rightarrow q}}{dq} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left(\vec{E} + \vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell} \quad (1)$$

où on l'intégral s'effectue intègre sur le circuit entier (fermé) \mathcal{C} . On peut aussi utiliser cette formule pour calculer une différence de potentiel d'un circuit ouvert.

Dans la pratique, $e(t)$ peut souvent être calculé plus facilement avec la formule de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

où $\Phi(t)$ est le flux magnétique à travers le circuit :

$$\Phi(t) = \iint_{S(\text{circuit})} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} dS \quad (3)$$

1. **Force électromotrice** Une tige métallique de longueur $\ell = 1.5\text{m}$ se trouve dans un champ magnétique uniforme, constant $B = 0,5\text{T}$. La tige est perpendiculaire à \vec{B} . Elle bouge avec une vitesse constante $v = 4\text{m/s}$ dans une direction perpendiculaire à \vec{B} et à la tige. Calculer la différence du potentiel électrique entre les extrémités de la tige.

Solution : La partie de la force de Lorentz, \vec{F}_m , qui, une fois intégré sur le circuit, donne e (la « force électromotrice »),

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_m}{q} &= \vec{v} \wedge \vec{B} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad [\text{V.m}^{-1}] \\ e &= \int \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2 \frac{3}{2} = 3\text{V} \end{aligned}$$

2. Une bobine de rayon $r = 4\text{cm}$ et constituée de $N = 500$ spires est placée dans un champ magnétique uniforme, et qui varie dans le temps selon la loi : $B(t) = at + bt^4$. La bobine est perpendiculaire au champ magnétique et elle est reliée à une résistance $R = 100\Omega$. On néglige la résistance de la bobine. $A.N.$: $a = 0.12 \text{ T/s}$, $b = 3 \times 10^{-4} \text{ T/s}^4$.

- (a) Déterminer la tension électromotrice induite dans la bobine.

Solution : La force électromotrice est donné par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$$

Puisque le champ magnétique \vec{B} est colinéaire à $d\vec{S}$,

$$\Phi_{\text{spire}}(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| \iint_S dS = B(t)S = (at + bt^4) \pi r^2$$

Puisque le flux à travers la bobine est N fois le flux à travers une spire, on a $\Phi_{\text{bobine}}(t) = N\Phi_{\text{spire}}(t)$

$$e(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\frac{d}{dt}N(at + bt^4) \pi r^2 = -N(a + 4bt^3) \pi r^2$$

(b) Quel est le courant traversant la résistance à $t = 5s$?

Solution :

$$\begin{aligned} e(t=5) &= -N(a + 4bt^3) \pi r^2 = -500(0.012 + 4 \times 3 \times 10^{-5} 125) \pi (0.04)^2 \\ &= -500(0.012 + 4 \times 3 \times 10^{-5} \times 125) \pi (0.04)^2 \\ &= -0.679 \text{ V} \end{aligned}$$

Le courant, I , dans le circuit est :

$$i(t=5) = \frac{e(t=5)}{R} = -0.00679 = -6.8 \cdot 10^{-2} \text{ A} .$$

3. **Force électromotrice** Le plan d'un cadre conducteur carré de côté a contient un fil de courant constant I rectiligne infini qui ne touche pas le cadre (figure 1). Le cadre s'éloigne du fil avec une vitesse constante, $\vec{v} = v\hat{x}$, orthogonale au courant et dans le plan du cadre.

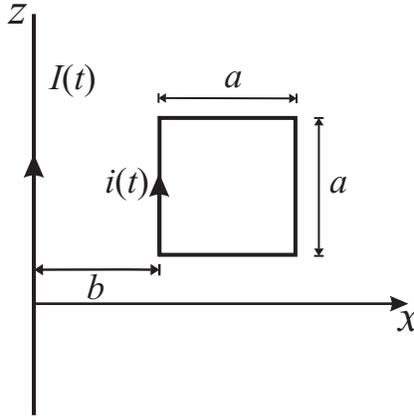


Figure 1: Induction dans un cadre carré

(a) Calculer la tension électromotrice induite (force électromotrice) dans le cadre par le champ magnétique généré par le fil infini portant un courant, I en fonction de la distance $b(t) = vt + b_0$ entre le fil et le cadre.

Solution : Le champ magnétique produit par le fil infini est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\phi} ,$$

et l'élément de surface est :

$$dS = dx dz \quad \vec{dS} = dS \hat{n} = dx dz \hat{\phi}$$

Un élément de flux magnétique est :

$$d\Phi(x) = \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} dx dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dz$$

Le flux magnétique à travers le circuit carré est trouvé en intégrant $d\Phi$ sur toute la surface à l'intérieur du circuit :

$$\Phi_{\text{circuit}}(t) = \iint_{\text{circuit}} d\Phi = \int_0^a dz \int_b^{b+a} d\Phi(x) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) , \quad (4)$$

La dépendance en temps vient ici du fait que $b(t) = vt + b_0$ est une fonction du temps

$$\Phi_{\text{circuit}}(t) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{vt + b_0 + a}{vt + b_0} \right)$$

$$\begin{aligned} e(t) &= -\frac{d\Phi_{\text{circuit}}}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} [\ln(vt + b_0 + a) - \ln(vt + b_0)] \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[\frac{v}{vt + b_0 + a} - \frac{v}{vt + b_0} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left[\frac{1}{vt + b_0} - \frac{1}{vt + b_0 + a} \right] = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left\{ \frac{a^2}{b(t)[b(t) + a]} \right\}. \end{aligned}$$

- (b) La spire carrée possède une résistance R . Calculer le courant $i(t)$ induite dans la spire carrée.

Solution : Le courant induit, $i(t)$, par la force électromotrice, $e(t)$, est donné par l'électrocinétique à chaque instant, t :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \left\{ \frac{a^2}{b(t)[b(t) + a]} \right\}.$$

- (c) Calculer la puissance dissipée par l'effet joule.

Solution :

$$P_J(t) = i(t)U_R(t) = i^2(t)R = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left\{ \frac{a^2}{b(t)[b(t) + a]} \right\}^2 \quad \text{avec} \quad b(t)(t) = vt + b_0.$$

- (d) Calculer la force de Laplace sur la spire carrée en fonction du temps, t .

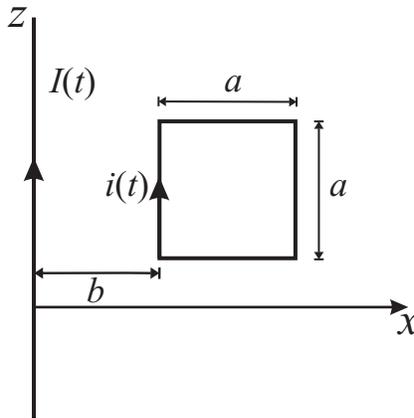


Figure 2: Induction dans un cadre carré

Solution : La force de Laplace se calcule à chaque instant t de la même manière que dans le TD 8. On appelle ceci le régime quasi-stationnaire.

$$\begin{aligned} \vec{F}_L(t) &= \oint \left(i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) = \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \frac{1}{a+b} \hat{x} - \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \frac{1}{b} \hat{x} \\ &= \frac{\mu_0 a I i(t)}{2\pi} \left[\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b} \right] \hat{x} = -\frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{x}. \end{aligned}$$

Le champ \vec{B} est constant, et On remarque que ceci vérifie le théorème de Maxwell avec $dx = vdt$. Le travail pour sortir le cadre est :

$$d\mathcal{W}(t) = -\vec{F}_L(t) \cdot \hat{x}dx = \frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] vdt.$$

La puissance versée pour sortir le cadre est alors :

$$P(t) = \frac{d\mathcal{W}(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] v = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{a^2}{b(a+b)} \right]^2$$

$$b(t) = vt + b_0.$$

(e) Reprendre les questions (a)-(d), en considérant la distance b fixe et le courant dans le fil de type $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

- i. Calculer la tension électromotrice induite (force électromotrice) dans le cadre par le champ magnétique généré par le fil infini en fonction de la distance b entre le fil et le cadre.

Solution : Le calcul du flux magnétique est identique à celui en l'éq.(4) :

$$\Phi_{\text{circuit}}(t) = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right)$$

sauf qu'ici b est une constante dans le temps et le courant, $I(t)$ est une fonction du temps. La force électromotrice, e se calcul par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi_{\text{circuit}}}{dt} = -\frac{dI}{dt} \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right) = I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a}{b} \right).$$

- ii. La spire carrée possède une résistance R . Calculer le courant $i(t)$ induit dans la spire carrée.

Solution :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{I_0 \omega \mu_0 a}{R 2\pi} \sin(\omega t) \ln \left(\frac{b+a}{b} \right).$$

- iii. Calculer la puissance dissipée par effet joule.

Solution :

$$P_J(t) = i(t)U_R(t) = i^2(t)R = \frac{1}{R} \left[\frac{\mu_0 I_0 \omega a}{2\pi} \sin(\omega t) \ln \left(\frac{b+a}{b} \right) \right]^2.$$

- iv. Calculer la force de Laplace sur la spire carrée.

Solution :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L(t) &= \oint \left(i(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) = -\frac{\mu_0 I(t) i(t)}{2\pi} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{x} \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{2\pi} \frac{I_0 \omega \mu_0 a}{R 2\pi} \sin(\omega t) \ln \left(\frac{b+a}{b} \right) \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{x} \\ &= -\left[\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \right]^2 \omega \frac{a}{R} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \ln \left(\frac{b+a}{b} \right) \left[\frac{a^2}{b(a+b)} \right] \hat{x}. \end{aligned}$$

4. Disque de Faraday

Parmi les nombreuses expériences effectuées par Faraday pour étudier le phénomène d'induction, une fut dédiée à montrer qu'un courant apparaît dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Pour cela, il considéra un disque conducteur mobile autour de son axe et placé dans un champ magnétique uniforme colinéaire à l'axe du disque. Un circuit contenant un galvanomètre reliait le centre du disque au bord du disque par un contact glissant (figure 3). Faraday observa que quand le disque tournait, l'aiguille du galvanomètre subissait une déflexion.

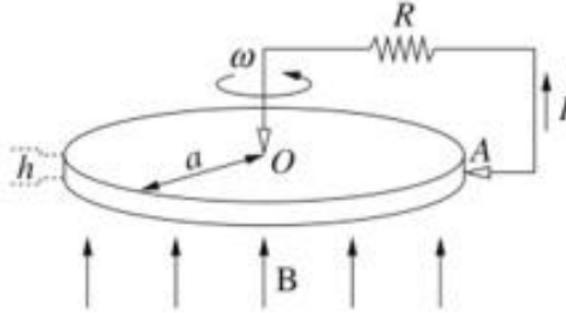


Figure 3: *Disque de Faraday*

On considère un disque d'axe (Oz) , de rayon a et d'épaisseur h , en rotation à la vitesse ω et placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\hat{z}$ uniforme.

- (a) Expliquez l'origine du courant induit. Calculez la force électromotrice. Application numérique: $B = 0.2 \text{ T}$, $a = 0.1 \text{ m}$, $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$.

Solution : L'origine du courant vient de la partie électromotrice de la Force de Lorentz.

On choisit l'axe Oz afin qu'il porte l'axe de rotation. Le vecteur \vec{OM} est porté par l'axe Oy . La fréquence angulaire s'écrit $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ avec $\omega \equiv |\vec{\omega}| = 20 \times 2\pi \text{ s}^{-1}$. La vitesse à une distance ρ du centre O dans la direction \vec{OM} est :

$$\vec{v}_{\text{fil}}(\rho) = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho} = \omega\rho\hat{\phi}.$$

Le champ magnétique est constant est donné par $\vec{B} = B\hat{z}$.

Puisque $d\vec{\ell} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$, la force électromotrice le long du chemin entre l'axe du disque et le bord du disque est :

$$\begin{aligned} e &= \int_0^a (\vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_0^a \omega\rho B\hat{\phi} \wedge \hat{z} \cdot \hat{\rho} d\rho = \int_0^a \rho\omega B\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} d\rho \\ &= \omega B \int_0^a \rho d\rho = \frac{\omega B}{2} [\rho^2]_0^a = \frac{\omega B}{2} a^2 \\ &\stackrel{\text{A.N.}}{=} \frac{5 \cdot 10^1 \times 2 \cdot 10^{-1} \times 10^{-2}}{2} \\ &= 5 \times 10^{-2} \text{ V} = 0,05 \text{ V} = 50 \text{ mV}. \end{aligned}$$

5. Auto-inductance d'un solénoïde

On considère un solénoïde toroïdal de section carrée et parcouru par un courant I (côté $h = 4$ mm, Le rayon intérieur $a = 8$ cm, $N = 1000$ spires).

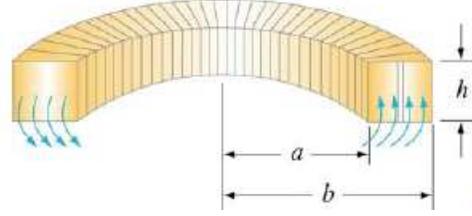


Figure 4: Bobine torique de section carré avec rayon intérieur, a , et rayon extérieur, $b = a + h$.

- (a) Calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique et son flux.

Solution : L'invariance du problème en ϕ et les symétries donne $\vec{B} = \hat{\phi}B(\rho, z)$. Le théorème d'Ampère nous donne que le champ à l'extérieur du solénoïde est $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$, et le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est :

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B_i &= \mu_0 NI \\ \Rightarrow \vec{B}_i &= \hat{\phi} \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} . \end{aligned}$$

On calcule le flux magnétique à travers une spire de la bobine en prenant $dS = dzd\rho$ et $\hat{n} = \hat{\phi}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{spire}} &= \iint \vec{B}_i \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln\left(\frac{a+h}{a}\right) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) \\ &\simeq \frac{\mu_0 NI}{2\pi a} h^2 . \end{aligned}$$

Le flux à travers le bobine(solénoïde) est :

$$\Phi_{\text{bobine}} = N\Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) \simeq \frac{\mu_0 N^2 h^2}{2\pi a} I .$$

- (b) A partir de l'expression du flux magnétique, déduire l'inductance propre du tore L .

Solution : La définition de l'inductance propre est :

$$\Phi_m \equiv LI$$

donc,

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) \simeq \frac{\mu_0 N^2 h^2}{2\pi a} . \quad (5)$$

L'énergie propre magnétique du circuit :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} |\vec{B}_i|^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^h dz \int_a^{b=a+h} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2} 2\pi h \int_a^{b=a+h} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) I^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 h^2}{2\pi a} I^2 = \frac{1}{2} LI^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne bien entendu exactement le même résultat que l'induction du solénoïde de l'éq.(5) obtenu par l'autre méthode.

(c) Estimer sa valeur numérique.

Solution : L'approximation pour L avec $h/a \ll 1$ avec,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h^2}{2\pi a} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{10^6 \times 16 \times 10^{-6}}{2\pi \times 8 \times 10^{-2}} = \frac{4}{10^5} = 4.10^{-5} \text{H}$$

$$= 40 \mu\text{H} ,$$

ce qui correspond à l'approximation de champ à l'intérieur constant et égale à sa valeur à $\rho = a$.

Sachant que le champ diminue en fonction du rayon, ρ , on s'attend que la résultat pour L , sera plus juste si on fait l'approximation d'évaluer adopte la valeur du champ au centre du cadre,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h^2}{2\pi \left(a + \frac{h}{2}\right)} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{10^6 \times 16 \times 10^{-6}}{2\pi \times 8.2 \times 10^{-2}} = \frac{3.902}{10^5} = 39.02 \cdot 10^{-5} \text{H}$$

$$= 39.02 \mu\text{H} .$$

Ce résultat est très proche au résultat exacte :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{h}{a}\right) = \frac{4\pi}{10^7} \frac{10^6 \times 4 \times 10^{-3}}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{0.4}{8}\right) \simeq 39.03 \mu\text{H} .$$

(d) Trouver la tension $U(t)$, entre les bornes du solénoïde quand le courant a la forme : $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. A.N. $\omega = 2\pi 50$ et $I_0 = 0.5$ A.

Solution :

$$e_L(t) = -L \frac{dI}{dt} = LI_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$= 4.10^{-5} \frac{1}{2} 2\pi 50 \sin(\omega t)$$

$$= 2\pi 10^{-3} \sin(\omega t) .$$

6. Soit $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Pour quelles valeurs de I_0 et ϕ , $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ est-il solution de l'équation $L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$?

Solution : On peut résoudre cette équation entièrement avec des fonctions de sinus et cosinus. Il est nettement plus facile de dire que les fonctions recherchées sont :

$$U(t) = \text{Re} \{U_0 e^{j\omega t}\}$$

$$I(t) = \text{Re} \{\mathcal{I}_c e^{j\omega t}\}$$

où $\mathcal{I}_c = I_0 e^{j\phi}$ est un courant à valeur complexe : Une solution particulière de l'équation :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}$$

est :

$$L \frac{d^2 (\mathcal{I}_c e^{j\omega t})}{dt^2} + R \frac{d(\mathcal{I}_c e^{j\omega t})}{dt} + \frac{(\mathcal{I}_c e^{j\omega t})}{C} = \frac{d(U_0 e^{j\omega t})}{dt}$$

$$\rightarrow \mathcal{I}_c \left[L \frac{d^2 (e^{j\omega t})}{dt^2} + R \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} + \frac{e^{j\omega t}}{C} \right] = U_0 \frac{d(e^{j\omega t})}{dt}$$

Ce qui donne l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_c \left[-L\omega^2 + j\omega R + \frac{1}{C} \right] &= U_0 j\omega \longrightarrow j\omega \mathcal{I}_c \left[Lj\omega + R + \frac{1}{j\omega C} \right] = U_0 j\omega \\ \longrightarrow \mathcal{I}_c \left[R + j \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \right] &= U_0 \end{aligned}$$

avec la solution :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_c &\equiv I_0 e^{j\phi} = U_0 \frac{1}{\left[R - j \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right] \right]} = U_0 \frac{R + j \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right]}{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}} \frac{R + j \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right]}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'identifier :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}} \quad e^{j\phi} = \frac{R + j \left[\frac{1}{\omega C} - \omega L \right]}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}.$$

ce qui nous permet de déterminer l'angle, ϕ avec :

$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right).$$

7. En $t = 0$, un condensateur de capacité C portant une charge Q_0 est connecté a une bobine de self L . Calculer, pour tout temps, la charge du condensateur, l'énergie de son champ électrique et l'énergie du champ magnétique dans la bobine.

Solution :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{I}{LC} &\quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ I = \frac{dQ}{dt} &\quad \Rightarrow \quad \int dQ = \int I_0 \sin(\omega t + \phi) dt \\ \Rightarrow Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) &= Q_0 \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow Q_0 = \frac{I_0}{\omega} \end{aligned}$$

La phase ϕ est déterminé par la condition initiale :

$$\begin{aligned} Q(t=0) = Q_0 &\Rightarrow Q(t) = Q_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = Q_0 \cos(\omega t) \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} &= -Q_0 \omega \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Les potentiels aux bornes du condensateur et de la bobine sont respectivement :

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -LQ_0 \omega \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = -LQ_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

La puissance dissipée dans le circuit est :

$$\begin{aligned} P(t) &= U_C I + U_L I = -\frac{Q_0^2 \omega}{C} \sin(\omega t) \cos(\omega t) + Q_0^2 L \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ &= -\omega \frac{Q_0^2}{C} \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \omega \frac{Q_0^2}{C} \frac{\sin(2\omega t)}{2} \\ &= P_e(t) + P_m(t) = 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé :

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} .$$

Bien entendu la puissance dissipée dans le circuit est nul puisque nous avons adopté le cas d'une résistance nulle.

L'énergie dans champ électrique à $t = 0$, est $\mathcal{W}_{e,0} = \frac{Q_0^2}{2C}$. L'énergie dans le condensateur est déterminé en intégrant la puissance délivré au circuit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_e(t) &= \mathcal{W}_e(t) + \mathcal{W}_{e,0} = \int_0^t P_e(t) dt + \frac{Q_0^2}{2C} = -\omega \frac{Q_0^2}{2C} \int_0^t \sin(2\omega t) dt + \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C} [\cos(2\omega t) - 1] + \frac{Q_0^2}{2C} \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t) = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t) \\ \mathcal{W}_m(t) &= \int_0^t P_m(t) dt = \omega \frac{Q_0^2}{2C} \int_0^t \sin(2\omega t) dt = \frac{Q_0^2}{4C} [1 - \cos(2\omega t)] \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t) , \end{aligned}$$

où nous avons utilisé :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(2\omega t) &= \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\ \cos(2\omega t) - 1 &= -2\sin^2(\omega t) . \end{aligned}$$

Les énergies sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_e(t) &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t) \\ \mathcal{W}_m(t) &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t) . \end{aligned}$$

Bien entendu, comme il n'y a pas de résistance, nous avons la conservation d'énergie :

$$\mathcal{W}_e(t) + \mathcal{W}_m(t) = \frac{Q_0^2}{2C} .$$

On voit que l'énergie oscille tout en se transférant entre être stockée en énergie électrique et magnétique.

8. Un circuit RLC avec $R = 2\Omega$, $L = 10^{-3}\text{H}$, $C = 10^{-3}\text{ F}$ (en série) est branché sur une tension alternante avec valeur maximale $U_0 = 100\text{V}$ ($U(t) = U_0 \cos(\omega t)$). Trouver sans calculette le courant maximal pour les fréquences angulaires (pulsation : ω) de la tension: 0 Hz, 10 Hz, 10^2 Hz, 10^3 Hz 10^4 Hz, 10^5 Hz. Faire un plot du courant maximal versus le logarithme de la fréquence.

Solution :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}} \stackrel{A.N.}{=} \frac{100}{\sqrt{4 + [\omega 10^{-3} - \frac{1}{\omega 10^{-3}}]^2}}$$

$$\omega = 0\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [\omega 10^{-3} - \frac{1}{\omega 10^{-3}}]^2}} \rightarrow 0\text{A}$$

$$\omega = 10^1\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [10^{-2} - \frac{1}{10^{-2}}]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^2]^2}} \rightarrow 1\text{A}$$

$$\omega = 10^2\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [10^{-1} - \frac{1}{10^{-1}}]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^1]^2}} \rightarrow 10\text{A}$$

$$\omega = 10^3\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [1 - 1]^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{4}} \rightarrow 50\text{A}$$

$$\omega = 10^4\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [10^1 - \frac{1}{10^1}]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^1]^2}} \rightarrow 10\text{A}$$

$$\omega = 10^5\text{Hz} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{100}{\sqrt{4 + [10^2 - \frac{1}{10^2}]^2}} \simeq \frac{10^2}{\sqrt{[10^2]^2}} \rightarrow 1\text{A}$$

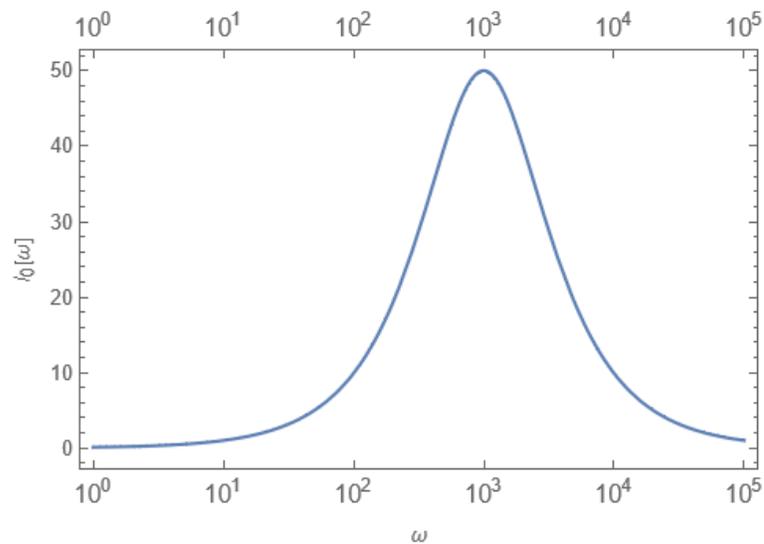


Figure 5: Courant Maximal, $I_0(\omega)$, dans un circuit RLC en fonction de fréquence