

## Electricité et magnétisme - TD n° 8

### Force de Laplace

#### Éléments du cours :

Considérons la partie magnétique de la force de Lorentz sur les charges de conduction  $dq$  dans un volume  $d\mathcal{V}$  :

$$\vec{dF} = dq \left( \vec{v}_t \wedge \vec{B} \right) = \rho_c d\mathcal{V} \left( \vec{v}_t \wedge \vec{B} \right)$$

où  $\vec{v}_t$  est la vitesse totale des charges de conduction. Si ces charges sont contenues dans un fil est en mouvement, on peut écrire :

$$\vec{v}_t = \frac{\vec{j}}{\rho_c} + \vec{v}_{\text{fil}} .$$

La force sur la charge  $dq = \rho_c d\mathcal{V}$  s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= \rho_c d\mathcal{V} \left( \frac{\vec{j}}{\rho_c} \wedge \vec{B} \right) + dq \left( \vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B} \right) \\ &= I \left( \vec{d\ell} \wedge \vec{B} \right) + dq \left( \vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B} \right) . \end{aligned} \quad (1)$$

où nous avons utilisé la substitution  $\vec{j} d\mathcal{V} = I \vec{d\ell}$  ( puisque  $I = j \mathcal{S}_{\text{section}}$  ).

La densité de courant,  $\vec{j}$  est colinéaire avec  $\vec{d\ell}$ , et par conséquent le premier terme dans cette expression est perpendiculaire à  $\vec{d\ell}$ . Puisque les charge sont contraintes à rester dans le fil, cette force est transférée au réseaux cristallin du conducteur, elle se manifeste comme une force mécanique, appelée Force de Laplace, sur le segment du fil contenant les charges  $dq$  :

$$\vec{dF}_L = I \left( \vec{d\ell} \wedge \vec{B} \right) \quad (2)$$

Le deuxième terme de l'éq.(1) :

$$\vec{dF}_m = dq \left( \vec{v}_{\text{fil}} \wedge \vec{B} \right) ,$$

ne conduit pas à une force mécanique sur le fil car il y a des force égales et opposées sur les charges fixes dans le fil. Cette force résulte en une force électromotrice sur les porteurs de courant. Cette force agit néanmoins sur les charges de conduction comme une force électromotrice. Cette force sera traité dans le prochain TD. La dérivation de la force de Laplace, suppose que le courant est stationnaire (ou au moins varie lentement par rapport à l'échelle du temps  $T = L/c$  ou  $L$  est la dimension du circuit.)

Par conséquent, la force de Laplace est le plus souvent calculé sur le circuit tout entier :

$$\vec{F}_L = I \oint_{\text{circuit}} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} \quad (3)$$

même si parfois on doit considérer que la forme locale de la force de Laplace,  $\vec{dF}_L = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$ , puisse déformer mécaniquement un circuit. Comme discuté dans le chapitre 9, il est souvent avantageux de décrire le comportement d'un circuit électrique par la méthode des travaux virtuels. Dans ce contexte, on considère un potentielle d'énergie magnétique,  $\mathcal{U}_m$  d'un circuit parcouru par un courant permanent  $I$  et placé dans une champ magnétique :

$$\mathcal{U}_m = -I\Phi + \text{Constante} , \quad (4)$$

où

$$\Phi = \iint_{\text{circuit}} \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{dS} , \quad (5)$$

est le flux magnétique *extérieur* à travers une surface définie par le circuit (le mot *extérieur* nous rappelle que nous sommes en train d'ignorer le champ créé par le circuit lui-même).

La force de Laplace de circuit peut être déterminée par les dérivées de cette énergie selon la position (ou d'autres paramètres) de ce circuit, notamment :

$$\vec{F}_L = -\vec{\text{grad}} \mathcal{U}_m = I \vec{\text{grad}} \Phi . \tag{6}$$

Une des applications les plus courantes de la méthode des travaux virtuels s'applique quand le circuit est petit devant les variations spatiales de  $\vec{B}$ . Dans de tels cas, on introduit le **moment magnétique dipolaire** du circuit :

$$\vec{m} = IS\hat{n} . \tag{7}$$

Dans ce cas, l'éq.(10), s'écrit

$$\mathcal{U}_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} \tag{8}$$

et l'éq.(6) pour la force de Laplace sur un circuit dans un champ magnétique extérieur,  $\vec{B}_{\text{ext}}$  se simplifie à :

$$\vec{F}_L = \vec{\text{grad}} (\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}) . \tag{9}$$

et la spire subira un couple de force magnétique

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} . \tag{10}$$

qui tente à orienter le circuit tel que le flux du champ magnétique à travers le circuit soit maximal (règle du flux maximal). Dans toutes les expressions ci-dessus, nous avons ignoré le champ magnétique créé par le circuit lui-même. Le champ magnétique créé par le circuit, s'écrit aussi en termes de,  $\vec{m}$  aux positions loin du circuit :

$$\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\text{grad}} \left[ \frac{\vec{m} \cdot \hat{r}}{r^2} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3\hat{r}(\vec{m} \cdot \hat{r}) - \vec{m}] . \tag{11}$$

1. **Force de Laplace entre deux fils** On considère deux fils conducteurs infinis parallèles et séparés par une distance  $d$  (figure 1). Les fils sont parcourus par un courant uniforme d'intensité  $I_1$  pour le premier et  $I_2$  pour le second. Calculer la force de Laplace exercée par le premier fil sur le second. Quelle est la force exercée par le second fil sur le premier ?

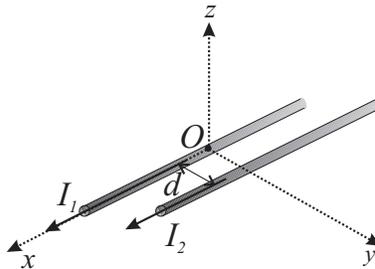


Figure 1: Deux fils parcourus par un courant

**Solution :** On prend  $I_1$  et  $I_2$  d'être dans la direction  $\hat{x}$ . Le champ  $\vec{B}_1$  créé par le courant dans le fil 1 est :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho_1} \hat{\phi}_1$$

A la position de fil 2, le champ magnétique est :

$$\vec{B}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{z}$$

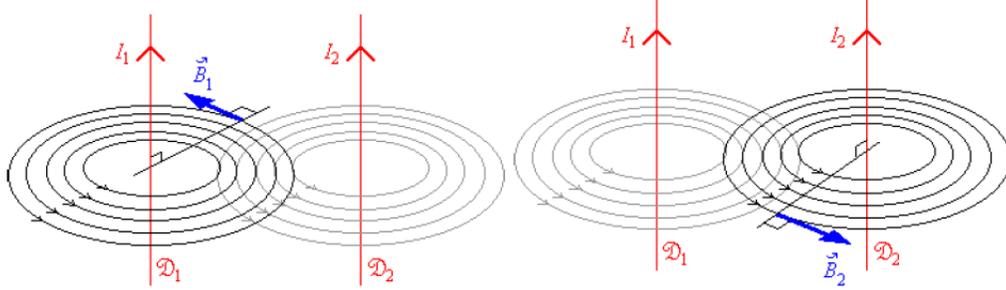


Figure 2: Allure du champ magnétique exercé par l'un et l'autre des fils

Un élément de longueur  $d\vec{\ell}$  est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

donc,

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1 = I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{z}$$

avec une force par unité de longueur de :

$$d\vec{\ell}_2 = dl_2 \hat{x}$$

$$\frac{d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{x} \wedge \hat{z} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{y}$$

De même le champ  $\vec{B}_2$  créé par le fil 2 est :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \rho_2} \hat{\phi}_2$$

A la position du fil 1 on a :

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{z} \quad d\vec{\ell}_1 = dl_1 \hat{x}$$

avec une force de Laplace de :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= I_1 d\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_2 \\ \frac{d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{dl_1} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{x} \wedge \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{y}. \end{aligned}$$

2. Trois fils conducteurs infinis parallèles et séparés par une distance  $d$  sont parcourus par un courant uniforme d'intensité  $I$  dans le sens indiqué sur la figure 3. Calculer la force magnétique sur chaque fil.

On a trois fils, séparés par  $d$  et parcourus par  $I$ , mais avec un sens différent. La force magnétique de Laplace appliquée sur chaque fil correspondra à la force exercée par les deux autres fils.

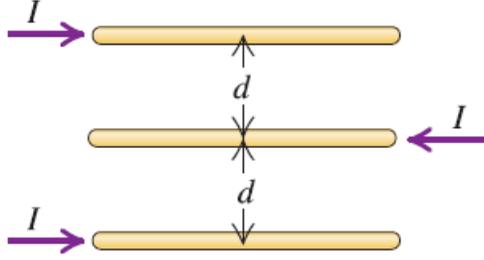


Figure 3: Trois fils parcourus par un courant

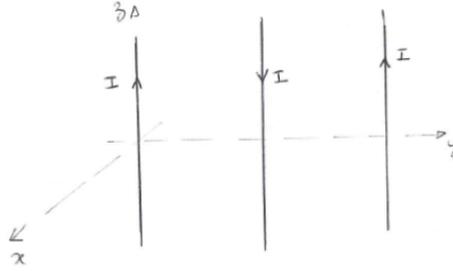


Figure 4: Trois fils parcourus par un courant

**Solution :** On peut largement s'inspirer de l'exercice précédent, en supposant que les fils sont tous orientés le long de l'axe  $\hat{z}$  et qu'ils sont alignés selon l'axe  $\hat{y}$ . On a

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho_1} \hat{\phi}_1 \quad , \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \rho_2} \hat{\phi}_2 \quad , \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi \rho_3} \hat{\phi}_3$$

avec  $I_1 = I_3 = I$  et  $I_2 = -I_1$ .

(a) Pour le premier fil, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}_{2,3 \rightarrow 1}}{dz} &= \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \wedge (\vec{B}_2 + \vec{B}_3)}{dz} = I_1 \hat{z} \wedge (\vec{B}_2 + \vec{B}_3) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \wedge \left( \frac{I(-\hat{x})}{d} + \frac{I\hat{x}}{2d} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \left( -1 + \frac{1}{2} \right) \hat{y} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \hat{y} \end{aligned}$$

(b) Pour le deuxième fil, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}_{1,3 \rightarrow 2}}{dz} &= \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_3)}{dz} = I_2 \hat{z} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_3) \\ &= \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \wedge \left( \frac{I(-\hat{x})}{d} + \frac{I\hat{x}}{d} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} (-1 + 1) \hat{y} = \vec{0} \end{aligned}$$

(c) Pour le troisième fil, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}_{1,2 \rightarrow 3}}{dz} &= \frac{I_3 d\vec{\ell}_3 \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}{dz} = I_3 \hat{z} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \\ &= \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \wedge \left( \frac{I(-\hat{x})}{2d} + \frac{I\hat{x}}{d} \right) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \left( -1 + \frac{1}{2} \right) \hat{y} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \hat{y} \end{aligned}$$

### 3. Flux du champ magnétostatique et force de Laplace

Un fil conducteur rectiligne de longueur infini parcouru par un courant  $I$  est placé dans le plan d'une spire carrée de côté  $a$  parcouru par un courant  $i$ . Les deux conducteurs sont placés à une distance  $b$  l'un de l'autre (figure 5).

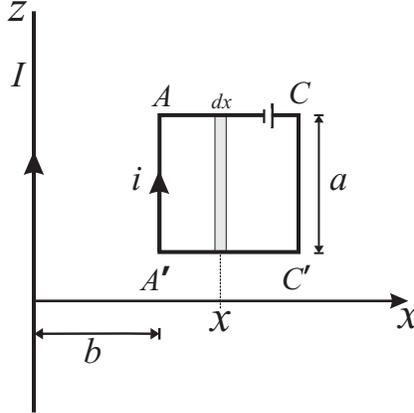


Figure 5: Cadre carré près d'un fil électrique

- (a) Calculer le flux de  $\vec{B}$  traversant l'élément de surface  $dS$  centré sur  $x$  (surface hachurée sur le dessin) et en déduire le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit complet.

**Solution :** On a vu précédemment que le champ magnétique créé par un fil infini orienté suivant  $\hat{z}$  vaut :

$$\vec{B}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}_{\text{fil}}.$$

Ici, on regarde le champ au niveau de la spire, c'est-à-dire dans le demi-plan  $Ozx$ , avec  $x > 0$ . Dans ce demi-plan, le champ est orienté suivant  $\hat{y}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{fil}} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} \\ dS &= a dx \quad \hat{n} = \hat{\phi} \end{aligned}$$

car le sens de parcours du courant  $i$  dans le cadre impose que l'orientation de  $d\vec{S} = dS\hat{n}$  suivant  $\hat{\phi}$ . Le flux complet vaut donc :

$$\begin{aligned} d\Phi(x) &= \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x} dx \\ \Phi &= \int_b^{b+a} d\Phi(x) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right). \end{aligned}$$

- (b) Donner l'expression de la force exercée par le conducteur rectiligne sur le circuit carré. En déduire le mouvement du circuit (attraction ou répulsion).

**Solution :**

$$\vec{F}_{I \rightarrow i} = i \int_A^C \vec{d\ell} \wedge \vec{B} + i \int_C^{C'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} + i \int_{C'}^{A'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} + i \int_{A'}^A \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

On remarque que :

$$i \int_A^C \vec{d\ell} \wedge \vec{B} + i \int_{C'}^{A'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Si toutefois on voulait le calculer ces forces on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{d\ell} &= \hat{x}dx \\ \vec{F}_{AC} &= i \int_A^C \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = i \int_b^{b+a} \hat{x}dx \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{y} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2\pi} Ii \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2\pi} Ii \ln \left( \frac{b+a}{a} \right) \\ \vec{F}_{C'A'} &= i \int_{C'}^{A'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = -\hat{z} \frac{\mu_0}{2\pi} Ii \ln \left( \frac{b+a}{a} \right) = -\vec{F}_{AC}\end{aligned}$$

et on a :

$$\vec{F}_{AC} + \vec{F}_{C'A'} = \vec{0}$$

comme on prévoyait dès le départ.

La somme des forces sur les deux autres cotés n'est pas nulle par contre :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{I \rightarrow i} &= i \int_C^{C'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} + i \int_{A'}^A \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \vec{F}_{CC'} + \vec{F}_{AA'} \\ \vec{F}_{CC'} &= i \int_C^{C'} \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = i \int_a^0 dz \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+a)} \hat{y} = -\hat{x} \frac{\mu_0 Ii}{2\pi(b+a)} \int_a^0 dz = \hat{x} \frac{\mu_0 Ii}{2\pi} \frac{a}{b+a} \\ \vec{F}_{AA'} &= i \int_{A'}^A \vec{d\ell} \wedge \vec{B} = i \int_0^a dz \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \hat{y} = -\hat{x} \frac{\mu_0 Ii}{2\pi b} \int_0^a dz = -\hat{x} \frac{\mu_0 Ii}{2\pi} \frac{a}{b} \\ \vec{F}_{I \rightarrow i} &= \vec{F}_{AA'} + \vec{F}_{CC'} = \hat{x} \frac{\mu_0 Iia}{2\pi} \left[ \frac{1}{b+a} - \frac{1}{b} \right] = -\hat{x} \frac{\mu_0 Iia^2}{2\pi b(b+a)}\end{aligned}$$

Le signe étant négatif, la force va vers la gauche. C'est donc un mouvement d'attraction. Ma méthode des travaux virtuels nous donnerait ce résultat nettement plus rapidement. On remplace  $b$  par le variable  $x$  donnant la distance entre le cadre et le fil, et  $\Phi(x)$  est donc :

$$\Phi(x) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left( \frac{x+a}{x} \right)$$

La force par la méthode des travaux virtuels est :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{I \rightarrow i} &= i \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = i \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \Phi = \hat{x} \frac{\mu_0 i I a}{2\pi} \left[ \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right] \\ &= \hat{x} \frac{\mu_0 i I a}{2\pi} \left[ \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right] = -\hat{x} \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \left[ \frac{a^2}{x(x+a)} \right].\end{aligned}$$

#### 4. Règle du flux maximal et dipôle magnétique

Soit une bobine formée par  $N$  spires carrées identiques, de côté  $a$ , suspendue par un côté horizontal (figure 6). Sous l'action de la gravité  $\vec{g}$  et d'un champ magnétique vertical  $\vec{B}$ , la bobine fait un angle  $\theta$  avec la verticale dans sa position d'équilibre. A.N.:  $a = 10$  cm,  $I = 0.1$  A,  $m = 80$  g,  $N = 200$  et  $B = 115$  mT.

(a) Calculer le moment magnétique dipolaire de ce cadre.

**Solution :** Pour un circuit dans un plan portant un courant,  $I$ , et entourant une surface  $\mathcal{S}$ , son moment dipolaire est :

$$\vec{m} = I \mathcal{S} \hat{n}_\theta$$

Le fait qu'il y a  $N$  spires de fil électrique portant ce même courant  $I$  dit que le courant effectif est  $I_{\text{eff}} = NI$ . De ce fait, le moment dipolaire du circuit est

$$\vec{m} = N I \mathcal{S} \hat{n}_\theta = N I a^2 \hat{n}_\theta$$

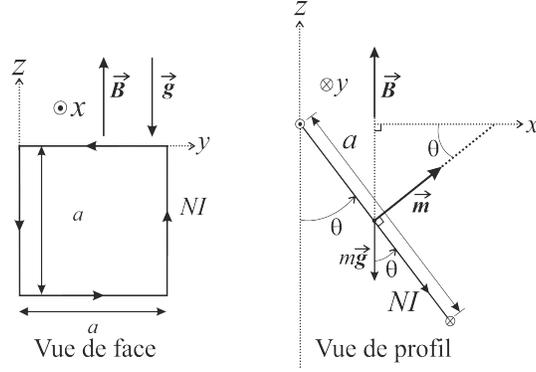


Figure 6: Cadre parcouru par un courant, dans un champ magnétique

où  $\hat{n}$  est le normal du cadre définie par le sens du courant  $I$  déclaré comme positif. Il ne faut pas oublier que  $\hat{n}$  est une fonction de  $\theta$  et avec un peu de géométrie, on peut vérifier avec la figure 6 que :

$$\hat{n}_\theta = \hat{z} \sin \theta + \cos \theta \hat{x} .$$

- (b) Calculer le moment de la force de Laplace et le moment du poids en  $O$ .

**Solution :** En se rappelant que  $\vec{B} = B\hat{z}$ , le moment de Laplace du cadre en  $O$  est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_L &= \vec{m} \wedge \vec{B} = NIa^2 \hat{n}_\theta \wedge \vec{B} = NIa^2 \hat{n}_\theta \wedge B\hat{z} = NIa^2 B (\hat{z} \sin \theta + \cos \theta \hat{x}) \wedge \hat{z} \\ &= -NIa^2 B \cos \theta \hat{y} . \end{aligned} \quad (12)$$

Le barycentre,  $C$ , du cadre est donné par :

$$\vec{OC} = -\frac{a}{2} \cos \theta \hat{z} + \frac{a}{2} \sin \theta \hat{x} .$$

La force gravitationnelle, sur le cadre est  $\vec{F}_g = -mga\hat{z}$ , donc le moment de la force gravitationnelle autour de  $O$  est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_g &= \vec{OC} \wedge \vec{F}_g = -\vec{OC} \wedge mga\hat{z} = \frac{mga}{2} \sin \theta \hat{y} = -\left(-\frac{a}{2} \cos \theta \hat{z} + \frac{a}{2} \sin \theta \hat{x}\right) \wedge mga\hat{z} \\ &= \frac{amg}{2} \sin \theta \hat{y} . \end{aligned} \quad (13)$$

Le moment totale par les deux forces est :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_t(\theta) &= \vec{\Gamma}_g + \vec{\Gamma}_L \\ &= \left(-NIa^2 B \cos \theta + \frac{amg}{2} \sin \theta\right) \hat{y} . \end{aligned} \quad (14)$$

- (c) Déterminer l'angle d'équilibre  $\theta_0$ .

**Solution :** L'angle d'équilibre correspond à l'angle,  $\theta_0$  où  $\vec{\Gamma}_t$  trouvé en l'éq.(14) est nul :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_t(\theta_0) &= \vec{0} \implies -NIa^2 B \cos \theta_0 + \frac{amg}{2} \sin \theta_0 = 0 \\ \implies \tan \theta_0 &= \frac{2NIaB}{mg} \end{aligned} \quad (15)$$

A.N.

$$\theta_0 = \arctan \frac{2 \times 200 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 115 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-2} \times 9.8} = \arctan \frac{4 \times 115 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-2} \times 9.8} \simeq 0.53$$
$$\simeq 30.4^\circ$$

On a bien trouvé le point d'équilibre répondu à la question à ce point, mais on remarque que cette méthode (trouver la condition où  $\vec{\Gamma}_t(\theta_0) = 0$ ), mais cette méthode nous dit pas si l'équilibre est stable ou non. Une méthode énergétique peut donner le même résultat et de surcroît montrer la stabilité de l'équilibre. Le potentiel gravitationnelle est :

$$\mathcal{U}_g = mg \overrightarrow{OC} \cdot \hat{z} = -mg \frac{a}{2} \cos \theta .$$

L'énergie potentielle magnétique déduit de l'éq.(8) est :

$$\mathcal{U}_m = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -NIBa^2 \cos \theta .$$

L'énergie potentielle totale est donc :

$$\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_g + \mathcal{U}_m = -mg \frac{a}{2} \cos \theta - NIBa^2 \sin \theta .$$

Les positions extrémales (maximales ou minimales) satisfont :

$$\left. \frac{d\mathcal{U}_t}{d\theta} \right|_{\theta_0} = mg \frac{a}{2} \sin \theta_0 - NIBa^2 \cos \theta_0 = 0 .$$

ce qui nous donne la même condition,  $\tan \theta_0 = 2NIBa/mg$  trouvé en l'éq.(15).

Cette méthode nous permet de démontrer que l'équilibre à la position,  $\theta_0$  est un minimum stable puisque :

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}_t}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} = mg \frac{a}{2} \cos \theta_0 + NIBa^2 \sin \theta_0 > 0 .$$