Electricité et magnétisme - TD n°7
Calcul de champs magnétiques

1. **Aspects mathématiques**

   (a) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour un champ scalaire f arbitraire.

   (b) Calculer la divergence du champ vecteur suivant (coordonnées cartésiennes) :

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(M) = C\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)},\ \frac{x}{(x^2+y^2)},\ 0\right)$$

   (c) Ecrire le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ de b) en coordonnées cylindriques.

   (d) Calculer sa divergence en coordonnées cylindriques en utilisant la formule (coordonnées cylindriques)

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   (e) Quelle conclusions en tirez-vous sur le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$?

2. **Spire parcourue par un courant**

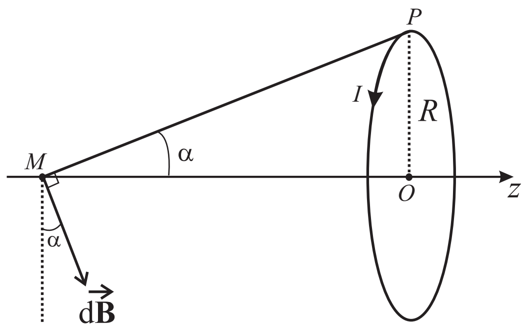

Fig. 1 – *Spire parcourue par un courant*

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I (figure 1). Déterminer le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en un point M de son axe Oz, d'abord en fonction de l'angle α sous lequel est vue la spire du point M, puis en fonction de l'abscisse z du point M. Quelle est la valeur du champ au centre de la spire ? Tracer les variations de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en fonction de z.

3. **Condition de Helmholtz**

Considérer deux cercles de rayon a à une distance $2b$. L'axe (Oz) passant par les deux centres est orthogonal aux plans des cercles. Les cercles portent des courant identiques et dans le même sens. Calculer le champ magnétique $B\,(z)$ sur l'axe des z.

   (a) Montrer que $dB/dz = 0$ à mi-chemin entre les spires.

   (b) Pour quelle valeur de b, la 2ème dérivée aussi s'annulle-t-elle au milieu ?

4. **Conducteur cylindrique**
   Un conducteur cylindrique plein infini de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I.

   (a) Etablir l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ créé par ce conducteur à une distance ρ dans les deux cas suivants : $\rho > a$ et $\rho < a$. Tracer les variations de $||\overrightarrow{\mathbf{B}}||$ en fonction de ρ.

   Le même courant I circule dans un conducteur cylindrique creux de rayons intérieur b et extérieur c.

   (b) Etablir l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ créé par ce conducteur dans les trois cas suivants : $\rho < b$, $b < \rho < c$ et $\rho > c$. Tracer les variations de $||\overrightarrow{\mathbf{B}}||$ en fonction de ρ.

5. **Solénoïde**
   Un solénoïde est un circuit constitué de spires jointives (mais isolées) faites d'un conducteur de section très faible, enroulées sur un cylindre. Soit l la longueur du cylindre, R le rayon de sa section circulaire et N le nombre total de spires parcourues par un courant constant I. L'axe du solénoïde est orienté dans le sens du courant (règle de la tire bouchon). On adoptera l'approximation d'une spire infinie (c.-à.-d. $R \ll l$)

   (a) Expliquer pourquoi le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ est parallèlle à l'axe du solénoïde partout (symétrie).

   (b) A partir de a) et le théorème d'Ampère, argumenter que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}}$, soit constant.

   (c) Montrer que $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ à l'extérieur du solénoïde soit constant et argumenter que $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

   (d) Utiliser le théorème d'Ampère afin d'en déduire la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde $\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}}$.

   (e) Vérifier que les *relations de passage* magnétiques sont satifaites dans ce problème et donner l'expression du courant surfacique, $\overrightarrow{\mathbf{j}}_s$.

6. **Bobine torique**
   Une bobine torique est constituée par N spires régulièrement enroulées sur un tore à section circulaire (figure 2). On s'intéresse à la valeur du champ dans le plan (Oxy).

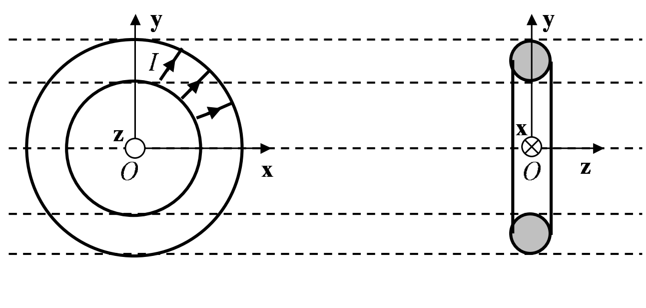

FIG. 2 – *Bobine torique*

   (a) Quelle est la valeur du champ en un point situé à la distance r du centre de la bobine ?

   (b) Montrer que supposer que le rayon de la bobine est beaucoup plus grand que le rayon de la section du tore revient à dire qu'on peut assimiler la bobine à un solénoïde infini.