

Calcul de champs magnétiques - TD n°6

Éléments du cours :

L'expression du champ magnétostatique à un point M créé par une distribution volumique de charges quelconque est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} dV \quad \text{T(esla)}, \quad (1)$$

où $\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ est la perméabilité du vide.

Formule de Biot et Savart : Le champ magnétostatique créé par un circuit parcouru par un courant permanent (c.-à-d. statique) I est:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \quad \text{T}, \quad (2)$$

où les points P sont intégrés le long du circuit et $d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OP}$ (O étant l'origine, **quelconque**, du système).

Les formules pour le champ magnétostatique de l'éq.(1) et l'éq.(2) sont cohérentes avec la loi de conservation du flux magnétique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \iff \quad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3)$$

Loi d'Ampère : La circulation de \vec{B} le long un contour fermé \mathcal{C} quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants enlacés par le contour (c.-à-d. le flux du courant traversent une surface ouverte délimitée par \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \quad \iff \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (4)$$

où la deuxième équation est la forme différentielle de la loi de Gauss.

1. Conducteurs cylindriques

- (a) Un conducteur cylindrique plein infini de rayon a est parcouru par un courant homogène d'intensité I . On suppose que le conducteur est infini selon l'axe Oz et on travaille en coordonnées cylindriques. Établir l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par ce conducteur à une distance ρ dans les deux cas suivants : $\rho > a$ et $\rho < a$. Tracer les variations de $|\vec{B}|$ en fonction de ρ .

Solution :

On dispose d'un conducteur cylindrique infini, de rayon a , parcouru par un courant I .

On regarde les symétries. Tout plan contenant l'axe \hat{z} et perpendiculaire à Oxy est plan de symétrie. Le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie. Le champ magnétique sera donc dans le plan Oxy et perpendiculaire à tout plan de symétrie. Le champ magnétique est donc forcément orienté selon, $\hat{\phi}$. En conclusion on a : $\vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho)\hat{\phi}$.

Pour calculer le champ magnétique, on peut utiliser le théorème (loi) d'Ampère:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \quad \text{avec} \quad I_{\text{enl}} = \iint_{S-\text{enlacé par } \mathcal{C}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Regardons les deux cas, sachant que $d\vec{\ell} = \rho d\phi \hat{\phi}$:

- Pour $\rho > a$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\phi(\rho) \rho d\phi = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 I$$

Donc

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

- Pour $\rho < a$: Puisque le courant est homogène, la densité de courant est :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \equiv j_0 \hat{z}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{S < \rho} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \mu_0 I \frac{\rho^2}{a^2}$$

$$\implies B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

- (b) Le même courant I circule dans un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur b et extérieur c . Établir l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par ce conducteur dans les trois cas suivants: $\rho < b$, $b < \rho < c$ et $\rho > c$. Tracer les variations de $|\vec{B}|$ en fonction de ρ .

Solution : Le conducteur est maintenant un cylindre creux de rayon intérieur b et extérieur c . On applique à nouveau le théorème d'Ampère et on considère les différentes zones.

- Pour $\rho < b$, il n'y pas de courant donc, $\vec{B} = \vec{0}$.
- Pour $b < \rho < c$, la densité de courant est $j = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 I_{\text{enl}} = \mu_0 \iint_{b < \rho' < \rho} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

$$\implies B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

- Pour $c > \rho$, on a :

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}$$

On constate bien la continuité de la composante $B_\phi(\rho)$.

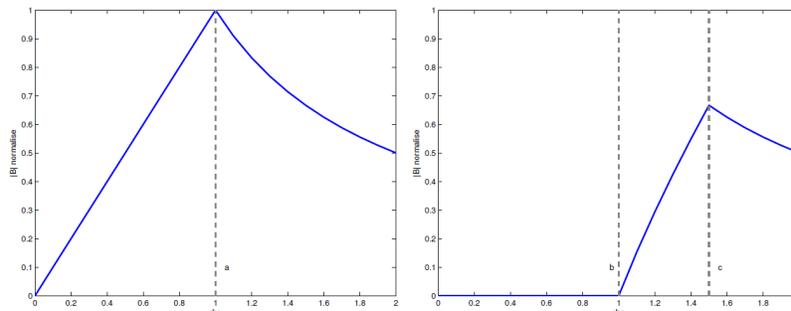


Figure 1: Variation de B_ϕ en fonction de ρ lorsque (a) le cylindre est plein, (b) le cylindre est creux.

- (c) Un câble coaxial est formé de deux long cylindres conducteurs concentriques. Le cylindre extérieur, creux, a un rayon intérieur b et un rayon extérieur c . Le cylindre intérieur, plein, a un rayon $a < b$. Les deux conducteurs sont parcourus par des courants égaux (uniformes) I mais des directions opposées. Calculer le champ magnétique de ce système.

Solution : Pour le câble coaxial, il faut combiner un cylindre creux et un cylindre plein. Les deux conducteurs sont parcourus par des courants égaux mais de directions opposées. Il faut à nouveau décomposer suivant les différentes zones. On suppose que le courant pour le cylindre intérieur va vers les z croissants (\otimes) et l'autre vers les z décroissants (\odot).

- Pour $\rho < a$, on a vu précédemment que :

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

- Pour $a < \rho < b$, on a vu précédemment que :

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

- Pour $b < \rho < c$, on a :

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

- Pour $c < \rho$, on a $I_{\text{enl}} = I - I = 0$, donc $\vec{B} = \vec{0}$.

2. Champ créé par des fils rectilignes

- (a) Deux fils parallèles rectilignes infinis sont situés à 40cm l'un de l'autre. Un fil est parcouru par un courant de 25A et le deuxième par un courant de 75A. Trouver les points où le champ magnétique créé par les deux fils s'annule. Considérer les deux cas : les courants ont la même direction ou des directions opposées.

Solution : Les deux fils sont espacés de $2a = 0.4\text{m}$ selon l'axe Ox . On a donc un fil à $(-a, 0, z)$ avec un courant $I_1 = 25\text{A}$ et l'autre à $(a, 0, z)$ avec un courant $I_2 = 75\text{A}$. On regarde les symétries et on travaille en coordonnées cylindriques. Le plan Oxz est un plan de symétrie. Le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie car le courant a un sens de parcours (qui s'inverse sous réflexion dans le plan Oxy). Il faut que le vecteur \vec{B} soit perpendiculaire au plan Oxz et contenu dans le plan Oxy , car c'est un pseudo-vecteur et non pas un vrai vecteur. On a donc forcément $\vec{B}(\rho, \phi, z) = B_\phi(\rho, \phi, z) \hat{\phi}$ (On peut s'en convaincre en utilisant également la règle du tire-bouchon).

On regarde maintenant les invariances. On a invariance par translation selon l'axe z , donc $\vec{B}(\rho, \phi, z) = \vec{B}(\rho, \phi)$. Ce champ correspondra à la superposition du champ généré par chacun des fils. Il faut donc calculer chaque champ magnétique séparément.

- Supposons que les fils soient parcourus par des courants allant dans la même direction. Pour les deux fils, on a

$$\vec{B}_1(\rho_1, \phi_1) = \frac{\mu_0}{2\pi \rho_1} I_1 \hat{\phi}_1 \quad \vec{B}_2(\rho_2, \phi_2) = \frac{\mu_0}{2\pi \rho_2} I_2 \hat{\phi}_2$$

sachant que $\rho_1, \hat{\phi}_1$ (resp. $\rho_2, \hat{\phi}_2$) sont rattachés au repère correspondant au premier (resp. deuxième) fil, i.e.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} & \rho_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ \phi_1 &= \arctan\left(\frac{y}{x+a}\right) & \phi_2 &= \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right) \\ \hat{\phi}_1 &= -\sin(\phi_1)\hat{x} + \cos(\phi_1)\hat{y} & \hat{\phi}_2 &= -\sin(\phi_2)\hat{x} + \cos(\phi_2)\hat{y} \end{aligned}$$

Le champ magnétique total vaudra donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{\rho_1} \hat{\phi}_1 + \frac{I_2}{\rho_2} \hat{\phi}_2 \right)$$

Le champ magnétique s'annule si :

$$\frac{I_1}{\rho_1} \hat{\phi}_1 + \frac{I_2}{\rho_2} \hat{\phi}_2 = 0$$

$$\implies \begin{cases} \frac{I_1}{\rho_1} \sin \phi_1 = -\frac{I_2}{\rho_2} \sin \phi_2 \\ \frac{I_1}{\rho_1} \cos \phi_1 = -\frac{I_2}{\rho_2} \cos \phi_2 \end{cases}$$

ce qui oblige déjà à avoir $\tan(\phi_1) = \tan(\phi_2)$, soit $\phi_1 = \phi_2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Il faut considérer les deux cas :

- Si $\phi_1 = \phi_2$, (par exemple sur l'axe, Ox , aux positions avec $x > a$ ou $x < -a$) alors pour que le champ s'annule, il faut que :

$$\frac{I_1}{\rho_1} = -\frac{I_2}{\rho_2} \implies \frac{I_1}{I_2} = -\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Comme les rayons sont forcément positifs, ce n'est pas possible de trouver de tels rayons.

- Si $\phi_1 = \phi_2 + \pi$, alors pour que le champ s'annule, il faut que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

ce qui est tout à fait possible. Il faut donc trouver les points d'intersection qui sont sur un cercle de rayon ρ_1 et de centre $(-a, 0)$ et ceux qui sont sur un cercle de rayon $\frac{I_2}{I_1} \rho_2$ de centre $(a, 0)$. Il faut en même temps que, $\hat{\phi}_1 = -\hat{\phi}_2$. Pour que cette dernière solution soit possible, il faut forcément que $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$ soient perpendiculaires à \hat{x} ($\phi_1 = 0$). $\phi_1 = 0$ implique également que $\rho_1 = x + a$ et $\rho_2 = a - x$, soit $\rho_1 + \rho_2 = 2a$. Le point où $\vec{B} = \vec{0}$, est donc entre $(-a, 0)$ et $(a, 0)$.

On a :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{x + a}{a - x}$$

$$\implies I_1(a - x) = I_2(x + a) \implies a(I_1 - I_2) = x(I_1 + I_2)$$

$$\implies x = a \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

- Supposons maintenant que les courants soient de direction opposé. Le champ magnétique vaut

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{\rho_1} \hat{\phi}_1 - \frac{I_2}{\rho_2} \hat{\phi}_2 \right)$$

Dans ce cas, il est seulement possible d'avoir $\phi_1 = \phi_2$, si on se réfère à la discussion précédente. On a :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{et} \quad \phi_1 = \phi_2 \implies \hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$$

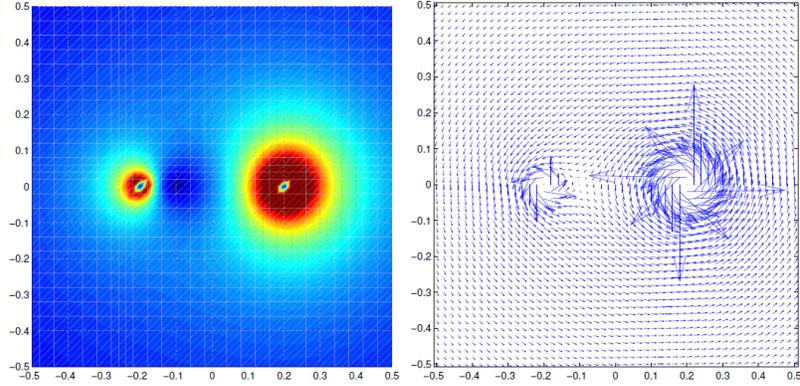


Figure 2: Amplitude et orientation du champ magnétique lorsque les courants vont dans le même sens.

A nouveau, on ne garde que les points qui sont sur l'axe Ox . Cette fois-ci, les points seront à l'extérieur du segment $[-a, a]$, car s'ils sont à l'intérieur, les vecteurs ne sont pas de direction opposé. On a : $\rho_1 = x + a$ et $\rho_2 = x - a$, donc $\rho_1 - \rho_2 = 2a$. On trouve :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{x + a}{x - a}$$

$$\begin{aligned} \implies I_1(x - a) &= I_2(x + a) \implies a(I_1 + I_2) = x(I_1 - I_2) \\ \implies x &= a \frac{I_1 + I_2}{I_1 - I_2} \end{aligned}$$

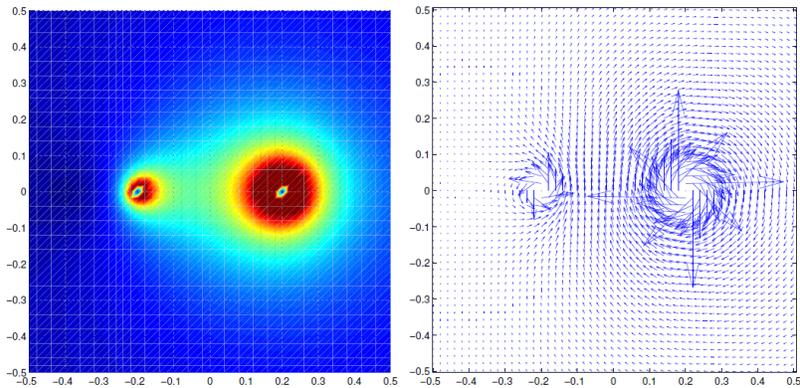


Figure 3: Amplitude et orientation du champ magnétique lorsque les courants vont de sens opposés.

- (b) Quatre fils parallèles rectilignes infinis sont parcourus par un courant de 100A chacun. Les 4 fils sont situés aux sommets d'un carré de côté de $2a = 20\text{cm}$ (figure 4). Calculer le champ magnétique au centre du carré pour les 3 cas suivants :

Solution : On dispose maintenant de 4 fils qui sont tous parcourus par le même courant et qui sont tous à une distance, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = a\sqrt{2}$ du centre du repère. On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a 2\sqrt{2}} \left(\text{sign}(I_1)\hat{\phi}_1 + \text{sign}(I_2)\hat{\phi}_2 + \text{sign}(I_3)\hat{\phi}_3 + \text{sign}(I_4)\hat{\phi}_4 \right)$$

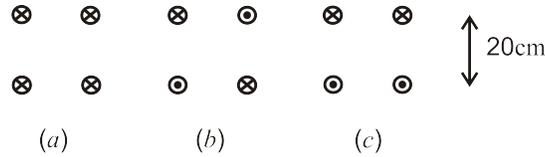


Figure 4: *fil rectilignes et parallèles portant des courant $I = 100A$.*

Avec les quatre fils si on met les fils de manière équi-répartie, le vecteur $\hat{\phi}_1$ fera un angle de $\pi/4$ avec les axes \hat{x} et \hat{y} . On peut résumer les valeurs de $\text{sign}(I_i)\hat{\phi}_i$ dans le tableau suivant :

Fil	I_1	I_2	I_3	I_4
position	(a, a)	$(-a, a)$	$(-a, -a)$	$(a, -a)$
Orientation \odot	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{x} + \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{x} - \hat{y})$
Orientation \otimes	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{x} + \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{x} - \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y})$

Les combinaisons linéaires vont donc donner :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes \end{pmatrix} &\Rightarrow \sum_i \text{sign}(I_i) \hat{\phi}_i = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} \odot & \odot \\ \odot & \odot \end{pmatrix} &\Rightarrow \sum_i \text{sign}(I_i) \hat{\phi}_i = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} \otimes & \odot \\ \odot & \otimes \end{pmatrix} &\Rightarrow \sum_i \text{sign}(I_i) \hat{\phi}_i = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} \otimes & \otimes \\ \odot & \odot \end{pmatrix} &\Rightarrow \sum_i \text{sign}(I_i) \hat{\phi}_i = -4 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} \end{aligned}$$

Le champ magnétique total, dans le dernier cas, vaut :

$$\vec{B} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a} \hat{x}$$

3. Spires parcourues par un courant

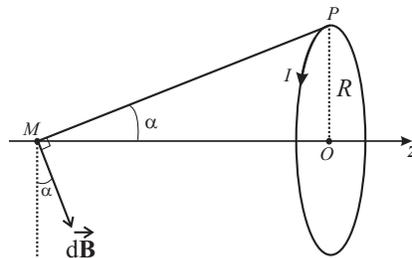


Figure 5: *Spire parcourue par un courant*

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I (figure 5).

- (a) Déterminer le vecteur champ magnétique \vec{B} en un point M de son axe Oz , d'abord en fonction de l'angle α sous lequel est vue la spire du point M , puis en fonction de l'abscisse z du point M .

Solution : On a une spire de rayon R . On cherche le champ magnétique sur son axe Oz . On se met en coordonnées polaires (ρ, ϕ, z) . La spire est dans le plan xOy .

On regarde tout d'abord les symétries. Le plan xOy est un plan de symétrie. Tout plan contenant l'axe Oz et perpendiculaire à xOy est un plan d'anti-symétrie. De plus, la densité de courant \vec{j} est invariante par rotation autour de z (elle est de la forme $j(\rho, z)\hat{\phi}$). La dépendance en ϕ est éliminée car il y a invariance par rotation selon ϕ . Sur l'axe des z , la composante radiale disparaît. On a donc seulement $B_z(\rho, z)\hat{z}$.

On sait que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \hat{\phi} d\phi \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (5)$$

On exprime maintenant, \overrightarrow{PM} en fonction de R , z et α (n.b. α est l'angle de la spire vu depuis le point M qui satisfait $\tan \alpha = \frac{R}{z}$). On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = -z\hat{z} - R\hat{\rho} \\ PM &= \sqrt{z^2 + R^2} = \frac{R}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

En remplaçant ces termes dans l'expression de \vec{B} en l'éq.(5), on trouve

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \alpha \hat{\phi} d\phi \wedge (-z\hat{z} - R\hat{\rho})}{R^3} \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \alpha d\phi (-z\hat{\rho} + R\hat{z})}{R^3} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\phi = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} d\phi \hat{\rho} = 0$ (ne pas oublier que les $\hat{\rho}$ se compensent, ou de manière mathématique, comme $\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$ et que les fonctions $\cos \phi$ et $\sin \phi$ 2π périodiques, on a une valeur moyenne nulle. On peut également écrire le champ en fonction de la position, z sur l'axe :

$$\vec{B}(M) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \hat{z} \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

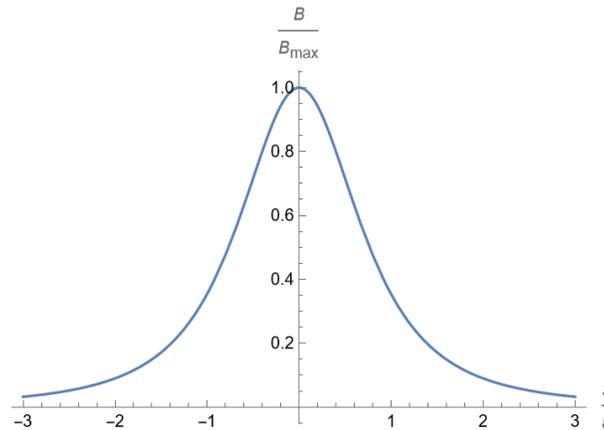


Figure 6: (c) Évolution du champ magnétique créé par une spire, le long de l'axe Oz .

- (b) Quelle est la valeur du champ au centre de la spire?

Solution : En $z = 0$, le champ magnétique vaut :

$$\vec{B}(O) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \equiv \hat{z} B_{\max} \quad (7)$$

- (c) Tracer les variations de \vec{B} en fonction de z .
4. Déterminer le champ magnétique au point P :
- (a) créé par le courant circulant dans la partie circulaire du fil (figure 7a).

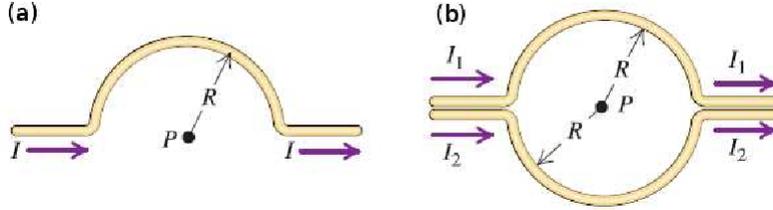


Figure 7: Fils de avec des segments semi-circulaires.

Solution : On s'intéresse à la spire décrite dans la figure a. On travaille en coordonnées cylindriques avec l'axe Oz perpendiculaire au plan avec l'origine au point P . Soit P' un point sur la spire et on ne s'intéresse qu'à la partie circulaire. On a :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{d\ell}' \wedge \overrightarrow{P'P}}{(P'P)^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{R(-\hat{\phi})d\phi \wedge R(-\hat{\rho})}{R^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \hat{z} \int_0^\pi d\phi = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z} \quad (8)$$

- (b) créé par les courants I_1 et I_2 (figure 7b).

Solution : On rajoute maintenant la spire du bas. On aura superposition des deux champs magnétiques. Il faut simplement faire attention au sens de parcours pour les orientations des vecteurs magnétiques

$$\vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int \frac{\vec{d\ell}' \wedge \overrightarrow{P'P}}{(P'P)^3} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_0^{-\pi} \frac{R\hat{\phi}d\phi \wedge R\hat{\rho}}{R^3} = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} \hat{z} \int_0^{-\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I_2}{4R} \hat{z} \quad (9)$$

Le champ total est la superposition des deux champs produit par les deux demi-spire :

$$\vec{B}_{\text{tot}}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = \frac{\mu_0}{4R} \hat{z} (I_2 - I_1) \quad (10)$$

5. **Solénoïde** Un solénoïde est un circuit constitué de spires jointives (mais isolées) faites d'un conducteur de section très faible, enroulées sur un cylindre. Soit ℓ la longueur du cylindre, R le rayon de sa section circulaire et N le nombre total de spires parcourues par un courant constant I . L'axe du solénoïde est orienté dans le sens du courant (règle du tire-bouchon). On adoptera l'approximation d'un solénoïde infini (c.-à.-d. $R \ll \ell$)

- (a) Expliquer pourquoi le champ \vec{B} est parallèle à l'axe du solénoïde partout (symétrie).

Solution : On a des plans d'anti-symétrie : n'importe quel plan contenant \hat{z} et perpendiculaire à Oxy . On a également des plans de symétries, tous ceux qui sont à $z = \text{cst}$. Donc, il faut que \vec{B} soit perpendiculaire au plan $z = \text{cst}$ et contenu dans tous les plans d'anti-symétrie. On a donc forcément \vec{B} orienté selon \hat{z} . Les invariances par translation selon z et par rotation selon z font que $\vec{B}(\rho, \phi, z) = B_z(\rho)\hat{z}$.

- (b) A partir de a) et le théorème d'Ampère, argumenter que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, \vec{B}_{enl} , est constant.

Solution : On applique maintenant le théorème d'Ampère en prenant comme contour un cadre rectangulaire orienté selon l'axe \hat{z} , par exemple le cadre délimité par les points $(\rho_0, 0, z_0)$, $(\rho_0, 0, z_1)$, (ρ_0, π, z_1) , (ρ_0, π, z_0) qui sont à des distances différentes de l'axe \hat{z} . Seules les directions $\vec{d\ell}$ qui sont parallèles à \hat{z} compteront dans le théorème d'Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \int_{z_0}^{z_0+h} B_z(\rho_0) dz - \int_{z_0}^{z_0+h} B_z(\rho_1) dz = \mu_0 I_{\text{enl}} = 0$$

$$\implies B_z(\rho_0)h - B_z(\rho_1)h = 0 \implies B_z(\rho_0) = B_z(\rho_1) = B_{\text{int}}$$

Cette démonstration est vraie pour tout $\rho_0, \rho_1 < R$. Donc \vec{B} est constant à l'intérieur du solénoïde.

- (c) Montrer que \vec{B}_{ext} à l'extérieur du solénoïde soit constant et argumenter que $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

Solution : A l'extérieur du solide, le champ magnétique est toujours orienté suivant \hat{z} . On prend à nouveau un contour fermé uniquement à l'extérieur, par exemple le cadre délimité par $(\rho_0, 0, z_0)$, $(\rho_0, 0, z_1)$, (ρ_0, π, z_1) , (ρ_0, π, z_0) , avec cette fois-ci $\rho_0, \rho_1 > R$. Il y a à nouveau pas de courant dans ce cadre et seule la partie suivant l'axe \hat{z} comptera. On a donc $B_z(\rho_0) = B_z(\rho_1) = B_{\text{ext}}$ et donc $B_z(\rho)$ est constant à l'extérieur.

- (d) Utiliser le théorème d'Ampère afin d'en déduire la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde \vec{B}_{enl} .

Solution : Prenons maintenant un cadre englobant un côté du solénoïde, délimité par $(\rho_0, 0, z_0)$, $(\rho_0, 0, z_1)$, (ρ_0, π, z_1) , (ρ_0, π, z_0) , avec $\rho_0 < R$ et $\rho_1 > R$ et qui englobe N spires. On applique à nouveau le théorème d'Ampère et on a

$$[B_z(\rho_0) - B_z(\rho_1)] \ell = \mu_0 N \ell$$

$$\implies B_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

- (e) Vérifier que les *relations de passage* magnétiques sont satisfaites dans ce problème et donner l'expression du courant surfacique, \vec{j}_s .

Solution : Les relations de passage donnent

$$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

On prend la surface du solénoïde, donc par exemple $\hat{n}_{12} = \hat{\rho}$. On a bien

$$\hat{\rho} \cdot \hat{z} B_{\text{int}} = 0$$

$$-\hat{\rho} \wedge \hat{z} B_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \hat{\phi} = \mu_0 \vec{j}_s$$

ce qui nous donne que la densité de courant surfacique

$$\vec{j}_s = \frac{NI}{\ell} \hat{\phi}$$

ce qui est conforme avec ce à quoi on s'attend.

6. Bobine torique

Une bobine torique est constituée par N spires régulièrement enroulées sur un tore à section circulaire (figure 9). On s'intéresse à la valeur du champ dans le plan (Oxy) .

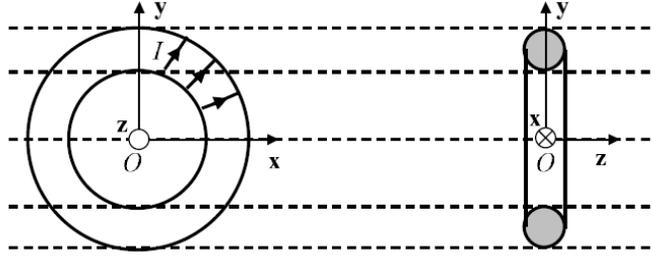


Figure 8: *Bobine torique*

- (a) Quelle est la valeur du champ en un point situé à la distance r du centre de la bobine?

Solution : On se positionne en coordonnées cylindriques. On suppose que le rayon interne du tore vaut a et le rayon externe vaut b .

On regarde tout d'abord les symétries. Tout plan perpendiculaire à xOy et contenant \hat{z} est un plan de symétrie, donc \vec{B} doit être perpendiculaire à tout ces plans (donc \vec{B} doit être orienté selon $\hat{\phi}$). Il y a invariance par rotation donc $\vec{B}(\rho, \phi, z) = \hat{\phi}B_\phi(\rho, z)$. Vu le sens de parcours du courant, $B_\phi > 0$. On applique le théorème d'Ampère et on considère différents cas. A chaque fois, on choisit comme contour un cercle de rayon ρ avec $z = \text{cst}$.

Dans le plan $z = 0$, on a trois cas.

- Pour $\rho < a$, il n'y a pas de courant enlacé, donc $\vec{B} = \vec{0}$
- Pour $a < \rho < b$, on a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

$$\int_0^{2\pi} B_\phi(\rho, z) \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \rho d\phi = \mu_0 NI$$

$$2\pi\rho B_\phi(\rho, z) = \mu_0 NI$$

$$B_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}$$

- Pour $\rho > b$, on a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho B_\phi(\rho, z) = \mu_0 NI - \mu_0 NI = 0$$

- (b) Montrer que supposer que le rayon de la bobine est beaucoup plus grand que le rayon de la section du tore revient à dire qu'on peut assimiler la bobine à un solénoïde infini.

Solution : Si le rayon de la bobine devient beaucoup plus grand que le rayon de la section du tore ($a \gg b - a$), et le champ magnétique l'intérieure de la solénoïde est quasi-uniforme, $B_{\phi, \text{int}} \simeq \frac{\mu_0 NI}{2\pi \frac{a+b}{2}} = \mu_0 nI$ où $n = \frac{N}{2\pi \frac{a+b}{2}}$ est le nombre de spires par unité de longueur.

7. **Bobines d'Helmholtz** On considère deux bobines circulaires de rayon a , chacune constituée par N spires parcourues par un courant constant I et situées à une distance a , l'une de l'autre. Le courant circule dans le même sens dans les deux bobines, produisant un champ magnétique très uniforme dans la région entre eux.

- (a) Calculer le champ magnétique sur l'axe (Oz) des bobines.

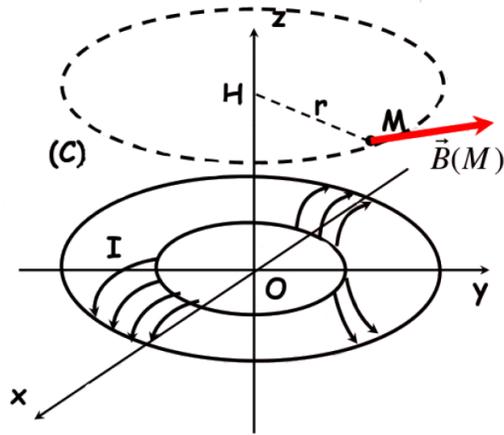


Figure 9: Application du théorème d'Ampère sur une bobine torique.

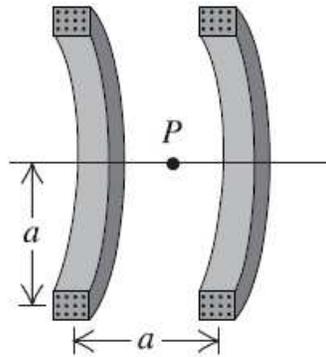


Figure 10: Bobines d'Helmholtz

Solution : On a vu précédemment (Exercice 3, 1(éq.(6)), que le champ magnétique générée par une seule spire (si elle est positionnée en $z = 0$) valait sur l'axe de la spire :

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Si maintenant on a N spires dans la bobine, on a simplement:

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \frac{\mu_0 N I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Si maintenant on a 2 bobines, il faut faire attention à la position de z par rapport à ces bobines. On prend l'origine du repère de manière à ce que la première bobine soit à $O_1(z = -a/2)$ et la deuxième à $O_2(z = a/2)$.

$$\vec{B}(z) = \hat{z} \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[a^2 + \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[a^2 + \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

- (b) Tracer l'allure du graphe du $B_z(z)$ et comparer avec celui du champ magnétique produit par une seule bobine.

Solution :

$$\vec{B}(M) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \hat{z} \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \quad (11)$$

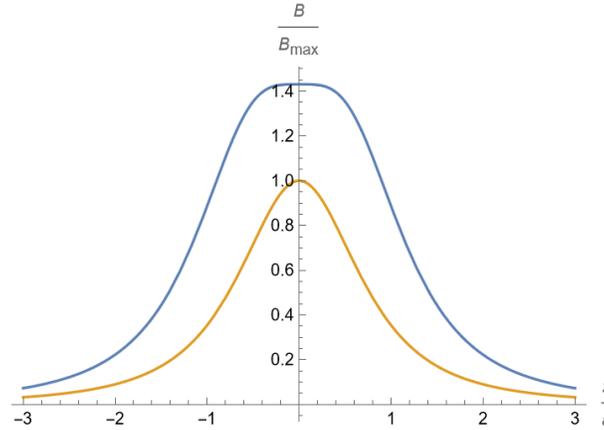


Figure 11: Champ magnétique, B_z le long de l'axe Oz pour une bobine Helmholtz comparé au champ d'une seule bobine placé à l'origine.

- (c) Déterminer le champ magnétique au point P (milieu de la distance entre les 2 bobines).

Solution :

$$B_z(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 N I}{a} \simeq 1.43 B_{\max}$$

où B_{\max} est la valeur qu'un centre d'une bobine seule donne en éq. (7).

- (d) Calculer $\frac{dB}{dz}$ et $\frac{d^2B}{dz^2}$ au point P . Expliquer pourquoi le champ est uniforme près du point P .

Solution : Le premier dérivé de B_z est

$$\frac{d}{dz} B_z(z) = -\frac{3a^2 \mu_0 I}{2} \left[\frac{z - \frac{a}{2}}{\left(a^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{z + \frac{a}{2}}{\left(a^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{5/2}} \right]$$

$$\frac{d^2}{dz^2} B_z(z) = \frac{3a^2 \mu_0 I}{2} \left[-\frac{1}{\left(a^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(a^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{5/2}} \right. \\ \left. + \frac{5\left(z - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(a^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{7/2}} + \frac{5\left(z + \frac{a}{2}\right)^2}{\left(a^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right)^{7/2}} \right]$$

En évaluant ces expressions au centre de la bobine, ($z = 0$), on trouve $\frac{d}{dz} B_z(0) = 0$, et $\frac{d^2}{dz^2} B_z(0) = 0$. Le fait que le deuxième dérivé par rapport à z soit nul nous dit que le champ va rester presque constant dans une certaine zone autour de $z = 0$, dont la taille dépendra sur la troisième dérivée de z en 0.

A.N. : $N=300$ tours, $I = 6\text{A}$, $a=8\text{cm}$.

Solution :

$$B_{\text{Helmholtz}}(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{4\pi 10^{-7} \times 300 \times 6}{0.08} \simeq 0.02\text{T}$$

1. Aspects mathématiques

(a) Montrer que $\overrightarrow{\text{rot grad}} f = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour un champ scalaire f arbitraire.

Solution :

$$\overrightarrow{\text{rot grad}} f = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

(b) Calculer la divergence du champ vecteur suivant (coordonnées cartésiennes) :

$$\vec{\mathbf{B}}(M) = C \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right)$$

Solution :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\mathbf{B}} &= C \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{yC}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{xC}{x^2 + y^2} \\ &= 2C \left(\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ce n'est pas demandé, mais nous avons aussi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathbf{B}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{z}} C \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \hat{\mathbf{z}} C \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \hat{\mathbf{z}} C \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2}{(x^2 + y^2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

mais $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathbf{B}}$ n'est définie pas à l'origine.

(c) Écrire le champ $\vec{\mathbf{B}}$ de b) en coordonnées cylindriques.

Solution :

$$\begin{aligned} \rho &= (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} = -\frac{y}{\rho} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{\rho} \hat{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{y}} \\ \vec{\mathbf{B}}(\rho, \phi, z) &= \frac{\hat{\phi}}{\rho} C \quad \text{c.-à.-d.} \quad \vec{\mathbf{B}} = B_\phi(\rho) \hat{\phi} \quad B_\phi(\rho) = \frac{C}{\rho} \end{aligned}$$

(d) Calculer sa divergence en coordonnées cylindriques en utilisant la formule (coordonnées cylindriques)

$$\text{div } \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Solution :

$$\text{div } \vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0$$

De nouveaux, ce n'est pas demandé mais en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\rho}\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{C}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\rho}\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{C}{\rho} \vec{0}\end{aligned}$$

(e) Quelle conclusion en tirez-vous sur le champ \vec{B} ?

Solution : Le champ circule autour de l'axe z . Sa divergence est nulle, même à l'origine. Sa rotationnel est zéro sauf à l'origine, où il est mal défini à l'origine.

2. Rappels: Produit vectoriel

On considère les vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , dont les coordonnées cartésiennes sont: $\vec{a} = (-u, 0, u)$, $\vec{b} = (u, 0, 0)$, $\vec{c} = (2u, -u, u)$, $\vec{d} = (-u, 0, 0)$.

(a) Calculer les produits vectoriels: $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{c}$, $\vec{b} \wedge \vec{c}$, $\vec{b} \wedge \vec{d}$.

Solution :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (-u\hat{x} + u\hat{z}) \wedge u\hat{x} = u^2\hat{z} \wedge \hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -u & 0 & u \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u^2\hat{y}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = (-u\hat{x} + u\hat{z}) \wedge (2u\hat{x} - u\hat{y} + u\hat{z})$$

$$= u^2\hat{x} \wedge \hat{y} - u^2\hat{x} \wedge \hat{z} + 2u^2\hat{z} \wedge \hat{x} - u^2\hat{z} \wedge \hat{y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -u & 0 & u \\ 2u & -u & u \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2u \\ -u \\ u \end{bmatrix} = u^2\hat{x} + 3u^2\hat{y} + u^2\hat{z}$$

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = u\hat{x} \wedge (2u\hat{x} - u\hat{y} + u\hat{z}) = -u^2\hat{x} \wedge \hat{y} + u^2\hat{x} \wedge \hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u & 0 & 0 \\ 2u & -u & u \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2u \\ -u \\ u \end{bmatrix} = -u^2\hat{y} - u^2\hat{z}$$

$$\vec{b} \wedge \vec{d} = -u^2\hat{x} \wedge \hat{x} = \vec{0}$$

(b) Calculer l'angle entre les vecteurs \vec{a} et \vec{d} . Même chose pour les vecteurs \vec{b} et \vec{c} .

Solution :

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{d} &= \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u^2 = |\vec{a}| |\vec{d}| \cos \theta = u^2 \sqrt{2} \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ\end{aligned}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2u \\ -u \\ u \end{bmatrix} = 2u^2 = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = u^2 \sqrt{6} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \theta = 35,26^\circ$$

- (c) Est-ce que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est égale à $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$? Calculer également les produits mixtes : $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Solution :

$$\begin{aligned} (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= -u^2 \hat{y} - u^2 \hat{z} \\ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (-u \hat{x} + u \hat{z}) \wedge -u^2 (\hat{y} + \hat{z}) = u^3 (\hat{x} - \hat{z}) \wedge (\hat{y} + \hat{z}) \\ &= \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -u^2 \\ -u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^3 \\ -u^3 \\ u^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u^2 \hat{y} \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ u^2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2u \\ -u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^3 \\ 0 \\ -2u^3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donc $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$. On peut conclure que le produit vecteur n'est pas associative.

On remarque par contre que le «triple produit» ne dépend pas de l'ordre de produit vecteur et scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= u(-\hat{x} + \hat{z}) \cdot -u^2(\hat{y} + \hat{z}) \\ &= u^3(\hat{x} - \hat{z}) \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = -u^3 \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} &= u^2 \hat{y} \cdot (2u \hat{x} - u \hat{y} + u \hat{z}) = -u^3 \end{aligned}$$