Electricité et magnétisme - TD n° 5
Diélectriques et Conducteurs

Solution de l'exercice 1

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\,10^9 \qquad \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\,9\,10^9} \simeq 8.8410^{-12}\mathrm{Fm}^{-1}$$
$$\epsilon_m = \varepsilon_r\epsilon_0 = 5\,10^{-11}\mathrm{Fm}^{-1} \qquad \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_0} = \frac{5\,10^{-11}}{8.8410^{-12}} \simeq 5,7$$
$$\varepsilon_r = 1 + \chi_m \qquad \Rightarrow \chi_m \simeq 4,7$$

Solution de l'exercice 2

Le calcul est exactement le même que pour une boule conductrice dans le vide, simplement ϵ_0 devient maintenant $\epsilon_m = \epsilon_0\epsilon_r$

$$r > R : \overrightarrow{\mathbf{E}}(r) = \hat{\mathbf{u}}_r E_r = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{r}$$
$$r < R : \overrightarrow{\mathbf{E}}(r) = \hat{\mathbf{u}}_r E_r = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_m}\frac{1}{R}$$

Solution de l'exercice 3

$$I = \left\|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\| \times s \qquad \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\| = \frac{I}{s} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10}{(10^{-3})^2} = 10^7\ \mathrm{Cs^{-1}m^{-2}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho_p \overrightarrow{\mathbf{v}} \qquad \Rightarrow \|\overrightarrow{\mathbf{v}}\| = \frac{\left\|\overrightarrow{\mathbf{j}}\right\|}{\rho_p} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10^7\ \mathrm{ms}^{-1}}{1,36\,10^{10}} \simeq 10^{-3}\ \mathrm{ms}^{-1} = 1\ \mathrm{mms}^{-1}$$

Solution de l'exercice 4

1. Les équations de base en magnéto-statique sont :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \tag{1}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0\,\overrightarrow{\mathbf{j}} \tag{2}$$

Le premier montre que le flux de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ est conservateur :

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{B}}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS = 0$$

On peut prendre la divergence du deuxième équation du magnétostatique afin de trouver :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{B}} \equiv 0 = \mu_0 \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

donc le flux de $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ est conservateur en magnétostatique :

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{j}} = \oiint_S \overrightarrow{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

2. Nous avons que $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, et $\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires.

$$I = jS = \gamma ES$$

et

$$U = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = -El$$

donc

$$I = \gamma ES = -\gamma \frac{U}{l} S$$
$$U = -I \frac{l}{S\gamma}$$

Dans la convention générateur de U positif et I positif sont dans le même sens $U = -IR$ donc on peut conclure que :

$$R = \frac{l}{S\gamma}$$

Solution de l'exercice 5

1. Pour un fil on peut écrire

$$dR = \frac{dl}{S\gamma}$$
$$R_t = \int dR = \int \frac{dl}{S\gamma} = \frac{l}{S\gamma}$$

C'est le même problème ici sauf que la section est variable

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dl}{S\gamma}$$

avec

$$dl = dr$$
$$S = 2\pi rl$$

donc

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi rl\gamma} = \frac{1}{2\pi l\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$
$$= \frac{1}{2\pi l\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2.

$$R \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{1}{2 \times 3.1416 \times 10^{-22} \times 10^3} \ln 2 \simeq 1.1 \times 10^{18}\Omega$$
$$IR = U = 10^3$$
$$I \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{10^3}{1.1 \times 10^{18}} \simeq 9 \times 10^{-16}\text{A}$$