

Électricité et magnétisme - TD n°4

Énergie électrostatique

Éléments du cours :

Le moment dipolaire (électrique) d'un système de N charges ponctuelles est donné par :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \iiint \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r, \quad (1)$$

où la seconde égalité s'applique à une distribution continue de charges, représentée par une densité volumique de charge ρ .

L'énergie potentielle $\mathcal{E}_e(M)$ d'une charge q en un point M dans un champ électrique s'exprime par :

$$\mathcal{E}_e(M) = qV(M), \quad (2)$$

où $V(M)$ désigne le potentiel électrique en ce point.

L'énergie électrique d'un système de N charges ponctuelles s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i, \quad (3)$$

où V_i désigne le potentiel électrique créé par tous les charges à l'exception de la charge q_i .

Pour une distribution continue de charges, l'énergie électrique s'écrit:

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iiint \rho(P) V(P) d\mathcal{V}, \quad (4)$$

Une application de cette équation à un système de N conducteurs portant des charges, Q_i , et des potentiels respectifs, V_i :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i, \quad (5)$$

Un condensateur possède deux armatures en influence quasi totale, ce qui implique que $Q_2 \simeq -Q_1$. Par conséquent, l'énergie stockée par le condensateur est :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) \longrightarrow \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q_1 U_{12} = \frac{1}{2} C U_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}. \quad (6)$$

On a dérivé en cours que l'énergie électrique se calcul aussi en intégrant $\vec{D} \cdot \vec{E}/2$ sur tout l'espace :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}. \quad (7)$$

1. Charge traversant un potentiel

Quelles sont l'énergie cinétique en Joules et la vitesse en m/s d'un noyau de oxygène ^{16}O (8 protons, 8 neutrons) après une accélération par une différence de potentiel de $\Delta V = 10^7$ V ?

Solution : Le fait que l'énergie est conservée dans ce problème implique $\mathcal{T} + \mathcal{U} = \text{cte}$, où $\mathcal{T}$ est l'énergie cinétique de ^{16}O et $\mathcal{U}$ son énergie potentielle. Il s'agit ici d'un transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique. On a donc $\Delta\mathcal{T} + \Delta\mathcal{U} = 0$ ce que nous donne :

$$\Delta\mathcal{T} = -\Delta\mathcal{U} = -q\Delta V = 8 \times 10^7 \text{ eV} = 8 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \times 10^7 = 1.28 \times 10^{-11} \text{ J}$$

où $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{fin}} - \mathcal{T}_{\text{init}}$ et $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{fin}} - \mathcal{U}_{\text{init}}$. Puisque notre point de départ est que l'oxygène est au repos, $\mathcal{T}_{\text{init}} = 0$, on a :

$$\Delta\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_O v_{\text{fin}}^2 \quad m_O \simeq 16m_p \simeq 16 \times 1.7 \times 10^{-27} \text{kg} \simeq 2.7 \times 10^{-26} \text{kg}$$

La vitesse finale du noyau d'Oxygène est :

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{T}_{\text{fin}}}{m_O}} = \sqrt{\frac{1.28 \times 10^{-11}}{8 \times 1.7 \times 10^{-27}}} = \sqrt{\frac{1.28 \times 10^{16}}{8 \times 1.7}} \simeq 3.1 \times 10^7 \text{m/s}$$

$$\Delta\mathcal{T} = 1.28 \times 10^{-11} \text{J}$$

$$v_{\text{fin}} \simeq 3.1 \times 10^7 \text{m/s}$$

Ici on a invoqué une unité d'énergie, «electron volt » (eV). C'est l'énergie transféré à un électron quand il descend 1 Volt de potentiel. C'est une unité très pratique quand on parle d'énergie à l'échelle atomique. Pour transformé en unités SI, on utilise $1\text{eV} = 1.609 \times 10^{-19} \text{J}$.

2. Énergie potentielle

- (a) Trois charges ponctuelles identiques avec $q = 1.2\mu\text{C}$ sont situées aux trois sommets d'un triangle équilatéral de coté 0.5m. Calculer l'énergie potentielle du système.

Solution : Par définition, l'énergie potentielle électrostatique vaut :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 3 \frac{q^2}{0.5} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 1.2 \times 10^{-6}}{0.5} = 0.0778 \text{J}$$

- (b) Quatre électrons sont situés aux sommets d'un carré de coté $2a=10\text{nm}$ et une particule α (charge $+2e$) est située au centre du carré. Calculer le travail nécessaire pour déplacer la particule α du centre du carré au milieu d'un coté.

Solution : On positionne le centre du repère sur le centre du carré. On a donc les sommets aux coordonnées $P_1 = (-a, a)$, $P_2 = (a, a)$, $P_3 = (a, -a)$, $P_4 = (-a, -a)$. Le problème demande à calculer le travail nécessaire pour faire bouger la particule du centre, $O = (0, 0)$, vers un bord $B = (a, 0)$. On peut bien entendu calculer le tel travail fait par le champ électrique lors de cette déplacement, mais comme le champ électrostatique est conservateur, c'est bien plus facile de servir directement du potentiel électrique et on calcule la différence de potentiel entre ces deux positions.

$$V(O\{0, 0\}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{r_{Oi}} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{\sqrt{2}} = -4 \times \frac{9 \times 10^9 \times 1.609 \times 10^{-19}}{\sqrt{2} \times 5 \times 10^{-9}} \simeq -0.819 \text{V}$$

$$V(B\{0, a\}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{r_{Ei}} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{a} + 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{\sqrt{5}a} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = -0.838 \text{V}$$

La différence de potentiel est :

$$U_{BO} = V(B\{0, a\}) - V(O\{0, 0\}) \simeq -0.019 \text{V}.$$

ce qui est assez faible en comparaison avec la valeur du potentiel. En effet le potentiel entre ces deux points est presque plat.

Le travail nécessaire pour déplacer une particule α entre le point O et B est

$$\Delta\mathcal{U}_p + \Delta\mathcal{T} = 0 \implies \Delta\mathcal{T} = -\Delta\mathcal{U}_p.$$

Solution :

$$\Delta\mathcal{U}_p \equiv \Delta\mathcal{E}_e(0) = qV_{OB} = 2q_p [V(B) - V(O)] = 2q_p [V(B) - V(O)] = -0.038 \text{eV} = -0.038 \times 10^{-19} \text{J}.$$

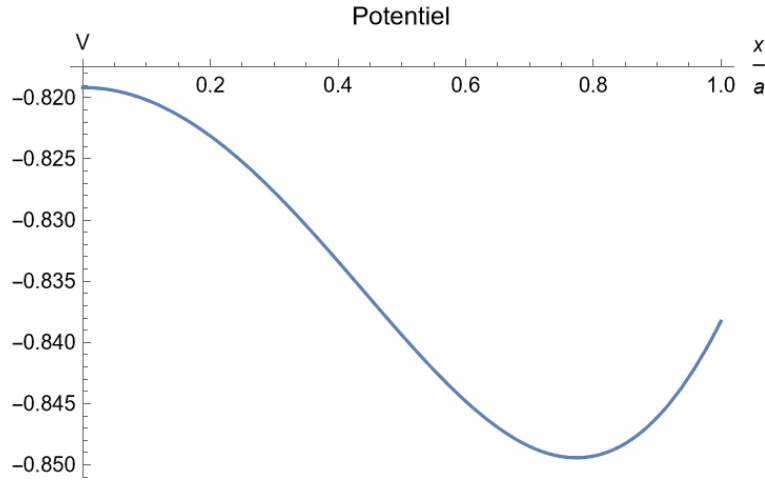


Figure 1: Potentiel d'une carré d'électrons entre le centre et un bord du carré

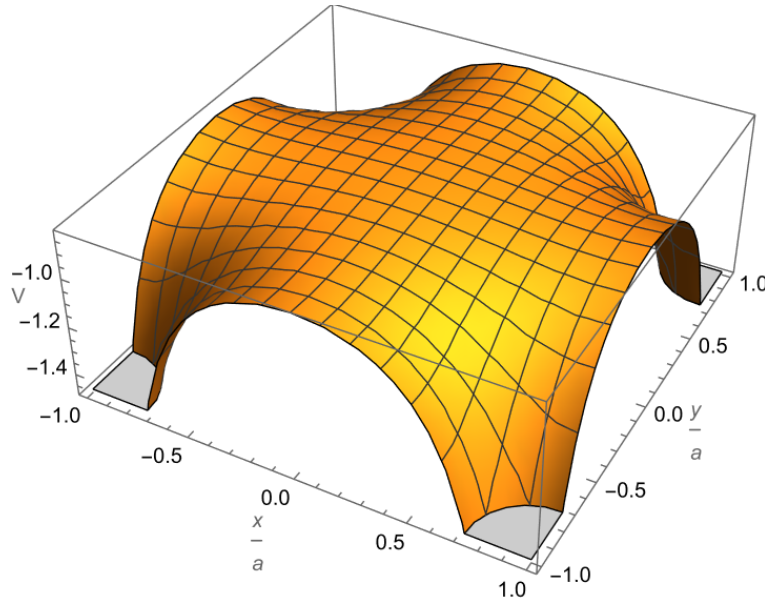


Figure 2: 2D plot du potentiel d'une carré d'électrons

3. Énergie d'un dipôle

Un dipôle peut être modélisé par deux charges ponctuelles q et $-q$ séparées d'une distance a . La quantité $\vec{p} = q\vec{a}$ est appelée moment dipolaire.

Déterminer l'énergie propre, $\mathcal{U}_0$, du dipôle en supposant que, la position de la charge $+q$ étant fixée, on approche la charge $-q$ depuis l'infini jusqu'à la distance a .

Solution : On calcul le travail fait par une force externe, $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_e$ requis pour amener la charge depuis l'infini, jusqu'à sa position finale à une distance a de la première charge :

$$\mathcal{U}_0(a) = \int_{\infty}^a \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^a \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = q \int_{\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -q\vec{E} \quad , \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} .$$

Puisque la force est radiale, il suffit de prendre un déplacement selon la direction radiale :

$$d\vec{\ell} = \hat{r} dr$$

Nous avons donc :

$$\mathcal{U}(a) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right]_a^\infty = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

Quand l'énergie de liaison, U_0 est négative (comme pour un dipôle) ceci veut dire que les charge sont liées et qu'il faut fournir une énergie de dissociation, W_d , afin de dissocier le dipôle $W_d = U(\infty) - \mathcal{U}(a) = -\mathcal{U}_0$.

$$\mathcal{W}_d = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} :$$

4. Énergie d'un cristal

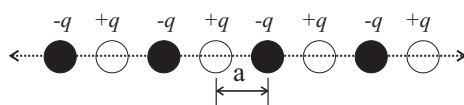


Figure 3: *Cristal linéaire.*

Considérer un «cristal» formé d'une ligne infini de charges (ions) $(+q)$ et $(-q)$ alternées, séparées par une distance a (voir figure 3).

(a) Déterminer l'énergie nécessaire afin de retirer un ion de ce « cristal » .

Solution :

L'énergie potentielle d'une particule placée dans un champ électrique correspond au travail qu'il faut fournir pour amener cette particule de l'infini à la position voulue. Il faut donc calculer cette énergie.

Supposons que l'on se concentre uniquement sur l'ion central q . L'énergie potentielle de cet ion due aux interactions avec tous les autres ions situés à sa droite est donnée par :

$$\mathcal{E}_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} - \dots \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) .$$

où nous avons fait appel à relation mathématique bien connu (et démontrée ci-dessous) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 .$$

ce qui donne finalement :

$$\mathcal{E}_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \ln 2 .$$

L'énergie potentielle due aux ions situés à gauche de l'ion central est identique à celle provenant des ions situés à droite. L'énergie potentielle totale pour cet ion s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_e = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

Le travail nécessaire pour arracher cet ion doit donc compenser cette énergie potentielle, ce qui donne : $\mathcal{W}_e = -\mathcal{E}_e$.

Démonstration de la série $\ln 2$: On commence avec la série géométrique :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

On intègre le premier membre :

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z} = \ln|1+x| - \ln|1| = \ln|1+x| \Rightarrow \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \ln 2 \quad (8)$$

et ensuite la deuxième :

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) dz &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \Rightarrow \int_0^1 (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) dz &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned} \quad (9)$$

Comparaison de l'éq.(8) et l'éq.(9) nous donne :

$$\Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Énergie emmagasinée dans un condensateur

Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge $+q$, est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse, de rayon intérieur b et rayon extérieur c . La sphère creuse a une charge $-q$. Un diélectrique de permittivité relatif, ϵ_r , remplit l'espace, $b > r > a$ entre les deux sphères. Calculer l'énergie potentielle emmagasinée dans ce condensateur :

(a) en utilisant la capacité du système.

Solution :

Nous avons vu dans le cours que l'énergie électrique, s'écrit $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$:

Avec les méthodes du cours et TD n°3, la capacité de ce condensateur s'écrit :

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{ab}{b-a}$$

Solution : L'énergie électrique s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{2} \frac{b-a}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab}$$

(b) en intégrant la densité d'énergie électrique.

Solution : On utilise le théorème de Gauss afin de déterminer que dans la région $b > r > a$.

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \hat{r}.$$

L'énergie électrique du système se trouvent en intégrant, $\frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{D} \cdot \vec{E}$ sur la région $b > r > a$ car en dehors de cette région, $\vec{D} = \vec{E} = \vec{0}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} 4\pi \int_a^b \frac{q^2}{4^2 \pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] = \frac{q^2}{2} \frac{b-a}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \end{aligned}$$

6. Dipôle dans un champ uniforme

Un dipôle est plongé dans un champ électrique $\vec{E}_{\text{ext}}$ uniforme. Son moment dipolaire $\vec{p}$ fait un angle β avec $\vec{E}_{\text{ext}}$ (voir figure 4).

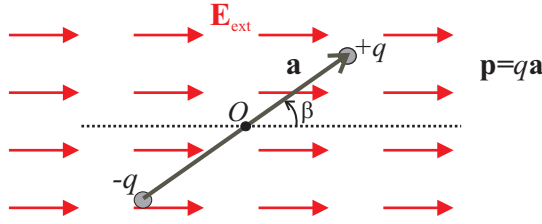


Figure 4: *Dipôle dans un champ extérieur uniforme.*

- (a) Calculer la force totale exercée sur le dipôle.

Solution : Sous l'action du champ extérieur, le dipôle est soumis à une action mécanique. Cette action est caractérisée par une force extérieure, $\vec{F}_{\text{ext}}$, donné par la somme des forces sur la charge négative, $\vec{F}_N$ et positive, $\vec{F}_P$:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_N + \vec{F}_P = -q\vec{E}_{\text{ext}} + q\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} ,$$

car les deux forces sont opposées. Le gradient est nul car le champ électrique externe est uniforme. De même, le moment dipolaire est constant.

- (b) Calculer le moment $\vec{\Gamma}$ des forces exercées sur le dipôle. Quelle est la position d'équilibre dans le champ extérieur ?

Solution : Le moment des forces n'est pas nul par contre :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_+ + \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}_- & \vec{F}_+ &= -\vec{F}_- = q\vec{E} & \overrightarrow{OP} &= \frac{\vec{d}}{2} & \overrightarrow{ON} &= -\overrightarrow{NO} = -\frac{\vec{d}}{2} = \\ \vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_+ - \overrightarrow{ON} \wedge (\vec{F}_+) = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NO}) \wedge \vec{F}_+ = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{F}_+ \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} = q\vec{d} \wedge \vec{E} \\ &= \vec{p} \wedge \vec{E} \implies |\vec{\Gamma}| = pE |\sin \beta| . \end{aligned}$$

La position d'équilibre correspond à celle où le moment est nul, donc lorsque $\beta = 2k\pi$. Dans ce cas, le dipôle et le champ électrique sont alignés. Si $\beta = 0$, l'équilibre est stable, si $\beta = \pi$, l'équilibre est instable.

- (c) En déduire le travail qu'il faut fournir au dipôle pour le faire tourner d'un angle β à partir de sa position d'équilibre. Exprimer alors l'énergie d'interaction U (énergie potentielle) avec le champ environnant.

Solution : Le travail infinitésimal qu'il faut effectuer pour faire tourner le dipôle d'un angle $d\theta$ vaut $d\mathcal{W} = -\Gamma d\theta$. Pour le faire tourner sur une plus large plage angulaire, il faut donc intégrer le travail différentielle :

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} - \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\beta} \\ d\mathcal{W} &= \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\beta} \end{aligned}$$

On remarque avec la figure que la direction de $\vec{\Gamma}$ est opposée à celle de $d\vec{\beta}$, donc :

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= pE \sin \beta d\beta \\ d\mathcal{W} &= -pE \sin \beta d\beta \\ \mathcal{W} &= \int d\mathcal{W} = -pE \int_0^\beta \sin \theta d\theta = pE \int_0^\beta d(\cos \theta) \\ &= pE [\cos \beta]_0^\beta = pE (\cos \beta - 1) \end{aligned}$$

$$\mathcal{U} = \int d\mathcal{U} = pE \int_0^\beta \sin \theta d\theta = pE (1 - \cos \beta)$$

On se rappelle que le travail et l'énergie potentiel du système sont liées par :

$$\mathcal{T} + \mathcal{U} = E_{\text{tot}} = \text{cte}$$

Finalement :

$$\mathcal{U} = -pE (\cos \beta - 1) + \text{cte}' = -\vec{p} \cdot \vec{E} + \text{cte}$$

- (d) Pour quelles valeurs de β cette énergie est-elle extrême ?

Solution :

$$\vec{\Gamma} = \vec{0} \quad \implies \quad \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \pi$$

- (e) Expliquer quelle est l'action des forces si le champ $\vec{E}_{\text{ext}}$ est central ?

Solution :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Donc, un dipôle $\vec{p}$ dans un champ $\vec{E}$, aura tendance à s'aligner (afin de minimiser) son énergie. Ceci n'est pas tout : On a vu en (6a) que la force sur un dipôle est nulle dans un champ homogène, mais un champ central n'est pas homogène. Le plus simple est d'utiliser la méthode des travaux virtuels :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla} \mathcal{U} = \vec{\nabla} (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un champ créé par une charge électrique, $E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$, la force sur le dipôle est radial,

$$F_r = p \frac{\partial}{\partial r} \left| \vec{E} \right| = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} = -\frac{pq}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

Ce phénomène est bien connu pour des charges placées dans un liquide diélectrique. Ceci s'appelle l'effet d'écrantage du champ électrique et son effet est de diminuer le champ électrique par rapport à la valeur qu'il aurait eu si la charge était placée dans le vide.

Exercices Supplémentaires

7. Deux charges ponctuelles fixes sont situées le long de l'axe Ox , une de charge $q_1 = 3\text{nC}$ située à l'origine et une de charge $q_2 = -3\text{nC}$ située au point $x = 3\text{cm}$. Une particule de masse $m = 5\mu\text{g}$ et charge $q_0 = 2\text{nC}$ se déplace le long de l'axe Ox à partir du point a ($x = 1\text{cm}$), où elle se trouve au repos, jusqu'au point b ($x = 2\text{cm}$). Quelle est la vitesse de cette particule au point b ?

Solution : Sachant la formule générale pour le potentiel produit par N charges ponctuelles :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{P_iM}|},$$

le potentiel le long de l'axe Ox (en fonction de x) est :

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|x|} + \frac{q_2}{|x-3|} \right)$$

Aux points $V(x_a = 10^{-2}\text{m})$ et $V(x_b = 2 \cdot 10^{-2}\text{m})$:

$$V(x_a = 10^{-2}) = \frac{9 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1350\text{V}$$

$$V(x_b = 2 \cdot 10^{-2}) = \frac{9 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -1350\text{V}$$

La différence d'énergie électrique potentiel en passant du point a au point b est :

$$\Delta\mathcal{U} = q_0 (V_b - V_a) = -5.4 \cdot 10^{-6}\text{J}$$

L'énergie cinétique acquise lors de ce déplacement est :

$$\Delta\mathcal{T} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -\Delta\mathcal{U} = 5.4 \cdot 10^{-6}\text{J}$$

Puisque $v_a = 0$, on a $\frac{1}{2}mv_b^2 = \Delta\mathcal{T}$, la vitesse de la particule en arrivant sur b est :

$$v_b = \sqrt{\frac{2\Delta\mathcal{T}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 5.4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}}}\text{m/s} \simeq 1.47\text{m/s}$$

8. Moment dipolaire

Soit un triangle équilatéral de côté ℓ . On place sur ses sommets une charge positive $2q$ et deux charges négatives $-q$.

- (a) Calculer son moment dipolaire électrique.

Solution :

$$\vec{p} = \sum_{i=0}^{N=3} q_i \vec{OP_i}$$

Il convient de placer le triangle dans un plan $z = 0$. On choisit l'origine au centre d'une base du triangle de manière que les deux charges positives $q_1 = q_2 = q$ se trouvent aux positions $\vec{OP_1} = \{-\ell/2, 0\}$, $\vec{OP_2} = \{\ell/2, 0\}$, et la charge, $q_3 = -2q$ au sommet à la position $\vec{OP_3} = \{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\}$.

$$\vec{p} = q\vec{OP_1} + q\vec{OP_2} - 2q\vec{OP_3} = -2q\vec{OP_3} = -2q\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\hat{z} = -q\frac{\sqrt{3}}{\ell}\hat{z}.$$

(b) Déterminer l'énergie propre, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{E}_e$, de ce dipôle.

Solution :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{q_i q_j}{|\vec{P}_i \vec{P}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i \\ &= \frac{1}{2} [2qV(2q) - qV(-q) - qV(-q)] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{[-4q^2 - q^2 - q^2]}{\ell} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q^2}{\ell},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé :

$$\begin{aligned}V(2q) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ell} \\ V(-q) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ell} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell}\end{aligned}$$

(c) Quelle est la valeur absolue maximale de la force que ce dipôle exerce sur une charge q placée à une distance de 1000ℓ du dipôle ?

Solution : On se rappelle que le potentiel d'un dipôle est:

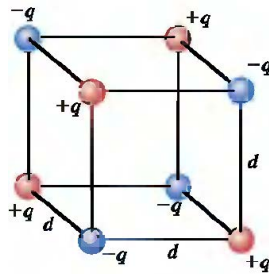
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Dans la direction de $\vec{p}$ nous avons:

$$\begin{aligned}V(r, \theta = 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\text{grad}}V = -\hat{r} \frac{\partial V(r, \theta = 0)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \hat{r} \\ |\vec{F}_q(1000\ell)| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2pq}{\ell^3 10^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{3}q^2\ell}{\ell^3 10^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{3}q^2}{\ell^2 10^3}\end{aligned}$$

enumerate

9. Une «maille» d'un cristal ionique (de type NaCl) est formée de huit charges ponctuelles situées aux sommets d'un cube de côté d . Les charges des ions sont $+q$ et $-q$. Calculer l'énergie potentielle de cette «maille». Commenter le résultat.



(a) Calculer son moment dipolaire électrique de la maille.

Solution :

$$\vec{p} = \sum_{i=0}^{N=8} q_i \vec{OP}_i = \vec{0}$$

(b) Déterminer l'énergie propre, U_0 , de cette maille.

Solution : Le plus simple est de compter le nombre de couples de même sorte. Il y a : 12 arêtes, 6 faces, 4 diagonales. On calcule l'énergie pour chaque type de couple, qui donne:

$$12 \text{ bords : } \mathcal{E}_e^{\text{bord}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{d}$$

$$12 \text{ diagonaux sur les faces : } \mathcal{E}_e^{\text{face-diag}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{d\sqrt{2}}$$

$$4 \text{ diagonaux centrales : } \mathcal{E}_e^{\text{diag-cent}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{d\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{couples}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{12}{d} + \frac{12}{d\sqrt{2}} - \frac{4}{d\sqrt{3}} \right) = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 d} \left(-3 + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$