Électricité et magnétisme - TD n°3

Champs électriques créés par des conducteurs à l'équilibre

Éléments du cours :

Différence de potentiel :

Si l'on connaît le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ dans une région de l'espace, on peut déterminer la différence de potentiel électrique entre n'importe quelle paire de points A et B en effectuant l'intégrale de circulation le long de n'importe quel chemin reliant ces points:

$$U_{AB} \equiv V_A - V_B = \int_A^B \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\boldsymbol{\ell}} \tag{1}$$

Théorème de Coulomb : le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur de densité surfacique σ vaut

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{n}}}\ , \tag{2}$$

où $\widehat{\boldsymbol{n}}$ est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur du conducteur.

Définition : La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}\quad , \tag{3}$$

où Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V. L'unité de la capacité est le Farad (symbole F) - unité fondamentale ($\mathrm{A}^2.\mathrm{s}^4.\mathrm{m}^{-2}.\mathrm{kg}^{-1}$).

Un condensateur est constitué de deux conducteurs, a et b appelés armatures, généralement en influence quasi-totale : . La capacité du condensateur est liée à la différence de potentiel entre les deux conducteurs selon :

$$\boxed{U_{ab} \equiv V_a - V_b = \frac{Q_a}{C}}\quad , \tag{4}$$

où Q_a est la charge électrique sur l'armature aa à l'équilibre. Cette capacité se mesure également en farads (symbole F). Notez que l'unité de ϵ_0 est [F.m^{-1}], ce qui est utile pour vérifier les calculs.

1. **Sphères conductrices chargées et effet de pointe**

   Une sphère S_1, parfaitement conductrice, de rayon $R_1 = 9$cm, porte une charge Q_1 ; elle est placée dans le vide.

   (a) Quelle est la distribution de charges?

   Solution : La distribution de charge est surfacique car la sphère est conductrice. En effet, comme expliqué dans le cours, si il y avait une distribution volumique ρ, on aurait d'après le théorème de Gauss :

   $$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iint \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} d\mathcal{V} = \oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0\ , \tag{5}$$

   car le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ est nul partout à l'intérieur d'un conducteur. Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges $+$ que de charges $-$). Toutes les charges non compensées se trouvent donc forcément à la surface du conducteur.

   (b) Exprimer le champ à la surface de la sphère S_1 en fonction de Q_1, R_1 et ϵ_0 puis avec σ, densité surfacique de charges, et ϵ_0.

   Solution :

   $$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\,(R_1\widehat{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^2}\widehat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{R_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

(c) Donner le champ créé dans tout l'espace par cette distribution de charges. En déduire le potentiel dans tout l'espace.

Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = \vec{0} & r < R_1 \\ \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} & r > R_1 \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r} & r > R_1 \end{cases}$$

Une deuxième sphère conductrice, S_2, de rayon $R_2 = 3$cm, initialement neutre, est maintenant reliée par un fil conducteur long et fin à la sphère S_1 précédente (figure 4). On supposera que le fil ne porte aucune charge et que les effets d'influence d'une sphère sur l'autre sont négligeables. Après connexion, les charges des deux sphères sont notées respectivement Q'_1 et Q'_2.

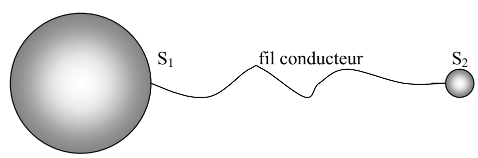

Figure 1: *Deux sphères conductrices reliées*

(d) Exprimer Q'_1 et Q'_2 en fonction de R_1, R_2 et de Q_1.

Solution : **Solution :** Par conservation de charge, on sait que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 \ ,$$

c'est-à-dire qu'une fois que les deux sphères sont reliées par un fil conducteurs les charges peuvent se redistribuer sur les deux sphères mais la somme de leurs charges est égale à la charge Q_1 d'origine.

Le fait qu'ils sont reliés par un fil conducteur impose que leurs potentiels soient égales.

$$V' = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow Q'_1 R_2 = Q'_2 R_1 \ ; ,$$

Combinant ces deux équations :

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2 = Q'_1 + Q'_1\frac{R_2}{R_1} = Q'_1\frac{R_1+R_2}{R_1} \Longrightarrow Q'_1 = Q_1\frac{R_1}{R_1+R_2} \ . \tag{6a}$$

et similairement

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2 = Q'_2\frac{R_1}{R_2} + Q'_2 = Q'_2\frac{R_1+R_2}{R_2} \Longrightarrow Q'_2 = Q_1\frac{R_2}{R_1+R_2} \ . \tag{6b}$$

(e) Calculer les champs $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2$ à la surface des deux sphères; en déduire une relation entre le rapport $|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1|/|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2|$ et le rapport R_1/R_2. Faire l'application numérique, que conclure?

Solution : Avec le théorème de Coulomb, on a

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1| = \sigma_1'$$
$$|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2| = \sigma_2'$$

ce qui nous donne :

$$\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1|} = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} \tag{7}$$

Puisque les charges sont homogènes sur les surfaces surfaciques respectives, on a

$$\sigma_1' = \frac{Q_1'}{4\pi R_1^2} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{Q_1}{4\pi}\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_1+R_2}$$
$$\sigma_2' = \frac{Q_2'}{4\pi R_2^2} = \frac{Q_1}{4\pi R_2^2}\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{Q_1}{4\pi}\frac{1}{R_2}\frac{1}{R_1+R_2}$$

où nous avons utilisé les résultats des éqs.(6).
Mettant ces résultats dans l'équation (7), on a :

$$\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_2|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1|} = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{R_1}{R_2} \overset{\text{A.N.}}{=} 3$$

2. **Sphères concentriques**

Une sphère conductrice pleine, de rayon a et charge q, (objet 1) est placée au centre d'une deuxième sphère conductrice creuse (objet 2), de rayon intérieur b et rayon extérieur c. La sphère creuse n'est pas chargée.

(a) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère creuse ? Quelle est la charge sur la surface extérieure ?
Charge sur la surface extérieure de la sphère intérieure (1) : $Q_1^{\text{ext}} = q$
Charge sur la surface intérieure de la sphère creuse : $Q_1^{\text{int}} = -q$
Charge sur la surface intérieure de la sphère creuse : $Q_1^{\text{ext}} = q$

(b) Déterminer le champ électrique dans tout l'espace.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{0}} & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} & a < r < b \\ \overrightarrow{\boldsymbol{0}} & b < r < c \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} & r > c \end{cases}$$

(c) Tracer une graphe de $|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})|$.

(d) Tracer les lignes de champ du système en considérant la charge q positive.

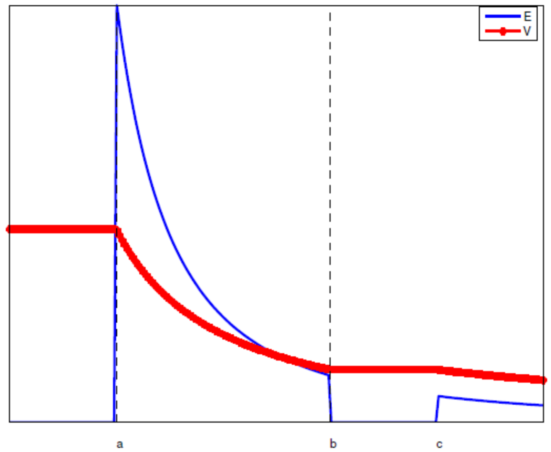

Figure 2: *Champ et potentiel avec $Q_1 = q$ et $Q_2 = 0$*

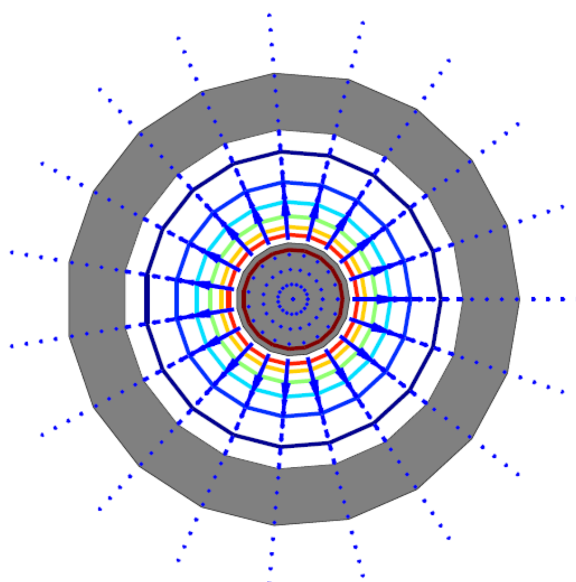

Figure 3: *Lignes de champ et potentiel avec $Q_1 = q$ et $Q_2 = 0$*

(e) Calculer le potentiel à $r = 0$, $r = a$, $r = b$, et $r = c$. On considère la référence du potentiel à l'infini.

$$V \rightarrow \begin{cases} V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ V(b) = V(c) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \\ V(c) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \end{cases} .$$

On considère maintenant que la charge de la sphère intérieure est $+q$ et la charge de la sphère conductrice creuse est $-q$.

(f) Déterminer le champ électrique entre les deux sphères et à l'extérieur de la deuxième sphère ($r > c$).

(g) Calculer le potentiel $V(r)$.

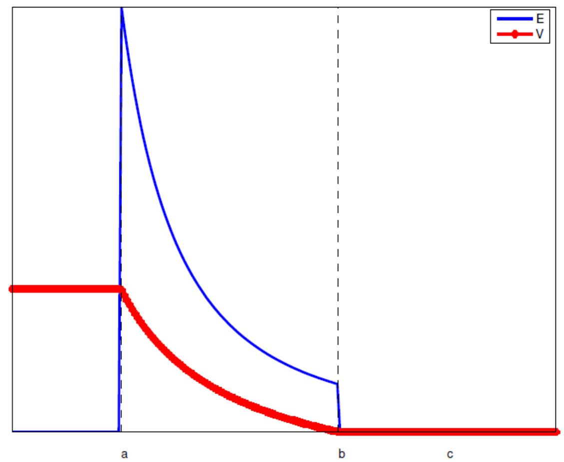

Figure 4: *Champ et potentiel avec $Q_1 = q$ et $Q_2 = -q$*

$$V(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

(h) Tracer les lignes de champ électrique et les surfaces équipotentielles entre les sphères.

(i) Calculer la capacité de ce système.

3. **Capacité d'un câble coaxial**

Un câble coaxial est formé de deux longs cylindres conducteurs concentriques, de longueur ℓ. Le cylindre extérieur, creux, de rayon intérieur b, porte une charge $-Q$. Le cylindre intérieur, plein, de rayon $a < b$, plein, porte une charge $+Q$ (on utilise l'approximation de cylindres infinis : $\ell \gg b$).

(a) Calculer le champ électrique entre les deux conducteurs.

$$E_\rho(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q_a}{\ell}\frac{\widehat{\rho}}{\rho}$$

où $\frac{Q_a}{\ell} = \frac{Q}{\ell}$ est la charge par unité de longueur sur le conducteur intérieur.

(b) Calculer le potentiel $V(r)$ dans la région, $b > r > a$ en considérant $V = 0$ à $r = b$.

$$V(r) = \frac{Q_a}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{b}{r}$$

(c) Déterminer la différence de potentiel U_{ab} entre les deux conducteurs.

Solution :

$$U_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q_a}{2\pi\epsilon_0\ell}\ln\frac{b}{a} \equiv \frac{Q_a}{C}$$
$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln\frac{b}{a}} \tag{8}$$

(d) Calculer la capacité par unité de longueur de ce système.

Solution :

$$C/\ell = \frac{4\pi\varepsilon\epsilon_0}{2\ln\frac{b}{a}} = \frac{10^7}{18\times 10^{16}\ln 3} \simeq 5\times 10^{-11}\mathrm{F.m}^{-1}$$

Ce n'est pas demandé, mais des valeurs typiques sont : $a = 1\mathrm{mm}$, $b = 3\mathrm{mm}$, $\ell = 1\mathrm{m}$ et avec : $4\pi\epsilon_0 = \frac{10^7}{c^2}\mathrm{Fm}^{-1}$ on obtient A.N..

$$C/\ell = \frac{4\pi\varepsilon\epsilon_0}{2\ln\frac{b}{a}} = \frac{10^7}{18\times 10^{16}\ln 3} \simeq 5\times 10^{-11}\mathrm{F.m}^{-1}$$

Exercices supplémentaires

4. **Sphères creuses concentriques** Une sphère conductrice creuse, de rayon intérieur a et rayon extérieur b, est située à l'intérieur d'une autre sphère conductrice creuse de rayon intérieur c et rayon extérieur d. Les deux sphères sont concentriques. La sphère intérieure a une charge totale $+2q$ et la sphère extérieure a une charge totale $+4q$.

(a) Quelle est la charge sur la surface intérieure de la sphère intérieure ? Quelle est la charge sur la surface extérieure de la sphère intérieure ? Mêmes questions pour la sphère extérieure.

Solution : Avant de calculer, on regarde ce qui se passe à l'équilibre. On sait que $Q_1^{\mathrm{tot}} = +2q = Q_1^{\mathrm{int}} + Q_1^{\mathrm{ext}}$. Si on applique le théorème de Gauss avec une surface dont le rayon est tel que $a < r < b$, on trouve un champ nul, donc une charge Q_{int} nulle donc $Q_1^{\mathrm{int}} = 0$. Par conséquence, toutes les charges sont sur la surface extérieure de la petite sphère creuse.

Pour la deuxième sphère creuse, on a comme d'habitude, $Q_2^{\mathrm{int}} = -Q_1^{\mathrm{tot}} = -2q$. Pour la charge totale, c'est toujours celle d'avant l'équilibre, donc, $Q_2^{\mathrm{tot}} = +4q = Q_2^{\mathrm{int}} + Q_2^{\mathrm{ext}}$. Donc $Q_2^{\mathrm{ext}} = Q_2^{\mathrm{tot}} - Q_2^{\mathrm{int}} = +6q$.

(b) Déterminer le champ électrique dans l'espace.

Solution : Pour calculer le champ électrique, on applique le théorème de Gauss. Par symétrie et invariance, on sait que $\vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$.

- Pour $r < a$, il n'y a pas de charges, donc $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Pour $a < r < b$, on est dans un conducteur donc $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Pour $b < r < c$, la charge $Q_{\mathrm{int}} = 2q$, donc :

$$E_r(r) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Pour $c < r < d$, on est dans un conducteur, donc $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Pour $d < r$, la charge $Q_{\text{int}} = Q_1 + Q_2 = 2q + 4q = 6q$ et donc :

$$E_r(r) = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(c) Tracer le graphe de $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

5. Une charge Q est placée à une distance, a, d'un plan conducteur infini tenu à un potentiel nul (par une mise à la terre). On peut montrer que le champ électrique entre le conducteur et la charge Q est le même que celui qu'on obtiendrait en enlevant le conducteur et en plaçant une charge opposée $-Q$ ("charge image") à une distance $2a$ de Q.

Solution : Il s'agit ici de la méthode des images: une technique très puissant et pratique quand il s'agit de charges au dessus de plans conducteurs et des sphères (et dans un moindre mesures pour des surfaces et plans diélectriques)

(a) Montrer que le potentiel électrique est bien constant ($= 0$) sur le plan où se trouvait le conducteur.

Solution : On prend la surface du conducteur pour définir le plan $z = 0$, de sorte que la direction $\widehat{\boldsymbol{z}}$ soit perpendiculaire au conducteur. Le potentiel dans le plan $z = 0$ est :

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + y^2 + (z+a)^2\right)^{1/2}} = 0$$

et on remarque immédiatement que

$$V(x, y, 0) = 0$$

En conséquence, des théorèmes mathématiques nous assurent que ceci est l'unique solution pour ce problème dans la région $z >= 0$.

(b) Montrer que le champ électrique sur le plan est perpendiculaire au plan.

Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}} V(x, y, z)$$

Avec le calcul :

$$-\overrightarrow{\mathbf{grad}} \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2\right)^{1/2}} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + (z \mp a)^2\right)^{1/2}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(x^2+y^2+(z\mp a)^2\right)^{3/2}} \\ \frac{y}{\left(x^2+y^2+(z\mp a)^2\right)^{3/2}} \\ \frac{(z\mp a)}{\left(x^2+y^2+(z\mp a)^2\right)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

on arrive à :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Qa}{2\pi\epsilon_0\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

ce qui est bien entendu perpendiculaire au plan $z = 0$.

(c) Calculer la densité de charges, $\sigma(x, y)$ sur le plan conducteur.

Solution : Sachant le champ $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, 0)$ à la surface $z = 0$ du conducteur, $\sigma(x, y)$ se déduit directement du théorème de Coulomb qui nous dit qu'à la surface d'un conducteur : $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{n}}$. La densité de charge surfacique est donc :

$$\sigma(x, y) = -\frac{2Qa}{4\pi\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{Qa}{2\pi\left(\rho^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

où dans la dernière égalité, nous avons adopté des coordonnées cylindriques. On remarque bien que ce résultat est conforme avec notre intuition.

(d) Calculer la charge totale (induite par Q) sur le plan.

Solution :

$$
\begin{aligned}
Q_{\text{ind}} &= \iint \sigma(x,y)d\mathcal{S} = -\int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Qa}{2\pi\left(\rho^2+a^2\right)^{3/2}} \\
&= -Qa\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2+a^2\right)^{3/2}} = -Qa\int_a^\infty \frac{du}{u^2} = Qa\left[\frac{1}{u}\right]_a^\infty = -Q\ ,
\end{aligned}
$$

où nous utilisé le fait que $d\mathcal{S} = \rho d\rho d\phi$ et effectue fait le changement de variable, $u^2 = \rho^2 + a^2$ et le fait que $udu = \rho d\rho$.

Le résultat trouvé est enfin logique. Une charge $+Q$ située au-dessus d'un plan conducteur relié à la terre va induire une charge $-Q$ à la surface, neutralisant ainsi le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ à l'intérieur du conducteur. On peut dire que la charge $+Q$ est en influence totale avec le plan conducteur relié à la terre.