Électromagnétisme - TD n°2
Théorème de Gauss - Champ électrique créé par des distributions de charges données

Éléments du cours :

L'équation différentielle de la loi Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) \tag{1}$$

L'autre équation de l'électrostatique est :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad \left(\boldsymbol{\nabla} \times \overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}\right) , \tag{2}$$

ce qui n'est valable quand les charges sont stationnaires. Cette équation implique que $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ est un champ conservateur, ce qui veut dire qu'on peut toujours définir un champ de potentiel électrique $V\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right)$ tel que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} V(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}) \qquad \left(\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) = -\boldsymbol{\nabla} V(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})\right) \tag{3}$$

Mettant ceci dans l'équation (1) on obtient l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{grad}} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Longrightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

où nous avons introduit le *Laplacien*, $\Delta \equiv \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{grad}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$. En coordonnées cartésiennes ceci s'écrit :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{5}$$

La solution intégrale à cette équation est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|} \rho(P)\, d\mathcal{V}_P \tag{6}$$

Prenant le gradient de cette équation on obtient une solution intégrale du champ électrique :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3} \rho(P)\, d\mathcal{V}_P \tag{7}$$

Quand on considère des densités de charge surfaciques et linéiques on récrit l'éq.(7) comme :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3} \sigma(P)\, dS_P$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3} \lambda(P)\, d\ell_P ,$$

et avec des charges ponctuelles l'éq.(7) s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_i M}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_i M}}\right|^3} ,$$

ce qui est la formule que nous avons appris à utiliser dans TD°1.

Le théorème d'Ostrogradsky (voir cours): relie le flux d'un champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{A}}$, arbitraire, à travers la surface *fermée*, S, du volume à l'intégrale de la divergence du champ $\vec{\boldsymbol{A}}$ sur le volume $\mathcal{V}$:

$$\oiint_S \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{A}}\, d\mathcal{V} \tag{8}$$

Loi de Gauss intégrale : Grâce au théorème de Green-Ostrogradsky, la version *intégrale* du théorème de Gauss est une *conséquence* de sa version différentielle :

$$\oiint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{E}}\, d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0}\, d\mathcal{V} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0}\,, \tag{9}$$

où dans la deuxième égalité, on a fait appel à la version *différentielle* de la loi de Gauss :

$$\mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,. \tag{10}$$

Ceci complimente la dérivation inverse de la version différentiel de la loi de Gauss à partir de sa version intégrale comme démontré dans le cours (voir aussi 2.III du Perez).

Différence de potentiel :

Si l'on connaît le champ $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ dans une région de l'espace, on peut déterminer la différence de potentiel électrique entre n'importe quelle paire de points A et B en effectuant l'intégrale de circulation le long de n'importe quel chemin reliant ces points:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} \tag{11}$$

1. **Loi de Gauss**

   (a) Dans une région de l'espace, le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ est uniforme. Utiliser la loi de Gauss pour prouver que cette région doit être électriquement neutre. Est-ce que le réciproque est valide, c'est-à-dire dans une région de l'espace où il n'y a pas de charge le champ électrique doit-t-il être uniforme ?

   Solution : La nature différentielle de la divergence implique que la divergence d'un champ uniforme est nulle, ce qui conduit à l'absence de charge dans le volume associé, car :

   $$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{E}} \tag{12}$$

   donc $\rho = 0$. En revanche, l'inverse n'est pas vrai : l'absence de charge à l'intérieur d'une surface fermée n'implique en rien que le champ électrique y soit homogène. Prenons, par exemple, le champ électrique inhomogène créé par une charge isolée. Le champ à l'intérieur de toute surface fermée ne contenant pas de charge n'est manifestement pas homogène, même si la charge à l'intérieur de cette surface de Gauss soit nulle.

   (b) On considère une densité volumique de charge ρ constant, implique-t-elle que $\vec{\boldsymbol{E}}$ soit uniforme ?

   Solution : Non, une densité de charge uniforme ρ n'implique pas que le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ soit uniforme dans cette région. Il est facile de fournir un contre-exemple :

   $$\mathrm{div}\, \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial x} = C \tag{13}$$

est satisfait par le champ :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{C}{3}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{C}{3}\left(x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} + z\widehat{\boldsymbol{z}}\right) \tag{14}$$

puisque

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{C}{3}(1+1+1) = C\,. \tag{15}$$

En revanche, si $C = 0$, (divergence nulle), ceci est compatible avec un champ uniforme ($\vec{\boldsymbol{E}}$= Cte $\widehat{\boldsymbol{u}}$ partout)comme nous l'avons vu dans la question (a).

2. **Charge linéique**

On considère un long fil rectiligne portant une densité de charge uniforme λ_0 (approximation du fil infini).

(a) Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances? Que pouvez vous en conclure pour le champ électrique ?

Le champ électrique sera de la forme :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\rho,\phi,z) = E_\rho(\rho)\widehat{\boldsymbol{\rho}} \tag{16}$$

(b) Déterminer le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ créé en un point M situé à une distance ρ de la ligne.

- A partir de l'expression intégrale du champ électrostatique de Coulomb.

Solution : Bien que cette méthode fonctionne, elle est nettement plus lourde que la méthode de Gauss. Vous n'avez probablement pas le temps de faire ça en séance TD, donc voici les détails :

Selon la loi de Coulomb, le champ électrique en un point M situé à une distance ρ de la ligne s'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{E}}\left(M(\rho,\phi,z)\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3}\lambda\left(P\right)d\ell_P$$

$$\lambda\left(P\right) = \lambda\left(z\right) = \lambda_0 \quad \forall z$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\left(M\right) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{|\mathbf{PM}|^3}dz_P$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PM}} = \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}} - z_P\widehat{\boldsymbol{z}}$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right| = \left(\rho^2 + z_P^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\left(M\right) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}}{|\mathbf{PM}|^3}dz_P = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\widehat{\rho} - z_P\widehat{\boldsymbol{z}}}{\left(\rho^2+z_P^2\right)^{3/2}}dz_P$$

On sait par symétrie que le composant E_z du champ est nul. If suffit donc de calculer l'intégrale pour le composant, $E_\rho = \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\widehat{\rho}$ on peut évaluer l'intégral en introduisant un variable angulaire $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\tan\alpha = \frac{z_P}{\rho} \rightarrow z_P = \rho\tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\rho}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|} \rightarrow \left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right| = \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

$$dz_P = \rho d\left(\tan\alpha\right) = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Comme dans le cours, on calcul $E_\rho(\rho)$ en évaluant l'intégrale:

$$
\begin{aligned}
E_\rho(\rho) = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M)\cdot\widehat{\rho} &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\cdot\widehat{\rho}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3}dz_P = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho}{\frac{\rho^3}{\cos^3\alpha}}\frac{\rho}{\cos^2\alpha}d\alpha \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3\alpha}{\rho}\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho}\left[\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho}\left[\frac{z_1}{\left(\rho^2+z_1^2\right)^{1/2}} - \frac{z_2}{\left(\rho^2+z_2^2\right)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0\rho}\left[\frac{z_1/\rho}{\left(1+(z_1/\rho)^2\right)^{1/2}} - \frac{z_2/\rho}{\left(1+(z_2/\rho)^2\right)^{1/2}}\right]
\end{aligned}
$$

Dans le cas d'une tige finie le champ possédait également un composant selon la direction $\widehat{\boldsymbol{z}}$. On sait par symétrie que cette composante est nul pour le fil infini, mais on peut vérifier ceci par un calcul direct si l'on veut :

$$
\begin{aligned}
E_z = \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M)\cdot\widehat{\boldsymbol{z}} &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-z_P}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|^3}dz_P = -\frac{\lambda_0}{4\pi\rho\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tan\alpha\cos\alpha d\alpha \\
&= -\frac{\lambda_0}{4\pi\rho\epsilon_0}\int_{\alpha_2\to-\pi/2}^{\alpha_1\to\pi/2}\sin\alpha d\alpha \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\rho\epsilon_0}\left[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right] = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\left(\rho^2+z_1^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\rho^2+z_2^2\right)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{\lambda_0}{4\pi\rho\epsilon_0}\left[\frac{1}{\left(1+(z_1/\rho)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1+(z_2/\rho)^2\right)^{1/2}}\right] \to 0
\end{aligned}
$$

dans les limites $\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 \to \frac{-\pi}{2}$ ($z_1 \to \infty$ et $z_2 \to -\infty$).
Notre résultat final est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,\phi,z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\rho} \tag{17}$$

- En utilisant la loi de Gauss.
  Le champ électrique déduit à partir de la loi de Gauss s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\rho,\phi,z) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\widehat{\rho} \tag{18}$$

  On remarque que c'était nettement plus facile d'obtenir $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ par la loi de Gauss, qu'avec la loi de Coulomb.

(c) En déduire le potentiel, $V(\rho)$ au point M.
Solution :

$$V(\rho) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho + cte \tag{19}$$

3. **Sphère chargée**

Soit une sphère de rayon R portant une densité volumique de charge uniforme ρ_0.

(a) Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances? Que pouvez-vous en conclure pour le champ électrique ?

Solution : La symétrie sphérique du problème se caractérise par le fait que tout plan contenant l'origine est un plan de symétrie, ce qui implique que l'orientation du champ est nécessairement selon $\widehat{\boldsymbol{r}}$. L'invariance par translation (c'est-à-dire par rotation) des coordonnées θ et ϕ indique que E_r ne peut pas dépendre de ces coordonnées. On en déduit que le champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\boldsymbol{r}\right) = E_r\left(r\right)\widehat{\boldsymbol{r}} \tag{20}$$

(b) En utilisant la loi de Gauss, calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r)$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon R. En déduire le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace.

Solution : La surface de Gauss appropriée est une sphère de rayon r, et on trouve :

$$\oiint_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}\,dS = 4\pi r^2 E_r\left(r\right) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{21}$$

A l'extérieur de la sphère : la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est simplement la charge totale de la sphère, $Q_{\text{sphère}}$, et l'éq.(21) nous donne la dépendance su champ électrique sur r :

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E_{\text{ext},r}\left(r\right) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{\epsilon_0} \\ E_{\text{ext},r}\left(r\right) &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi r^2\epsilon_0}\ , \end{aligned} \tag{22}$$

où $Q_{\text{sphère}}$ est la charge de la sphère.

En se rappelant que charge total pour la sphère pleine s'écrit :

$$Q_{\text{sphère}} = \iiint_{\mathcal{V}_{\text{sph}}} \rho d\mathcal{V} = \rho_0 \iiint_{\mathcal{V}_{\text{sph}}} d\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\ , \tag{23}$$

nous pouvons écrire le résultat de l'éq.(22) en fonction de la densité volumique de la sphère, ρ_0:

$$\begin{aligned} E_{\text{ext},r}\left(r\right) &= \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{ext},r}\left(\boldsymbol{r}\right) &= \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} \qquad\qquad r > R \end{aligned} \tag{24}$$

A l'intérieur de la sphère : une surface sphérique est toujours la surface de Gauss adaptée, mais la charge à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique de rayon r s'écrit :

$$Q_{\text{int}}\left(r\right) = \iiint_{r'<r} \rho d\mathcal{V} = \rho_0 \iiint_{r'<r} d\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\ , \tag{25}$$

où r est la distance radiale à laquelle on souhaite mesurer le champ (à ne pas confondre avec le rayon de la sphère) :

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{int}}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}\,ds = 4\pi r^2 E_{\text{int},r}\left(r\right) &= \frac{Q_{\text{int}}\left(r\right)}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3\rho_0}{\epsilon_0} \\ E_{\text{int},r}\left(r\right) &= \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{int}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r\widehat{\boldsymbol{r}} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} \qquad r < R \tag{27}$$

On remarque qu'à la surface de la sphère, on a $E(R^-) = \frac{R\rho_0}{3\epsilon_0}$ évalué juste à l'intérieur de la surface et $E(R^+) = \frac{Q_t}{4\pi R^2\epsilon_0} = \frac{1}{3}\frac{R\rho_0}{\epsilon_0}$. Donc le champ électrique est continu à la surface. Ceci est un exemple du règle générale *qu'en absence charge surfacique*, la composante normale du champ électrique est continue.
Le champ électrique déduit avec la loi de Gauss est :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} & r < R \\ \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\widehat{\boldsymbol{r}} & r > R \end{cases} \tag{28}$$

Le potentiel à l'extérieur de la sphère est :

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}}(r) &= -\int_\infty^r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{ext}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}} \qquad d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}} = dr'\widehat{\boldsymbol{r}}' + \frac{1}{r'}d\theta\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r'\sin\theta}d\phi\widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= -\int_\infty^r \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r'^2}\widehat{\boldsymbol{r}}'\cdot\widehat{\boldsymbol{r}}' dr' \\ &= -\frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \end{aligned} \tag{29}$$

Le potentiel à la surface de la sphère est :

$$V_{\text{ext}}(R) = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}. \tag{30}$$

Le potentiel à l'intérieur de la sphère est :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}}(r) - V(R) &= -\int_R^r \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{int}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}} \qquad d\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}} = dr'\widehat{\boldsymbol{r}}' + \frac{1}{r'}d\theta\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r'\sin\theta}d\phi\widehat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= -\int_R^r \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r'\widehat{\boldsymbol{r}}'\cdot\widehat{\boldsymbol{r}}' dr' \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\int_R^r r' dr' = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r'^2\Big|_R^r \\ &= -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(r^2 - R^2\right) \qquad r < R \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{int}}(r) &= -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}R^2 + V(R) \\ &= -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}R^2 + \frac{2\rho_0}{6\epsilon_0}R^2 \\ &= \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \qquad r < R \end{aligned} \tag{32}$$

(c) Tracer les graphes $|\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r)|$ et $V(r)$.

(d) Reprendre les questions dans le cas d'une sphère chargée avec une densité surfacique σ_0 uniforme.

Solution :

$$\begin{aligned} E_{\text{ext},r}(r) &= \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi r^2\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{4\pi r^2\epsilon_0} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{ext}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) &= \frac{R^2}{r^2}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{r}} \qquad r > R \end{aligned} \tag{33}$$

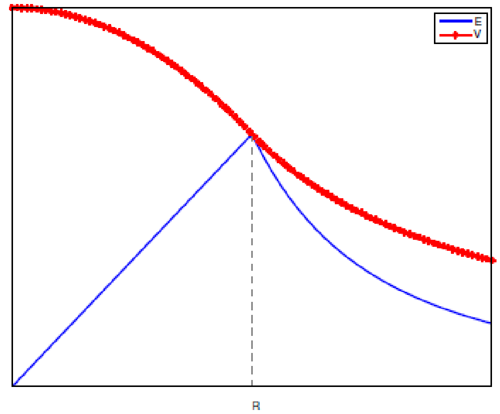

Figure 1: $E_r(r)$ *et* $V(r)$ *d'une sphère de rayon* R *replie d'une charge volumique homogène,* ρ_0.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_{\text{int}}\left(\mathbf{r}\right) = \widehat{\mathbf{0}} \qquad\qquad r < R$$

$$V_{\text{ext}}\left(r\right) = \frac{Q_{\text{sphère}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{4\pi R^2\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{r} \qquad\qquad r > R$$

$$V_{\text{ext}}\left(r\right) = V_{\text{ext}}\left(R\right) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{R^2}{R} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}R \qquad\qquad r < R$$

On remarque que le potentielle à l'intérieur de la surface sphérique de charge est constant.

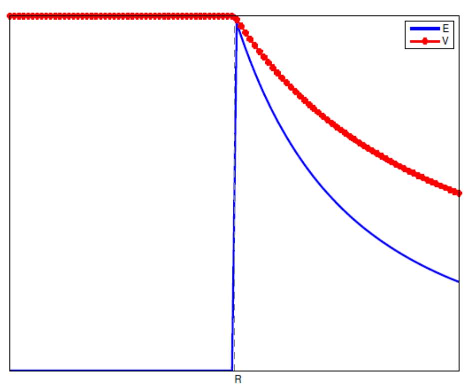

Figure 2: $E_r(r)$ *et* $V(r)$ *d'une surface sphérique rayon* R *possédant une densité surfacique* σ_0 *homogène.*

4. **Charge surfacique portée par un plan**

On considère un plan (P) infini portant une densité surfacique de charges uniforme σ_0, (figure 3a).

(a) Quelle est la symétrie du problème? Quelles sont les invariances?

Solution : Ce problème est détaillé dans le cours dans section -3.1.5) . Il y a une symétrie par rapport au plan $z = 0$ ainsi qu'une symétrie par rapport à n'importe quel plan $x =$ cst ou $y =$ cst. On a donc forcément $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E_z(x, y, z)\widehat{\boldsymbol{z}}$. Il y a de plus invariance selon x et y. On a donc $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = E_z(z)\widehat{\boldsymbol{z}}$.

Donc:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) = E_z\left(z\right)\widehat{\boldsymbol{z}}$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right) = E_z\left(z\right)\frac{z}{|z|}\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{34}$$

(b) En utilisant la loi de Gauss, exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ à une distance h de part et d'autre du plan (P).

Solution :

$$2AE_z\left(z\right) = Q_{\text{int}} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{35}$$

$$E_z\left(z\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{36}$$

(c) Exprimer la discontinuité du champ à la traversée du plan en fonction de σ_0 et ϵ_0.

(d) Tracer le graphe $E_z(z)$.

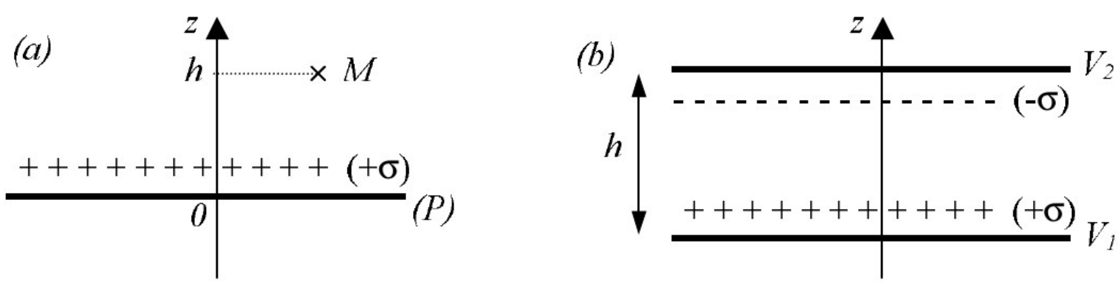

Figure 3: *a)1 plan chargé. b) Deux plans chargés*

5. **Deux plans chargés**

Soient deux plans parallèles, situés à une distance h l'un de l'autre. Ils sont chargés avec des densités surfaciques de charge σ_0 pour l'un et $-\sigma_0$ pour l'autre (figure 3 b).

(a) En exploitant la symétrie du problème et en utilisant l'équation de Laplace, calculer le potentiel V, en tout point situé entre les deux plans, en fonction de h et de leurs potentiels V_1 et V_2.

La solution de l'équation de Laplace entre les armatures s'écrit :

$$V\left(z\right) = z\frac{V_2 - V_1}{h} + V_1\ .$$

(b) Donner l'expression vectorielle du champ électrostatique, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$, en utilisant $\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V$.

Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V = -\widehat{\boldsymbol{z}}\frac{d}{dz}V\left(z\right) = \widehat{\boldsymbol{z}}\frac{V_1 - V_2}{h}$$

(c) Trouver une autre expression du champ électrostatique $\vec{E}$ entre les 2 plans en utilisant le théorème de superposition et les résultats de l'exercice 4.

Solution :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z} \tag{37}$$

Ces différentes méthodes sont consistantes puisque :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_0^h \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{z}\cdot\hat{z}dz = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}h$$

(d) En déduire l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux plans chargés.

Solution :

$$C = \frac{S\epsilon_0}{h} \tag{38}$$

La capacité du condensateur dépend donc de sa taille et de l'espacement entre les deux plaques, mais pas de la densité surfacique.

6. Une différence de potentiel de 480V est établie entre deux plaques métalliques parallèles. On considère que le potentiel d'une plaque est 480V et le potentiel de l'autre est 0V. La distance entre les deux plaques est de 1.70cm.

(a) Tracer les surfaces équipotentielles qui correspondent à 0V, 120V, 240V, 360V et 480V.

Solution : Les équipotentielles sont forcément des plans z = cst, de part la configuration. D'après l'exercice précédent, on a :

$$V(z) = -\frac{\Delta V}{h} + V_1 \Rightarrow z = h\frac{V_1 - V(z)}{\Delta V} \tag{39}$$

Donc

$$\begin{aligned} z_0 &= h = 1.7\text{cm} \\ z_{120} &= h = 1.7\frac{480-120}{480} = 1.28\text{cm} \\ z_{240} &= h = 1.7\frac{480-240}{480} = 0.85\text{cm} \\ z_{360} &= h = 1.7\frac{480-360}{480} = 0.43\text{cm} \\ z_{480} &= 0\text{cm} \end{aligned} \tag{40}$$

(b) Tracer les lignes de champ électrique. Commenter.

Solution : Les lignes de champs électriques sont elles orientées selon l'axe $\hat{z}$, elles sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Elles vont forcément dans le sens des potentiels décroissants.

<u>Exercices Supplémentaires</u>

7. Une sphère de masse $m = 1.5$g et charge $q = 8.9 \times \mu$C pend d'un plafond par un fil entre deux plaques parallèles verticales. Les deux plaques ont une densité de charge uniforme sur leur surface de $+\sigma$ et $-\sigma$ et sont espacées de $d = 5$cm. Quelle doit être la différence de potentiel entre les plaques pour que le fil soit incliné d'un angle $\theta = 30°$ par rapport à la verticale ?

Solution : On met une sphère entre deux plaques parallèles verticales, attachée à mi-distance entre les deux armature. On a donc un champ électrique qui est porté par l'axe $\widehat{\boldsymbol{x}}$, si on suppose que cet axe correspond à la normale aux deux plaques. L'axe $\widehat{\boldsymbol{y}}$ est le long des deux armatures. On fait un bilan des forces en présence : force d'attraction gravitationnelle, force électrostatique et force de tension du fil. Quand la sphère est au repos, on a donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_g + \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_e + \overrightarrow{\boldsymbol{T}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$$

ce qui en projetant sur les axes nous donne deux équations :

$$\begin{aligned} q\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - T\sin\theta = 0 \qquad & \text{en projetant sur } \widehat{\boldsymbol{x}} \\ -mg + T\cos\theta = 0 \qquad & \text{en projetant sur } \widehat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

donc, si on se rappelle que $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \Delta V/d$,

$$\begin{aligned} \frac{q\sigma_0}{\epsilon_0 mg} &= \tan\theta \\ \frac{q\Delta V}{mgd} &= \tan\theta \\ \Delta V &= \frac{mgd\tan\theta}{q} \\ &= \frac{1.5\,10^{-3} \times 9.81 \times 0.05 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{8.9\,10^{-6}} = 47.7\text{V} \end{aligned}$$

8. Deux charges positives identiques sont fixées sur l'axe z en $z = a$ et $z = -a$. Calculer leur potentiel sur un point M dans le plan $x0y$ à une distance ρ de l'axe Oz, en déduire le champ électrique sur l'axe dans ce plan.

Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\rho, \phi, 0) = \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\begin{aligned} V(\rho,\phi,0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}|} + \frac{q}{|-a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})\cdot(a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})}} + \frac{q}{\sqrt{(-a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})\cdot(-a\widehat{\boldsymbol{z}} + \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+\rho^2}} + \frac{q}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{a^2+\rho^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} &= -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}V(\rho) = -\widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho) \\ &= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a^2+\rho^2\right)^{-1/2} = \frac{2q\rho}{4\pi\epsilon_0\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned}$$

Par symétrie, $E_z = E_\phi = 0$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}V = \widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}V + \widehat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}V + \widehat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}V$$

9. **Disque chargé**

On considère un disque de rayon R_0, d'axe (Ox), chargé avec une densité de charge uniforme σ_0.

(a) Calculez le potentiel $V(M)$ en tout point M de l'axe du disque. En déduire le champ électrostatique $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(z)$.

Solution : La solution pour le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma\left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}}\right)}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|}dS_P \tag{41}$$

Il faut utiliser les coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma_P(\rho,\phi)}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|}dS_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty d\rho\int_0^{2\pi}\rho d\phi\frac{\sigma_P(\rho,\phi)}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}}\right|} \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{R_0} d\rho\int_0^{2\pi}\rho d\phi\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

où

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = (\rho,\phi,0) \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = (0,0,z)$$

(Considérons un anneau de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$ centré sur le trou. La charge dq contenu dans cet anneau est $dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 2\pi\rho d\rho$)

Le potentiel sur l'axe z est donc :

$$\begin{aligned} V(0,0,z) &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{R_0} d\rho\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{42}$$

Changement de variables

$$\begin{aligned} u^2 &= \rho^2+z^2 \\ udu &= \rho d\rho \end{aligned} \tag{43}$$

Donc,

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R\frac{udu}{u} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R du \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}u\Big|_{(z^2)^{1/2}}^{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}-\left(z^2\right)^{1/2}\right] \\ V(z) &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\left(R^2+z^2\right)^{1/2}-\left(z^2\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{44}$$

On peut connaître E_z sur l'axe z seulement :

$$\begin{aligned} E_z(z) &= -\mathbf{grad}V = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{d}{dz}\left[\left(z^2\right)^{1/2}+\left(R^2+z^2\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right) \end{aligned} \tag{45}$$

On aurait pu calculer E_z de façon direct.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty\frac{dq\cos\theta}{\rho^2+z^2} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_R^\infty\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{46}$$

S'il n'y avait pas de trou, on obtient avec le théorème de Gauss :

$$\boldsymbol{E}(z) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{47}$$

Considérons un anneau de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$ centré sur le trou. La charge dq contenu dans cet anneau est

$$dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 2\pi\rho d\rho \tag{48}$$

Le composant $\widehat{\boldsymbol{z}}$ du champ dû à un anneau de charge $d\rho$ de rayon ρ centré sur la charge est :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq\cos\theta}{(\rho^2+z^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\sigma_0 2\pi\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{49}$$

où :

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \tag{50}$$

Le champ E_z est donc :

$$E_z = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{51}$$

On obtient avec et le changement de variables :

$$u^2 = \rho^2 + z^2 \qquad\qquad udu = \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{udu}{u^3} \\ &= \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{du}{u^2} = -\frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\left.\frac{1}{u}\right|_0^{\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

Une autre façon de faire ceci est en dérivant

$$d(\cos\theta) = d\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) = -\frac{z}{2}2\rho d\rho\left(\rho^2+z^2\right)^{-3/2} = -\frac{z\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{53}$$

Le champ total est :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{dq\cos\theta}{\rho^2+z^2} = \frac{z\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_{z/\sqrt{z^2}}^{z/\sqrt{R^2+z^2}} d(\cos\theta) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\cos\theta\Big|_{z/\sqrt{z^2}}^{z/\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{54}$$

où nous avons effectué un changement de variable vers $\cos\theta$.

(b) On suppose que R_0 devient grand devant x. Que devient alors $\vec{\boldsymbol{E}}(x)$? Pouvait-on prédire ce résultat d'une autre façon?

Solution : On remarque que si $R_0 \to \infty$, on récupère le résultat d'un plan de charge infini.

$$E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \tag{55}$$

(c) On considère maintenant un plan percé d'un disque de rayon R_0 et uniformément chargé avec une densité de charge σ_0. Calculez le champ électrostatique créé sur l'axe du disque.

Solution : Par superposition :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{56}$$

On remarque que E_z est maintenant continu puisque il ne transverse une charge surfacique.