Électricité et magnétisme - TD n° 1
Loi de Coulomb

Éléments du cours :

La densité volumique de charge est dénoté par $\rho\left(\vec{r}\right)$. La charge totale Q_{t} contenue dans une volume V est donné par l'intégrale :

$$Q_{\mathrm{t}} = \iiint_V \rho\left(\vec{r}\right)\, d\mathcal{V} \tag{1}$$

La force d'une charge q_A à position A sur une charge q_2 à position B est :

$$\text{Loi de Coulomb} \quad : \quad \vec{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\widehat{\boldsymbol{r}}_{AB} \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} r_{AB} &\equiv \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right| \\ \widehat{\boldsymbol{r}}_{AB} &\equiv \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \end{aligned} \tag{3}$$

La force électrique, $\vec{F}_e$, sur une charge q à une position $\vec{r}$ dans un champ électrique $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ est

$$\text{Force électrostatique} \quad : \quad \vec{F}_e = q\vec{E}\left(\vec{r}\right) \tag{4}$$

Le champ électrique produit par N charges ponctuelles se calcul suivant la loi de superposition :

$$\vec{E}\left(M\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\left(P_i M\right)^3}\ , \tag{5}$$

Quand les charges sont décrites par une densité volumique de charge, $\rho \equiv \frac{dq}{d\mathcal{V}}$, on détermine $\vec{E}$ grâce à une intégration 3D :

$$\vec{E}\left(M\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho\left(P\right)\overrightarrow{PM}}{\left(PM\right)^3}\, d\mathcal{V}\ . \tag{6}$$

On doit savoir comment exprimer connaître comment exprimer $d\mathcal{V}$ dans chacun des 3 systèmes de coordonnées considéré en cours :

$$d\mathcal{V} = \begin{cases} dxdydz & \text{Cartésienne} \\ \rho d\rho d\phi dz & \text{cylindriques} \\ r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi & \text{sphériques} \end{cases} \tag{7}$$

1. **Force électrique**

   Calculer le rapport entre force gravitationnelle et électrique entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. On considère que la distance entre le proton et l'électron est a_0. *A.N.* : $a_0 \simeq 0,53\times 10^{-10} m)$, $G \simeq 6.67\times 10^{-11}$SI, [$\mathrm{Nkg^{-2}m^2}$], $m_p \simeq 1,672\times 10^{-27}$kg, $m_e \simeq 0,91\times 10^{-30}$kg, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9\times 10^9$SI, $q_e = 1,6\times 10^{-19}$C.

   Solution :

   $$\frac{F_G}{F_e} \simeq 4,4\times 10^{-40}$$

2. Deux charges ponctuelles q_A et q_B sont alignées le long de l'axe Oy du repère $R(Oxy)$. La charge q_A est située au point $A(x = 0, y = 0.30)$m et la charge q_B est située au point $B(x = 0, y = -0.30)$m. Une troisième charge Q est située au point $M(x = 0.40, y = 0)$m.
   (a) Déterminer le vecteur force exercée par q_1 et q_2 sur la charge Q. Pour cela, vous ferez un dessin et vous calculerez les composantes de la force dans le repère $R(Oxy)$.
   Solution : La force électrostatique exercée au point M vaut :
$$\vec{F}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(0.5)^3}\begin{bmatrix} (q_A + q_B)\,0.4 \\ -(q_A + q_B)\,0.3 \end{bmatrix}$$
   (b) Calculer l'angle θ que fait la force avec l'axe Ox.
   Solution :
$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{(-q_A + q_B)\,0.3}{(q_A + q_B)\,0.4}$$
   (c) Calculer le module de la force.
   Solution :
$$\left|\vec{F}(M)\right| = \sqrt{\vec{F}(M)\cdot\vec{F}(M)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(0.5)^3}\sqrt{[(q_A + q_B)\,0.4]^2 + [(-q_A + q_B)\,0.3]^2}$$

   A.N. : $q_A = q_B = 2\mu$C ; $Q = 4\mu$C.
   Solution :
$$\left|\vec{F}(M)\right| = \frac{4\,10^{-6} \times 9\,10^9}{(0.5)^3} 4\,10^{-6} \times 0.4 = 0.46\text{N}$$

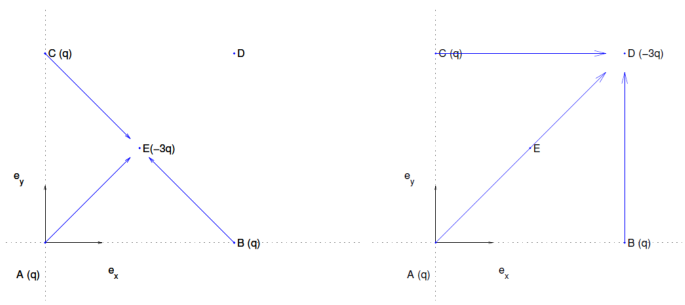

FIGURE 1 – *Position des charges dans le carré*

3. Trois charges ponctuelles identiques q sont situées aux trois sommets d'un carré de coté L. Trouver la direction et le module de la force exercée sur une charge ponctuelle $-3q$ située :
   Solution : On appelle $A = (0, 0)$, $B = (L, 0)$, $C = (0, L)$ et $D = (L, L)$ les 4 sommets du carré, de côté L. On suppose que les trois charges se trouvent sur A, B et C.
   (a) au centre du carré, $M = (L/2, L/2)$.
   Solution :
$$\vec{F}_{\to -3q}(M) = -3q\vec{E}(M) = \frac{-3q^2\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 L^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Cette force est orientée dans la direction de $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$. En effet, il est évident que $\overrightarrow{\boldsymbol{BM}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{BM}}$ sont de directions opposées et de même amplitude, ce qui signifie qu'elles se compensent. De plus, étant donné que l'axe $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$ est un axe de symétrie, il est normal que la force soit alignée avec cet axe pour tout point situé le long de celui-ci.

(b) au sommet vacant du carré.

Solution :

$$\vec{E}(D) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\end{pmatrix}.$$

$$\vec{F}_{\to -3q}(D) = -3q\vec{E}(D) = -\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\end{pmatrix}.$$

Il s'agit de nouveau d'une force orientée à 45° de l'axe des x, donc dans la direction de $\vec{AD}$. ela est tout à fait normal en raison de la symétrie existant le long de l'axe $\vec{AD}$. Dans ce cas, il est donc logique que la force soit alignée avec l'axe de symétrie lorsqu'on l'évalue pour un point situé sur cet axe.

4. Deux boules de liège identiques de masse $m = 30$g et charge q pendent d'un plafond par des fils de longueur identique $\ell = 15$cm. Les deux fils sont attachés au même point O du plafond. Soit θ=30° l'angle entre les fils et la verticale à l'équilibre. Trouver la charge de chaque sphère. Qu'arrive-t-il si les charges ne sont pas égales ?

Solution : A.N. Prenant $q_A = q_B = q$:

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{0.3 \times 9.81}{9\,10^8}\left(2 \times 0.15 \times \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 4.25\,10^{-12} \\ q &\simeq 2.06\,10^{-6}\text{C} \end{aligned}$$

Champ électrique

La différence de potentiel entre deux plaques parallèles est $\Delta V = 100$V, leur séparation $d = 1$cm, leur longueur $L = 2$cm. Un électron est projeté avec une vitesse $v_0 = 10^7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ entre les plaques, avec une vitesse initiale parallèle aux deux plaques. On suppose que le champ électrique entre les plaques est uniforme et dirigé vers le haut, et le champ à l'extérieur des plaques est nul.

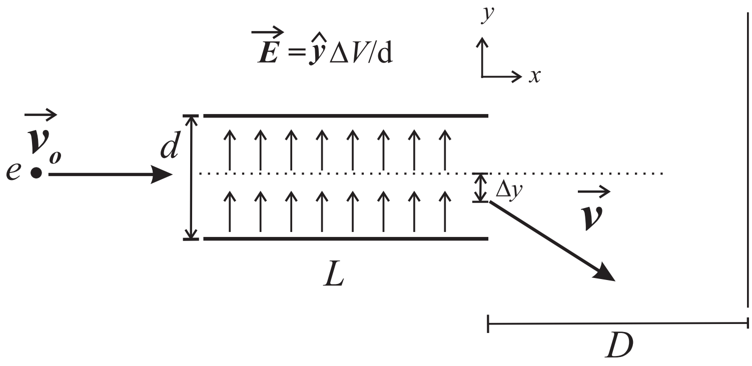

FIGURE 2 – *Déviation d'un électron par un champ électrostatique*

(a) Trouver sa déviation transverse, Δy, et sa vitesse transverse, v_y, quand il émerge des plaques.

Solution : Tout d'abord, nous déterminons le temps Δt que l'électron passe entre les armatures :

$$t_{\text{vol}} = \Delta t \qquad v_x = v_0 \qquad v_x\Delta t = L$$

$$t_{\text{vol}} = \Delta t = \frac{2 \times 10^{-2}}{10^7} = 2 \times 10^{-9}\text{s} \tag{8}$$

On utilise ensuite la deuxième loi de Newton, qui spécifie que pour un objet en mouvement, la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui est colinéaire à l'accélération $\vec{a}$.

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{d\,(mv_y)}{dt} = \frac{m_e \Delta v_y}{\Delta t} = q_e E = 1.6 \times 10^{-19} \frac{100}{10^{-2}} \\ \Longrightarrow \Delta v_y &= \frac{1.6 \times 10^{-15}}{0.91 \times 10^{-30}} 2 \times 10^{-9} \simeq 3.6 \times 10^{6} \mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_y &= 3.6 \times 10^{6} \mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{3.6 \times 10^{6}}{2 \times 10^{-9}} \simeq 1.8 \times 10^{15} \mathrm{m\,s^{-2}} \\ \Delta y &= \frac{1}{2} a_y \Delta t^2 = \frac{1}{2} 1.8 \times 10^{15} (2 \times 10^{-9})^2 \\ &= 2 \times 1.8 \times 10^{15} \times 10^{-18} = 3.6 \times 10^{-3} = 3.6 \mathrm{mm} \end{aligned}$$

(b) Un écran est placé à $D = 0.5\,\mathrm{m}$ du bord final des plaques et perpendiculairement à la vitesse initiale. Trouver la position de l'impact de l'électron sur l'écran.

Solution :

$$\begin{aligned} \tan\theta_D &= \frac{v_y}{v_x} \simeq \frac{3.6}{10} \Longrightarrow \theta_D = \mathrm{atan}(0.36) \simeq 0.34 \\ \theta_D &\simeq 0.34 \frac{180}{\pi} \simeq 20^\circ \\ \frac{\Delta y}{D} &= \tan\theta_D \\ \Delta y &= D \tan\theta_D = 0.5 \frac{3.6}{10} \simeq 18 \mathrm{cm} \end{aligned}$$

5. **Dipôle électrique**

Un dipôle électrique est constitué de deux charges ponctuelles alignées le long de l'axe Ox : $q_A = 2.5\mathrm{nC}$ situé au point $A(x = -10\mathrm{cm})$ et $q_B = -2.5\mathrm{nC}$ situé au point $B(x = +10\mathrm{cm})$. Déterminer le champ électrique :

(a) au point $M_1 = (x = 20\mathrm{cm},\ y = 0)$.

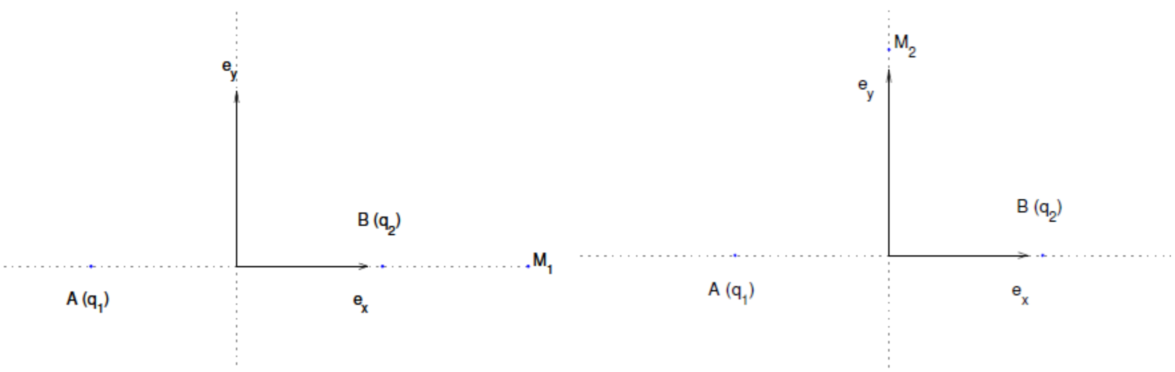

FIGURE 3 – *Dipôle électrique*

Le champ électrique est :

$$\vec{E}(M_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_A}{(0.3)^3}\begin{pmatrix}0.3\\0\end{pmatrix} - \frac{q_B}{(0.1)^3}\begin{pmatrix}0.1\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{9\,10^9 \times 2.5\,10^{-9}}{10^{-2}}\left[\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$= 9 \times \frac{5}{2}\left[\frac{1-9}{9}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}10^2 = -2\,10^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{V.m^{-1}}$$

$$\vec{E}(M_1) = -2\,10^3\widehat{\boldsymbol{x}}\mathrm{Vm^{-1}}\,.$$

(b) au point $M_2(x=0, y=10\mathrm{cm})$.

$$\vec{E}(M_2) = 9\ \times 2.5\frac{1}{\sqrt{2}}10^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1.59\,10^3\widehat{\boldsymbol{x}}\mathrm{V.m^{-1}}\,.$$

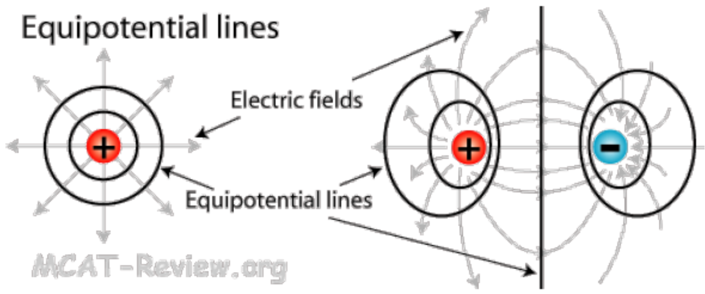

FIGURE 4 – *Champ électrique et équipotentielles d'une charge isolée et d'un dipôle électrique*

Exercices Supplémentaires

6. **Quadrupôle électrique** Trois charges ponctuelles sont alignées le long de l'axe Oy : une charge q située à $y=a$, une charge $-2q$ située à l'origine et une charge q située à $y=-a$. Un tel arrangement constitue un quadrupôle électrique.

   (a) Calculer le champ électrique sur l'axe Ox.

   Solution : L'axe Ox est un axe de symétrie, donc le champ électrique lorsqu'il est évalué sur cet axe est forcément le long de l'axe. Donc $\vec{E}(M) \parallel \widehat{\boldsymbol{x}}$ pour tout $M = (x, 0)$. Le champ électrique vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^3}\overrightarrow{AM} - \frac{2q}{\left|\overrightarrow{OM}\right|^3}\overrightarrow{OM} + \frac{q}{\left|\overrightarrow{BM}\right|^3}\overrightarrow{BM}\right]$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\-a\end{pmatrix}\,.$$

Pour un point M sur l'axe Ox, on a :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} = \begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{BM}} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$$

et

$$AM = BM = \sqrt{a^2 + x^2}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(a^2+x^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ -a \end{pmatrix} - \frac{2q}{|x|^3}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{(a^2+x^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{x}{|x|^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}\left[\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-3/2} - 1\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}\left[\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-3/2} - 1\right]\widehat{\boldsymbol{x}} \,.
\end{aligned}$$

(b) Que devient l'expression du champ électrique pour $x \gg a$? Comparer cette expression avec celle d'une charge ponctuelle et celle d'un dipôle électrique.

Solution : Quand $x \gg a$, on peut faire un un développement limité : $\lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^\alpha \simeq (1+\alpha\delta)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}\left[\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-3/2} - 1\right]\widehat{\boldsymbol{x}} \\
&\simeq \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2} - 1\right]\widehat{\boldsymbol{x}} = -\frac{3qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^4}\frac{x}{|x|}\widehat{\boldsymbol{x}} \,,
\end{aligned}$$

donc à des grand distances sur l'axe Ox, le champ diminue en $\frac{1}{x^4}$.
En comparaison, pour un dipôle, le champ sur l'axe Ox s'écrit :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}\right|^3}\overrightarrow{\boldsymbol{AM}} - \frac{q}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{BM}}\right|^3}\overrightarrow{\boldsymbol{BM}}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(x+a)^3}\begin{pmatrix} x+a \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{q}{(x-a)^3}\begin{pmatrix} x-a \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\widehat{\boldsymbol{x}}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-2} - \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-2}\right] \\
&\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\widehat{\boldsymbol{x}}\left[\left(1-2\frac{a}{x}\right) - \left(1+2\frac{a}{x}\right)\right] = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{4a}{x^3}\widehat{\boldsymbol{x}} \,,
\end{aligned}$$

où nous avons de nouveau fait appel au développement limité.

Pour une charge q, à l'origine l'amplitude du champ, $\vec{\boldsymbol{E}}\,(M=(x,0)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|x|^2}\widehat{\boldsymbol{x}}$, et l'amplitude du champ diminue en $\frac{1}{|x|^2}$. Ces résultats illustrent la règle générale selon laquelle, à grande distance, le champ de charge d'ordre multipolaire m diminue comme $|r|^{2+m}$.

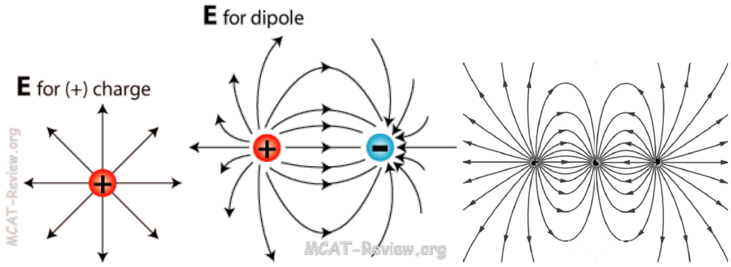

FIGURE 5 – *Champ et équipotentielles d'une charge, d'un dipôle et d'un quadrupôle électrique.*

7. **Expérience de Millikan**
Des gouttelettes d'huile sont pulvérisées dans un condensateur à l'intérieur duquel le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ est constant. Une gouttelette se déplace à une vitesse constante v par effet de la gravité, du champ et de la friction visqueuse (voir figure 6).

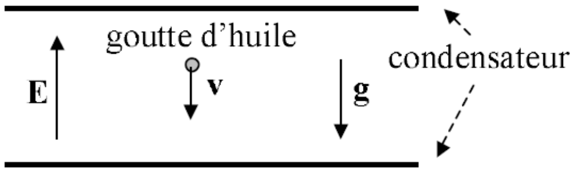

FIGURE 6 – *Expérience de Millikan*

(a) Exprimer le rayon r de la goutte en fonction de la vitesse limite v_0 qu'elle atteint lorque le champ électrique est nul. On supposera que la force de frottement est $\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{fric}} = -6\pi\eta r\vec{\boldsymbol{v}}$, où $\eta = 1.8\,10^{-5}$ Pa.s est la viscosité de l'air. (La masse volumique de l'huile est $\rho_h = 1.05\,10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ et celle de l'air $\rho_a = 1.2\,\text{kg.m}^{-3}$). **A.N.** Vitesse limite : $v_0 = 0.392\,\text{mm.s}^{-1}$.
Solution : A l'équilibre
$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{fric}} = -6\pi\eta r\vec{\boldsymbol{v}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_g = mg\widehat{\boldsymbol{z}}$$
Nous trouvons alors $\boldsymbol{v} = -v_0\widehat{\boldsymbol{z}}$ avec :
$$6\pi\eta r v_0 = mg$$
La connaissance de la densité de l'huile, ρ_h et de la vitesse limite v_0 nous permet de déterminer le rayon (et donc la masse) de la goutte.
$$6\pi\eta r v_0 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_h g$$
$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho_h g}} = \sqrt{\frac{9\,(1.8\,\times 10^{-5})\,(3.92\times 10^{-4})}{2\times 1.05\,10^3\times 9.8}} \simeq 1.76\mu m$$

(b) On applique un champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ (colinéaire à la gravité) jusqu'à ce que la gouttelette se trouve à l'arrêt. Calculer la charge d'une gouttelette en fonction du champ électrique et de la vitesse limite à champ nul, v_0. **A.N.** : $E = \left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| = 482\,\text{kV.m}^{-1}$. Comparez la charge mesurée avec celle de l'électron.

Solution : Le champ est en équilibre quand

$$qE = F_g$$

La densité de l'huile est $\rho_h = 1.05\,10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. La force gravitationnelle sur la goutte est donc :

$$\begin{aligned} F_g = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_h g &= \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho_h g}}\rho_h \frac{9\eta v_0}{2\rho_h g} g \\ &= 9\eta v_0 \pi \sqrt{\frac{2\eta v_0}{\rho_h g}} = 0.23\mathrm{pN}\ . \end{aligned}$$

La charge sur la particule est

$$\begin{aligned} |q| &= \frac{F_g}{E} = \frac{9\eta v_0 \pi}{E}\sqrt{\frac{2\eta v_0}{\rho_h g}} = \frac{0.23\times 10^{-12}}{482\times 10^3} \simeq 4.85\,10^{-19}\mathrm{C} \\ &\simeq 3.013e \qquad q_e = -e(e = 1.609\times 10^{-19}\mathrm{C})\ . \end{aligned}$$

Solution : Dans la limite des incertitudes expérimentales, on s'attendait effectivement à obtenir une valeur entière multipliée par e. Dans l'expérience de Millikan, les gouttes étaient suffisamment petites pour que chaque goutte ne possède généralement qu'une poignée d'électrons. Ce n'est qu'après un grand nombre de mesures qu'il a pu démontrer que les charges sur les gouttes s'exprimaient toujours comme un nombre entier multiplié par $e = 1.609\times 10^{-19}$C.

8. Deux charges positives identiques sont fixées sur l'axe z en $z = a$ et $z = -a$. Calculer leur potentiel sur un point M dans le plan $x0y$ à une distance ρ de l'axe Oz, en déduire le champ électrique sur l'axe dans ce plan.
Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\rho,\phi,0) = \rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$\begin{aligned} V(\rho,\phi,0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}|} + \frac{q}{|-a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}}|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})\cdot(a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})}} + \frac{q}{\sqrt{(-a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})\cdot(-a\widehat{\boldsymbol{z}}+\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}})}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+\rho^2}} + \frac{q}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{a^2+\rho^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{E}} &= -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}V(\rho) = -\widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho) \\ &= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a^2+\rho^2\right)^{-1/2} = \frac{2q\rho}{4\pi\epsilon_0\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}}\widehat{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned}$$

Par symétrie, $E_z = E_\phi = 0$, et nous avons fait appel à :

$$\boldsymbol{\nabla}V = \widehat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}V + \widehat{\boldsymbol{\phi}}\frac{\partial}{\partial\phi}V + \widehat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}V$$

9. **Coordonnées cylindriques et sphériques**
Soit (O,x,y,z) un repère en coordonnées cartésiennes, de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{x}}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}$, $\widehat{\boldsymbol{z}}$, et (O,r,ϕ,z) un repère en coordonnées cylindriques de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{e}}_r$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi$, $\widehat{\boldsymbol{z}}$.

(a) Exprimer x et y en fonction de ρ et ϕ

Solution :

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \end{aligned} \tag{9}$$

(b) Exprimer $\widehat{\boldsymbol{e}}_r$ et $\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi$ dans la base $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}})$.

Solution :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} &= x\widehat{\boldsymbol{x}} + y\widehat{\boldsymbol{y}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} &= \widehat{\boldsymbol{x}}\rho\cos\phi + \widehat{\boldsymbol{y}}\rho\sin\phi \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} &= \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial x}dx + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial y}dy = dx\widehat{\boldsymbol{x}} + dy\widehat{\boldsymbol{y}} \\ d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} &= \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}d\phi \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{e}}_\rho \equiv \widehat{\boldsymbol{\rho}} \equiv \frac{\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}}{\left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}\right|} &= \widehat{\boldsymbol{x}}\cos\phi + \widehat{\boldsymbol{y}}\sin\phi \qquad \left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}\right| = 1 \\ \widehat{\boldsymbol{e}}_\phi \equiv \widehat{\phi} \equiv \frac{\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\phi}}{\left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\phi}\right|} &= \frac{-\widehat{\boldsymbol{x}}\rho\sin\phi + \widehat{\boldsymbol{y}}\rho\cos\phi}{\rho} = -\widehat{\boldsymbol{x}}\sin\phi + \widehat{\boldsymbol{y}}\cos\phi \qquad \left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}\right| = \rho \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} &= \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial \phi}d\phi = \left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}\right|\widehat{\boldsymbol{\rho}}d\rho + \left|\frac{\partial\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\partial\rho}\right|\widehat{\boldsymbol{\phi}}d\phi \\ &= d\rho\widehat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\widehat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

(c) Donner l'expression du volume élémentaire $d\mathcal{V}$ en coordonnées cylindriques.

Solution :

$$d\mathcal{V} = (dz)\,(d\rho)\,(\rho d\phi) \tag{13}$$

(d) Reprendre les questions (a) à (c) pour un repère (O, r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques, de vecteurs de base $\widehat{\boldsymbol{e}}_r$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_\theta$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi$.

Exprimer x, y, et z en fonction de r, θ, et ϕ.

Solution :

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{14}$$

xprimer $\widehat{\boldsymbol{e}}_r$, $\widehat{\boldsymbol{e}}_\theta$ et $\widehat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$ dans la base $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}, \widehat{\boldsymbol{z}})$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{e}}_r &\equiv \widehat{\boldsymbol{r}} = \widehat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\phi + \widehat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\phi + \widehat{\boldsymbol{z}}\cos\theta \\
\widehat{\boldsymbol{e}}_\theta &\equiv \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{x}} \cos\theta\cos\phi + \widehat{\boldsymbol{y}} \cos\theta\sin\phi - \widehat{\boldsymbol{z}}\sin\theta \\
\widehat{\boldsymbol{e}}_\phi &\equiv \widehat{\boldsymbol{\phi}} = -\widehat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \widehat{\boldsymbol{y}} \cos\phi
\end{aligned} \tag{15}$$

Donner l'expression du volume élémentaire $d\mathcal{V}$ en coordonnées sphériques.
Solution :

$$d\mathcal{V} = (dr)\,(rd\theta)\,(r\sin\theta d\phi) \tag{16}$$

10. **Calotte sphérique chargée**

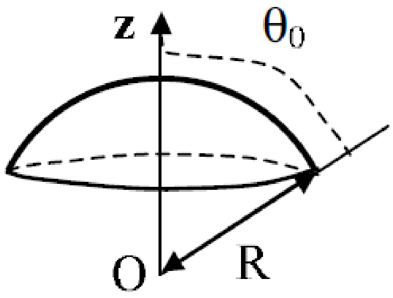

FIGURE 7 – *Calotte sphérique chargée*

Soit une calotte sphérique chargée, de centre O, et d'axe de symétrie (Oz). Le rayon de la sphère est R, et le disque fermant la calotte est vu depuis O sous un angle θ_0 (figure 7). Calculer la charge totale de la calotte dans le cas où :

(a) La charge est répartie uniformément en volume avec une densité ρ_0.
Solution : Comme ce problème à une axe de symétrie autour de l'axe z, on choisit travail avec des coordonnées cylindriques.

$$Q = \iiint \rho_v\,(\rho,\phi,z)\,d\mathcal{V}$$
$$d\mathcal{V} = (d\rho)\,(\rho d\phi)\,(dz)$$

$$\begin{aligned}
\rho = R\sin\theta = R\left(1-\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{1/2} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi\, \rho\,(\rho,\phi,z) \\
&= \rho_0 \int_{R\cos\theta_0}^{R} dz \int_0^{R\left(1-\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{1/2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi = 2\pi\rho_0 \int_{R\cos\theta_0}^{R} dz \int_0^{R\left(1-\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{1/2}} \rho d\rho \\
&= \rho_0 \int_{R\cos\theta_0}^{R} \pi\left(R^2-z^2\right) dz = \rho_0\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{R\cos\theta_0}^{R} \\
&= \rho_0\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^3\cos\theta_0 + \frac{R^3\cos^3\theta_0}{3}\right) \\
&= \rho_0\pi R^3\left(\frac{2}{3} - \cos\theta_0 + \frac{\cos^3\theta_0}{3}\right)
\end{aligned}$$

(b) La charge est répartie uniformément en surface, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte, avec une densité σ_0.

Solution :

$$\begin{aligned}
Q &= \iint \sigma(R,\theta,\phi)\, dS \\
Q &= \int_0^{\pi} R d\theta \int_0^{2\pi} R\sin\theta d\phi\, \sigma(R,\theta,\phi) \\
&= 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\theta_0} d\theta \sin\theta \\
&= -2\pi R^2 \sigma_0 \cos\theta\big|_0^{\theta_0} \\
&= -2\pi R^2 \sigma_0 (\cos\theta_0 - 1) \\
&= 2\pi R^2 \sigma_0 (1 - \cos\theta_0)
\end{aligned}$$

(c) La charge est répartie en surface avec densité $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, sur la partie sphérique et le disque fermant la calotte (θ est la colatitude, en coordonnées sphérique).

Solution :

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^{\pi} R d\theta \int_0^{2\pi} R\sin\theta d\phi\, \sigma(R,\theta,\phi) \\
&= 2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\theta_0} d\theta \sin\theta \cos\theta \\
&= -2\pi R^2 \sigma_0 \int_0^{\theta_0} d\cos\theta \cos\theta \\
&= -2\pi R^2 \sigma_0 \int_1^{\cos\theta_0} u du = 2\pi R^2 \sigma_0 \int_{\cos\theta_0}^{1} u du \\
&= \pi R^2 \sigma_0\, u^2\big|_{\cos\theta_0}^{1} \\
&= \pi R^2 \sigma_0 \left(1 - \cos^2\theta_0\right)
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable, $u = \cos\theta$.