

Electricité et magnétisme - TD n°10

Induction

1. Inductance mutuelle - transformateur

On considère un solénoïde de section circulaire, de rayon R_1 , de longueur l_1 , et constitué de N_1 spires. A l'intérieur de celui-ci, on place un deuxième solénoïde de rayon R_2 , de longueur l_2 , et constitué de N_2 spires.

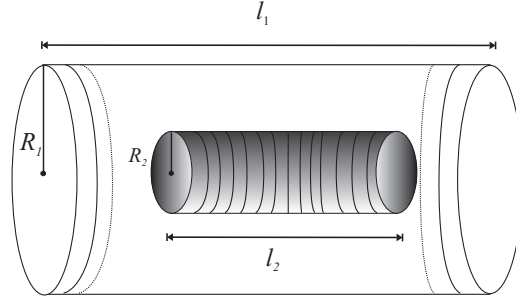


FIGURE 1 – Inductance mutuelle de deux solénoïdes.

- (a) Calculer l'inductance mutuelle, M , entre les deux solénoïdes en utilisant l'approximation de solénoïdes infinis.

Dans l'approximation de solénoïdes infinis, on obtient les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ respectivement

$$\vec{B}_1 = \hat{z}\mu_0 n_1 I_1 = \hat{z}\mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1 \quad (1)$$

$$\vec{B}_2 = \hat{z}\mu_0 n_2 I_2 = \hat{z}\mu_0 \frac{N_2}{l_2} I_2 \quad (2)$$

En écrivant le flux à travers le circuit Φ_1 , l'inductance propre du circuit et l'inductance mutuelle relie les courants dans les deux circuits au flux :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \quad (3)$$

De même, le flux dans le circuit 2 s'écrit :

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \quad (4)$$

Afin de déterminer l'inductance propre, on traite chacune des Bobine d'abord de façon indépendante.

Traitons d'abord la bobine 1 toute seule en prenant $I_2 = 0$. En utilisant la valeur du champ magnétique trouvé en l'éq.(1), nous obtenons que le flux magnétique à travers chacune des N_1 spires de cette bobine est égale à :

$$\Phi_{1,\text{spire}} = \iint_S \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \pi R_1^2 I_1$$

Le flux total à travers la bobine est donc :

$$\Phi_1 = N_1 \Phi_{1,\text{spire}} = \mu_0 \frac{N_1^2}{l_1} \pi R_1^2 I_1$$

En comparant ceci avec l'expression de l'éq.(3) (avec $I_2 = 0$), on déduit l'expression de l'inductance propre de la bobine 1 :

$$L_1 = \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1^2}{l_1}$$

Reprenant les mêmes considérations avec maintenant $I_1 = 0$, on obtient de même l'inductance propre de la bobine 2 :

$$L_2 = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_2^2}{l_2}$$

Il n'est loin évident au premier regard, mais on peut démontrer que les inductances mutuelles sont toujours égales :

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

Les équations d'inductance de (3) et (4) s'écrivent donc :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = L_1 I_2 + M I_1$$

Maintenant on peut s'attaquer à l'inductance mutuelle. Il n'est pas évident comment déterminer le flux à travers le circuit 1 à produit par un courant dans le circuit 2. Par contre, on peut facilement déterminer le flux à travers circuit 2 créé par un courant I_1 dans le circuit , $\Phi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \pi N_2 R_2^2 \left\| \vec{\mathbf{B}}_1 \right\| = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_1 N_2}{l_1} I_1 \equiv M_{21} I_1$$

donc on peut conclure que l'inductance mutuelle est :

$$M_{21} = M = \mu_0 \pi R_2^2 \frac{N_1 N_2}{l_1}$$

On n'aurait pas pu facilement déterminer le flux à travers le circuit 1 créé par un courant I_2 dans le circuit 2, mais peu importe puisque nous savons de manière générale que $M_{12} = M_{21} = M$.

- (b) Exprimer M dans le cas où $l_2 \rightarrow l_1$ et $R_2 \rightarrow R_1$, mais avec $N_1 \neq N_2$.

$$M \rightarrow \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{l_1}$$

- (c) On se rappelle que dans la mesure où les résistances des fils sont négligeables, les tensions aux bornes des solénoïdes s'expriment (dans la convention récepteur) :

$$U_1(t) = L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + M \frac{dI_2(t)}{dt}$$

$$U_2(t) = L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + M \frac{dI_1(t)}{dt}$$

En prenant le cas étudié en b), calculer le rapport $U_2(t)/U_1(t)$ en fonction de N_1 et N_2 . Voyez-vous une application intéressante ?

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1^2}{l_1} \frac{dI_1(t)}{dt} + \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{l_1} \frac{dI_2(t)}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l_1} \left[N_1^2 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_1 N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \\ &= N_1 \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l_1} \left[N_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \\ U_2(t) &= \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_2^2}{l_1} \frac{dI_2(t)}{dt} + \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{l_1} \frac{dI_1(t)}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l_1} \left[N_2^2 \frac{dI_2(t)}{dt} + N_1 N_2 \frac{dI_1(t)}{dt} \right] \\ &= N_2 \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l_1} \left[N_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + N_2 \frac{dI_2(t)}{dt} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

On obtient donc :

$$\frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$$

2. Considérer un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant (dans le temps). Trouver un potentiel vecteur $\vec{A}$ dont le champ magnétique dérive, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Votre solution, est-elle unique ?

On prend les axes telle que $\vec{B} = B \hat{z}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= B \hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

A cause de l'invariance en z , on a

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

impliquant que A_z est constant

$$A_z = C_1$$

Si on prend

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = B \quad \text{et} \quad \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

une solution possible est donc

$$A_y(x) = Bx + C_2 \quad A_x(x) = C_3$$

avec C_2 et C_3 comme constants d'intégration. Puisque C_1 , C_2 et C_3 sont tous arbitraire, il est claire que le potentiel vecteur n'est pas unique. On a donc le droit de simplifier notre solution en prenant $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ afin que notre choix pour $\vec{A}$, désormais noté $\vec{A}_1$ s'écrit :

$$\vec{A}_1 = (0, Bx, 0) \tag{6}$$

La nature arbitraire de $\vec{A}$ ne s'arrête pas la. On peut également vérifier que

$$\vec{A}_2 = (-By, 0, 0) \tag{7}$$

est une toute aussi bonne choix pour le potentiel vecteur. Même la condition imposée par la gauge de Coulomb ne suffit pas afin d'imposer un choix par rapport à l'autre puisque

$$\text{div } \vec{A}_1 = \text{div } \vec{A}_2 = 0 \tag{8}$$

pour les deux choix.

Encore une autre choix est $\vec{A}_3 = \frac{1}{2} (\vec{A}_1 + \vec{A}_2)$, donc

$$\vec{A}_3 = \frac{B}{2} (-y, x, 0) = \frac{B\rho}{2} (-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \frac{B\rho}{2} \hat{\phi} \tag{9}$$

où nous sommes passé en coordonnées cylindriques. Cette dernière choix de $\vec{A}_3(\rho) = \frac{B\rho}{2} \hat{\phi}$ est plus symétrique que $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$, et on le préfère en générale, mais ils sont tous les trois des formes pour $\vec{A}$ acceptables.

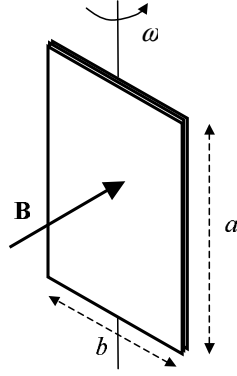


FIGURE 2 – Bobine rectangulaire dans un champ magnétique

3. Générateur - Cadre tournant

Une bobine plate, rectangulaire, et indéformable, de côtés $a = 20 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, est constituée d'un conducteur cylindrique de diamètre $d = 1 \text{ mm}$, et de résistivité $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Elle tourne avec une fréquence de 600 tours par minute autour d'un axe vertical situé dans le plan de la bobine. La bobine est placée dans un champ magnétique d'intensité $B = 1 \text{ T}$, perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 2).

- (a) Quelle est l'expression du courant circulant dans la bobine ? On calculera sa valeur efficace. On définit l'axe z comme l'axe de rotation de la bobine. On définit un temps $t = 0$ tel que la direction $\hat{\mathbf{n}}$ normale au circuit tourne comme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}(t) &= \hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t \\ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(t) &= -\hat{\mathbf{x}} \omega \sin \omega t + \hat{\mathbf{y}} \omega \cos \omega t\end{aligned}$$

L'axe de $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{e}}_x$ doit être perpendiculaire à celle de z . On choisit l'orientation de l'axe $\hat{\mathbf{x}}$ tel que $\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{x}}$. Le flux de du cadre soit donné par

$$\Phi(t) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) S = \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) ab = B\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) ab$$

Le rayon de la bobine est $R = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$. La fréquence est de 600 tours/minute = 10 tours/seconde donc une fréquence angulaire de $\omega = 10 \times 2\pi \text{ radians s}^{-1}$.

Pour une bobine en mouvement dans un champ $\vec{\mathbf{B}}$ constant les forces de Laplace sur les charges libre induit un champ électrique à l'intérieur du conducteur dites force électromotrice $\mathcal{E}$ dont la valeur est donné par le "règle du flux" i.e. que la force électromotrice du circuit est égale à $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ où Φ est le flux à travers le circuit :

$$\mathcal{E} \equiv \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

L'application de cette règle nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -Bab\hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(t) \\ &= -Bab\hat{\mathbf{x}} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}\omega \sin \omega t + \hat{\mathbf{y}}\omega \cos \omega t) \\ &= Bab\omega \sin \omega t\end{aligned}$$

La résistance totale du circuit est :

$$\begin{aligned}R &= \frac{\rho \times 2(a+b)}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{\rho \times 6 \cdot 10^{-1}}{\pi \left(\frac{10^{-3}}{2}\right)^2} = \frac{\rho 24 \cdot 10^{-1}}{\pi 10^{-6}} = \frac{24 \times \rho \times 10^5}{\pi} \\ &= \frac{24 \times 1,6 \cdot 10^{-3}}{\pi} \simeq 12,2 \cdot 10^{-3} \Omega\end{aligned}$$

Le courant dans le circuit est

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bab\omega}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

$$I_0 = \frac{Bab\omega}{R} = \frac{BS\omega}{R} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 10 \times 2\pi}{12.2 \times 10^{-3}} = \frac{200 \times 2\pi}{12.2}$$

$$\simeq 103\text{A}$$

Sa valeur efficace est :

$$I_{\text{eff}}^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt$$

$$= \frac{I_0^2}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_0^2}{2T} \int_0^T T (1 - \cos 2\omega t) dt$$

$$= \frac{I_0^2}{2}$$

où nous avons utilisé le fait que $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ et le résultat

$$\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \omega t$$

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

La valeur efficace du courant est :

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 73\text{A}$$

(b) Décrivez l'action mécanique de $\vec{\mathbf{B}}$ sur la spire.

Le théorème de Maxwell donne

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = I(t) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -I\mathcal{E} = -I^2 R$$

Le travail fourni est identique à celle dissipée par l'effet joule dans la bobine. Si on n'utilise pas le théorème de Maxwell, on doit revenir aux forces de Laplace et le problème est bien plus difficile.

On pourrait procéder comme suit :

On place le cadre tel que

$$OM' = ON' = \frac{b}{2} \quad -\vec{\mathbf{NQ}} = \vec{\mathbf{PM}} = a\hat{\mathbf{z}}$$

Le couple exercée sur la bobine est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathbf{OM}} \wedge \vec{\mathbf{F}}_{PM} + \vec{\mathbf{ON}} \wedge \vec{\mathbf{F}}_{NQ}$$

Les forces $\vec{\mathbf{F}}_{PM}$ et $\vec{\mathbf{F}}_{NQ}$ sont les forces de *Laplace* :

$$\vec{\mathbf{F}}_{PM} = \int_{PM} I d\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}} = IaB\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}} = IaB\hat{\mathbf{y}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{NQ} = \int_{NQ} I d\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}} = -IaB\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{x}} = -IaB\hat{\mathbf{y}}$$

On remarque que $\overrightarrow{\text{OM}} = -\overrightarrow{\text{ON}}$ et que $\overrightarrow{\text{OM}} - \overrightarrow{\text{ON}} = \overrightarrow{\text{NM}}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OM}} &= \frac{a}{2}\hat{\mathbf{z}} + \frac{b}{2}(-\hat{\mathbf{x}}\sin\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos\omega t) \\ \overrightarrow{\text{ON}} &= -\frac{a}{2}\hat{\mathbf{z}} - \frac{b}{2}(-\hat{\mathbf{x}}\sin\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos\omega t)\end{aligned}$$

On remarque que $\overrightarrow{\text{OM}} = -\overrightarrow{\text{ON}}$ et que $\overrightarrow{\text{OM}} - \overrightarrow{\text{ON}} = \overrightarrow{\text{NM}}$ donc

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= I_a B \left(\overrightarrow{\text{OM}} - \overrightarrow{\text{ON}} \right) \wedge \hat{\mathbf{y}} = -\frac{b}{2} (\sin\omega t \hat{\mathbf{x}}) \wedge \hat{\mathbf{y}} \\ &= I_a B \left(\overrightarrow{\text{NM}} \wedge \hat{\mathbf{y}} \right) = -b \sin\omega t (\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}})\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{NM}}$ est dans le plan xOy et est $\perp$ à $\hat{\mathbf{n}}$. Avec la condition qu'à $t = 0$ $\overrightarrow{\text{NM}}(t = 0) = \hat{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{NM}}(t) &= (-\hat{\mathbf{x}}\sin\omega t + \hat{\mathbf{y}}\cos\omega t) b \\ \hat{\mathbf{n}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\omega t\end{aligned}$$

et on obtient

$$\vec{\Gamma} = I_a b B (-\hat{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{y}}) \sin\omega t = -I S B \hat{\mathbf{z}} \sin\omega t$$

Le vecteur de rotation est donné par $\vec{\theta}(t) = \omega t \hat{\mathbf{z}}$ et la vitesse angulaire de la rotation par

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} = \omega \hat{\mathbf{z}}$$

La puissance fourni au circuit par les forces mécanique sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{op} &\equiv \frac{d\mathcal{T}_{op}}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = -I(t) S B \omega \sin\omega t \\ &= -I_0 S B \omega \hat{\mathbf{z}} \sin^2\omega t = -\frac{B^2 S^2 \omega^2}{R^2} R \sin^2\omega t \\ &= -R I^2(t)\end{aligned}$$