

Formulaire d'électrostatique

1 Champ électrostatique

\vec{E} créé par une charge q à position P :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|^2} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

\vec{E} créé par N charges ponctuelles :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{P}_iM\|^2} \frac{\vec{P}_iM}{\|\vec{P}_iM\|} \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i\end{aligned}$$

\vec{E} créé par une distribution continue :

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}_P(M), \quad d\vec{E}_P(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}$$

où dq est déterminé par une distribution de charge :

$$\begin{aligned}\text{linéique :} & \quad dq = \lambda(P) dl_P \equiv \lambda dl \\ \text{surfactive :} & \quad dq = \sigma(P) d^2S_P \equiv \sigma dS \\ \text{volumique :} & \quad dq = \rho(P) dV_P \equiv \rho d^3V\end{aligned} \quad (1)$$

(N.B. ϵ_0 est la permittivité du vide)
 $1/(4\pi\epsilon_0) \equiv K \simeq 9.10^9 \text{SI}$.

2 Propriétés fondamentales

1. Théorème de Gauss :

$$\begin{array}{ll}\text{Forme intégrale} & \text{Forme différentielle} \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} & \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{array}$$

(N.B. les deux formes du théorème de Gauss sont reliées par le théorème d'Ostrogradsky)

2. L'autre équation fondamentale de l'électrostatique, $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ entraîne qu'on peut toujours définir un potentiel électrostatique V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

3 Formulations alternatives

On peut insérer $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ dans l'équation $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ afin de ramener l'électrostatique à une seule équation différentielle de deuxième degré (**L'équation de Poisson**) :

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}}V \equiv \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où l'opérateur $\Delta \equiv \text{div } \overrightarrow{\text{grad}}$ est appelé le Laplacien.

Quand on résout cette équation dans une région sans charges on dit qu'on a affaire à **l'équation de Laplace** :

$$\Delta V = 0$$

4 Potentiel électrostatique V

La différence de V entre deux points ($V_A - V_B$) est déterminé par la **circulation de \vec{E}** entre A et B :

$$U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

V créé par une charge q à position P :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + V_0$$

V créé par N charges ponctuelles :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{P}_iM\|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} + V_0$$

V créé par une distribution continue :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\|\vec{PM}\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} + V_0$$

où les dq sont spécifiés dans l'éq.(1). S'il n'y a pas de charges à l'infini, la convention est de prendre $V(\infty) = 0$, ce qui entraîne $V_0 = 0$.

5 Dipôle électrostatique

Un modèle d'un dipôle \vec{p} est deux charges $\pm q$ séparées par une distance \vec{d} . Le moment dipolaire de ce système est $\vec{p} = q\vec{d}$. Pour des systèmes plus compliqués, le moment dipolaire électrostatique est donné par :

$$\begin{array}{ll}\text{charges ponctuelles} & \text{distribution surfacique} \\ \vec{p} = \sum_i q_i \vec{OP}_i & \vec{p} = \iiint \sigma \vec{OP} dS\end{array}$$

distribution volumique

$$\vec{p} = \iiint \rho \vec{OP} dV$$

Pour des distances grandes devant la taille du système :

$$V(M) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

6 Diélectriques

Un diélectrique est généralement caractérisé par un **vecteur de polarisation**, \vec{P} , défini partout dans le diélectrique. Le vecteur polarisation peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire telle que $d\vec{p} = \vec{P} dV$. Le potentiel créé par le diélectrique est donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{objet}} \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}}{r^2} dV \quad (3)$$

Un regard alternative (complémentaire) est d'interpréter \vec{P} comme produisant une densité surfacique de polarisation σ_{pol} et une densité volumique de polarisation ρ_{pol}

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P}$$

Cette interprétation amène à une expression équivalente de V :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iint_S \frac{\sigma_{\text{pol}}}{r} dS + \iiint_V \frac{\rho_{\text{pol}}}{r} dV \right]$$

7 Déplacement électrique

En présence de diélectriques, il est pratique de définir le **déplacement diélectrique** \vec{D} :

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

L'équation différentielle de \vec{D} est :

$$\text{div} \vec{D} = \rho - \rho_{\text{pol}} \equiv \rho_{\text{libre}} \quad (5)$$

où ρ_{libre} correspond aux charges réellement manipulées dans une expérience.

On peut parfois résoudre \vec{D} en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(5) :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre,int}} \quad (6)$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre \vec{P} et \vec{E}

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (7)$$

où χ_e est la **susceptibilité** du diélectrique.

Mettant (7) dans (4), on obtient une relation linéaire entre \vec{D} et \vec{E} (**relation constitutive**) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon_d \vec{E}$$

où ϵ_r est la constante diélectrique (relative) du diélectrique et ϵ_d est la permittivité du diélectrique.

8 Conducteurs parfaits à l'équilibre électrostatique

Le champ à l'intérieur d'un conducteur parfait est :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad \vec{D}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad V = Cte$$

Le champ à proximité d'un conducteur est donné par (Th. de Coulomb) :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \hat{n}, \quad \vec{D}_{\text{ext}} = \sigma_{\text{libre}} \hat{n}$$

où \hat{n} est le vecteur normale à la surface (de l'intérieur vers l'extérieur) et σ_{libre} est la charge surfacique du conducteur (dans le vide $\epsilon_r = 1$).

Capacité C d'un conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad Q = \iint_{\text{surface}} \sigma d^2 S$$

Coefficients d'influence d'un système de N conducteurs

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad \text{avec} \quad C_{ij} = C_{ji}$$

Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{U} \quad \text{où} \quad U = V_1 - V_2, \quad Q = Q_1 = -Q_2$$

où Q_1, Q_2 sont les charges sur les surfaces en influence totale (ou quasi totale).

9 Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle : $W_e = qV$

D'un dipôle : $W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$

De distributions de charge :

$$W_e = \iint_{\text{Surface(s)}} \sigma V d^2S + \iiint_{\text{objet(s)}} \rho V dV$$

Energie à partir du champ électrique

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} \epsilon_r \|\vec{E}\|^2 dV$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

D'un système de N conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}Q_i V_i$$

10 Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur en équilibre :

$$\vec{F} = \iint_S d^2\vec{F} = \iint_S \mathcal{P} d\vec{S}$$

où $\mathcal{P} = \sigma^2 / \epsilon_r \epsilon_0$ est la pression électrostatique.

Force via l'énergie (travaux virtuels) :

$$\vec{F} = - \left(\overrightarrow{\text{grad}} W_e \right)_Q = \left(\overrightarrow{\text{grad}} W_e \right)_V$$

Force et moment sur un dipôle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

Force sur l'armature i d'un condensateur :

$$\vec{F}_{\rightarrow i} = - \left(\overrightarrow{\text{grad}}_i W_e \right)_Q = \frac{U^2}{2} \overrightarrow{\text{grad}}_i C$$

où i désigne qu'il s'agit d'un gradient par rapport aux coordonnées du conducteur i .

11 Courrant et résistance

Densité de courant \vec{j} :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

Courrant I :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Loi d'Ohm local : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

(γ conductivité, $\eta = 1/\gamma$ résistivité)

Résistance d'un conducteur

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint \gamma \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

D'un fil de section S et longueur L :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

D'un conducteur de section variable :

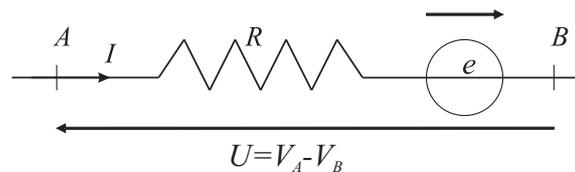
$$R = \int \frac{dl}{\gamma S} \quad (8)$$

12 Electrocinétique

Force électromotrice (fém) entre A et B

$$e = \int_A^B \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Bilan de puissance d'une portion de circuit



- $U = V_A - V_B = RI - e$
- $P = UI$, puissance disponible entre A et B
- $P_J = RI^2$, puissance dissipée par effet Joule
- $P = eI$ puissance fournie
générée (si $e > 0$) ou consommée (si $e < 0$)

Lois de conservation

- Lois des noeuds (conservation de charge)

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortants}}$$

- Loi des mailles (conservation d'énergie)

$$\sum (R_k I_k - e_k) = 0$$