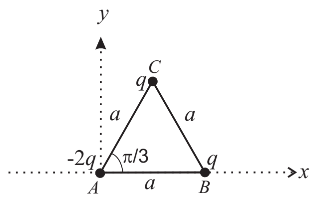
Partiel d'Electromagnétisme : 6 novembre 2014

4 problèmes - recto verso / Durée de l'épreuve 2 heures. Calculettes standards autorisées

1. (6pts) On considère un système de trois charges ponctuelles aux sommets (A,B,C) d'un triangle équilatéral de côté, a, avec des charges respectives aux sommets $-2q$,q , et q (voir la figure). Exprimer vos réponses à (a)-(d) ci-dessous en fonction de q, ϵ_0, et a (spécifier les unités des réponses).



(a) Trouver la force (en coordonnées cartésiennes) sur la charge q au sommet B.

$$\begin{aligned}
F_{\to q_B} &= \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0}\left(q_C\frac{\overrightarrow{\mathbf{CB}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{CB}}\right\|^3}+q_A\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\|^3}\right)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(q\frac{\widehat{\mathbf{x}}a\sin\pi/6-\widehat{\mathbf{y}}a\cos\pi/6}{a^3}-2q\frac{a\widehat{\mathbf{x}}}{a^3}\right)\\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\left(\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{x}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\widehat{\mathbf{y}}\right)-2\widehat{\mathbf{x}}\right)\\
&= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}\left(-3\widehat{\mathbf{x}}-\sqrt{3}\widehat{\mathbf{y}}\right)\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

(b) Trouver le moment dipolaire , $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, du systèmeen coordonnées cartésiennes.

La hauteur, h, du triangle est donné par :

$$h^2+\frac{a^2}{4}=a^2\Rightarrow h=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dans le calcul de $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, on est libre dans notre choix d'origine puisque la charge totale est nulle. En prenant l'origine au point A par exemple :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{p}} &= \sum_{i=A,B,C} q_i OP_i = q_A\overrightarrow{\mathbf{OA}}+q_B\overrightarrow{\mathbf{OB}}+q_C\overrightarrow{\mathbf{OC}} = -2q\overrightarrow{\mathbf{OO}}+q\frac{a}{2}\widehat{\mathbf{x}}+qh\widehat{\mathbf{y}}+qa\widehat{\mathbf{x}}\\
&= q\frac{3}{2}a\widehat{\mathbf{x}}+qa\frac{\sqrt{3}}{2}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{q}{2}a\sqrt{12}\frac{3\widehat{\mathbf{x}}+\sqrt{3}\widehat{\mathbf{y}}}{\sqrt{12}}\\
&= qa\sqrt{3}\frac{3\widehat{\mathbf{x}}+\sqrt{3}\widehat{\mathbf{y}}}{2\sqrt{3}} = qa\sqrt{3}\widehat{\mathbf{u}} = p\widehat{\mathbf{u}}\quad[\mathrm{Cm}]
\end{aligned}$$

où :

$$\widehat{\mathbf{u}}\equiv\frac{3\widehat{\mathbf{x}}+\sqrt{3}\widehat{\mathbf{y}}}{2\sqrt{3}}\qquad\text{et}\qquad p=\left\|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right\|=qa\sqrt{3}\ \mathrm{Cm}$$

(c) Trouver l'énergie électrostatique, W_e, du système.

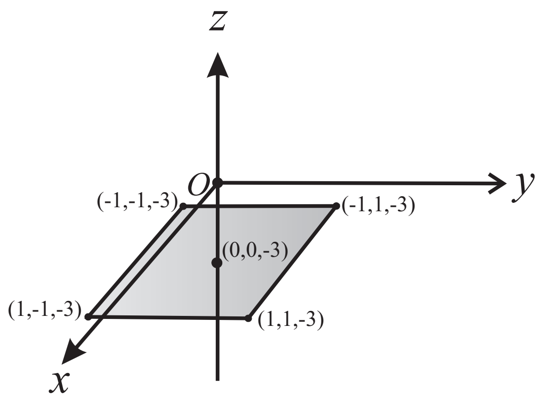
$$W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_A q_B}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\|} + \frac{q_B q_C}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{BC}}\right\|} + \frac{q_A q_C}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right\|}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-2q^2}{a} + \frac{q^2}{a} + \frac{-2q^2}{a}\right) = \frac{-3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\text{J}$$

(d) Si les charges, q, sont placées aux sommets B et C au préalable, quel est le travail, W, qu'il faut «fournir» afin d'amener la charge $-2q$ depuis une position à l'infini jusqu'à sa position finale au sommet A. (préciser le signe).

$$W = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} V_{B+C}(A) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_B}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right\|} + \frac{q_C}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right\|}\right) = \frac{-4q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{-q^2}{\pi\epsilon_0 a}\text{J}$$

2. (4pts) Une charge surfacique s'étend sur un carré dans le plan $z = -3\text{m}$ défini par $-1\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$, $-1\text{m} \leq y \leq 1\text{m}$. La charge surfacique sur ce carré est non uniforme et décrite par la fonction :

$$\sigma(x,y) = \frac{2}{9}\left(x^2 + y^2 + 9\right)^{3/2} \text{nC.m}^{-2}$$



(a) En faisant appel aux symétries dans le problème, trouver la direction du champ, $\overrightarrow{\mathbf{E}}(z)$, pour tout point M se trouvant sur l'axe z.

Ce système **n'est pas axi-symétrique**, *mais chacun des plans xOz et yOz est un plan de symétrie du problème. Le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ doit donc se trouver dans chacun de ces plans ce qui impose que $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ soit être orienté sur l'axe Oz, c.-à-d. $\overrightarrow{\mathbf{E}}(z) = \widehat{\mathbf{z}}E(z)$.*

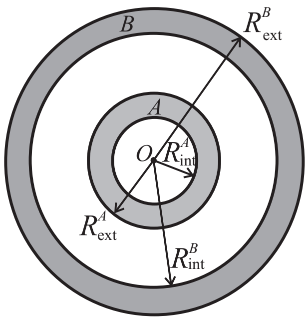
(b) Déterminer la valeur du champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ à l'origine du système de coordonnées (A.N.).

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint \frac{\sigma(x,y)\overrightarrow{\mathbf{PM}}}{PM^3}dS$$
$$\overrightarrow{\mathbf{PM}} = x\widehat{\mathbf{x}} + y\widehat{\mathbf{y}} + 3\widehat{\mathbf{z}} \qquad PM = \left(x^2 + y^2 + 9\right)^{1/2}$$

La composante du champ sur l'axe Oz, est donc :

$$
\begin{aligned}
E_z(z) = \widehat{\mathbf{z}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(x,y)\,\widehat{\mathbf{z}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{PM}}}{PM^3} dS = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \frac{\sigma(x,y)}{(x^2+y^2+9)^{3/2}} \\
&= 3 \times 9 \times 10^{-9} \times \frac{2}{9} \times 10^{-9} \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \frac{(x^2+y^2+9)^{3/2}}{(x^2+y^2+9)^{3/2}} = 6 \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \\
&= 6 \times 2 \times 2 = 24 \mathrm{V.m}^{-1}
\end{aligned}
$$

3. (8pts) On considère deux cylindres conducteurs creux,d'axe (Oz) de longeur, l, très long par rapport au rayon R^B_{ext} $\left(l \gg R^B_{\text{ext}}\right)$. Le cylindre de plus petit rayon est noté A, son rayon intérieur est R^A_{int} et son rayon extérieur est R^A_{ext} et il porte une charge $-Q$. De manière similaire, le cylindre de plus grand rayon est noté B, son rayon intérieur est R^B_{int} et son rayon extérieur est R^B_{ext} et il porte une charge $+2Q$.



   (a) Déterminer en justifiant si la distribution de charges est surfacique ou volumique à l'équilibre.

   La charge est surfacique car les charges sur un conducteur à l'équilibre se mettent toujours à la surface du conducteur.

   (b) Que vaut le champ électrique à l'intérieur des deux conducteurs ? (c.-à-d. quand $R^A_{\text{ext}} > \rho > R^A_{\text{int}}$ ou $R^B_{\text{ext}} > \rho > R^B_{\text{int}}$ en coordonnées cylindriques)

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\text{int}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

   car le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est toujours nul.

   (c) En déduire la répartition des charges sur chaque rayon et exprimer les densités de charges respectives.

   En conséquence de la symétrie sphérique du probléme, une charge $+Q$ est distribuée uniformément sur la surface R^B_{ext} avec une densité surfacique $\sigma_3 = \frac{Q}{2\pi l R^B_{\text{ext}}}$.

   Une charge $+Q$ est distribuée uniformément sur la surface R^B_{int} avec une densité surfacique $\sigma_2 = \frac{Q}{2\pi l R^B_{\text{int}}} = \sigma_3 \frac{R^B_{\text{ext}}}{R^B_{\text{int}}}$.

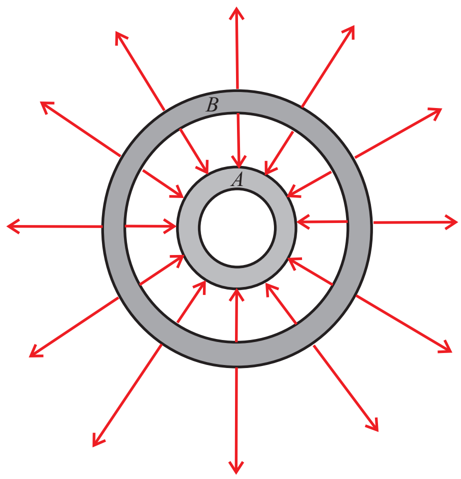
   Une charge $-Q$ est distribuée de façon uniforme sur la surface $\rho = R^A_{\text{ext}}$ avec une densité surfacique : $\sigma_1 = -\frac{Q}{2\pi l R^A_{\text{ext}}} = -\sigma_3 \frac{R^B_{\text{ext}}}{R^A_{\text{ext}}}$.

(d) En utilisant la densité de charges exprimée précédemment, exprimer le champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, dans tout l'espace.

En utilisant le théorème de Gauss et le fait que le champ à l'intérieur des conducteurs est nul, nous trouvons :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\rho) = \begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{0}} & \rho < R_{\text{ext}}^A \\ -\widehat{\rho}\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l\rho} = \widehat{\rho}\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\frac{R_{\text{ext}}^A}{\rho} & R_{\text{int}}^B > \rho > R_{\text{ext}}^A \\ \overrightarrow{\mathbf{0}} & R_{\text{ext}}^B > \rho > R_{\text{int}}^B \\ \widehat{\rho}\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l\rho} = \widehat{\rho}\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho} & \rho > R_{\text{ext}}^B \end{cases}$$

(e) Faire un schéma avec les lignes de champ électrique.



(f) Exprimer le potentiel électrique, $V(\rho)$, partout en prenant $V\left(R_{\text{ext}}^B\right) = 0$.

Quand $\rho > R_{\text{ext}}^B$, on obtient le potentiel $V(\rho)$ en prenant la circulation du champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ entre le conducteur B, $V_B = 0$, et un point M positionné à une distance ρ de l'axe des cylindres, c.-à-d. :

$$V(\rho) - V\left(R_{\text{ext}}^B\right) = \int_\rho^{R_{\text{ext}}^B} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_\rho^{R_{\text{ext}}^B} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\int_\rho^{R_{\text{ext}}^B}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho}$$

$$\Rightarrow V(\rho) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho} = R_{\text{ext}}^A\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho}$$

Pour $R_{\text{ext}}^B > \rho > R_{\text{int}}^B$, $V(\rho) = V_B = 0$

Quand $R_{\text{int}}^B > \rho > R_{\text{ext}}^A$, on obtient le potentiel $V(\rho)$ de nouveau en prenant la circulation du champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ entre le conducteur B, $V_B = 0$, et un point M positionné à une distance ρ de l'axe des cylindres :

$$V(\rho) - V\left(R_{\text{int}}^B\right) = \int_\rho^{R_{\text{int}}^B} \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_\rho^{R_{\text{int}}^B} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l\rho} d\rho = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\int_\rho^{R_{\text{int}}^B}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{int}}^B}{\rho}$$

$$\Rightarrow V(\rho) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{\rho}{R_{\text{int}}^B} = R_{\text{ext}}^B\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{\rho}{R_{\text{int}}^B}$$

Pour $\rho < R_{\text{ext}}^A$, $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\rho) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, et donc $V(\rho) = V\left(R_{\text{ext}}^A\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{ext}}^A}{R_{\text{int}}^B} = R_{\text{ext}}^B\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{R_{\text{ext}}^A}{R_{\text{int}}^B}$.
En sommaire :

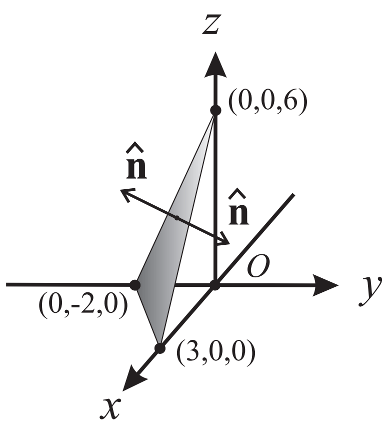
$$V(\rho) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho} = R_{\text{ext}}^B\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{R_{\text{ext}}^B}{\rho} & \rho > R_{\text{ext}}^B \\ 0 & R_{\text{ext}}^B > \rho > R_{\text{int}}^B \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{\rho}{R_{\text{int}}^B} = R_{\text{ext}}^B\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{\rho}{R_{\text{int}}^B} & R_{\text{int}}^B > \rho > R_{\text{ext}}^A \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{R_{\text{ext}}^A}{R_{\text{int}}^B} = R_{\text{ext}}^B\frac{\sigma_3}{\epsilon_0}\ln\frac{R_{\text{ext}}^A}{R_{\text{int}}^B} & \rho < R_{\text{ext}}^A \end{cases}$$

(g) Que devient le champ électrique si le rayon R_{int}^A tend vers 0 ? Comment appelle-t-on ce système ?
Rien ne change (ni $\overrightarrow{\mathbf{E}}(\rho)$, ni $V(\rho)$), et on appel ce système un câble co-axiale.

4. (4pts) Une charge surfacique uniforme, σ_0, couvre le plan infini donné par l'équation $2x - 3y + z = 6\text{m}$.
Rappel : Pour un plan d'équation $Ax + By + Cz = D$, les directions normales au plan sont définies par :

$$\widehat{\mathbf{n}} = \pm\frac{A\widehat{\mathbf{x}} + B\widehat{\mathbf{y}} + C\widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Le triangle formé par les intersections de ce plan avec les axes du système de coordonnées est illustré ci-dessous.



(a) Exprimer le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ à l'origine (amplitude et direction).
Le champ électrique est paraplléle à $\widehat{\mathbf{n}}$ de chaque côté du plan et sont amplitude est $||\overrightarrow{\mathbf{E}}|| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{E}}(O) &= -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{2\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{-2\widehat{\mathbf{x}} + 3\widehat{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{z}}}{\sqrt{14}}\text{V.m}^{-1}\end{aligned}$$