

1. **Calculs en électro-statique :** ($\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$)

(a) On considère un potentiel électrique :

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{K}{r^2} \sin^2 \theta$$

où K est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{E}(r, \theta, \phi)$, associé à $V(r, \theta, \phi)$ (voir formulaire au verso en cas de besoin).

(b) Une surface plane orientée $\vec{S} = S\hat{n}$, avec $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z)$, est immergée dans un milieu parcouru par une densité volumique de courant :

$$\vec{j} = j \frac{(\vec{u}_x - 2\vec{u}_z)}{\sqrt{5}}.$$

i) Déterminer le courant I traversant cette surface, en fonction de j et S . (Rappel : I est le flux de $\vec{j}$ à travers la surface orientée $\vec{S}$.)

ii) La surface S est située à l'intérieur d'un fil de cuivre. Sachant que la densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est $n_e \simeq 8.5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ et que la charge de l'électron vaut $q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, déterminer la vitesse moyenne des électrons, $\langle \vec{v}_e \rangle$, en mm.s^{-1} , en utilisant la relation $\vec{j} = n_e q_e \langle \vec{v}_e \rangle$.
Donnée numérique : $I = 10 \text{ A}$, $S = \sqrt{15} \text{ cm}^2$.

(c) On considère une région où le champ électrique s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x) = -3Ax^2 \vec{u}_x.$$

i) Quelle est la dimension de la constante A ?

ii) Déterminer le potentiel $V(x)$ dans cette région en prenant $V(x=0) = 0$.

iii) Déterminer la densité volumique de charge, $\rho_v(x)$, dans cette région.

2. **Condensateur et énergie :** Deux disques métalliques de rayon $R = 15 \text{ cm}$, séparés par une distance $d = 2 \text{ mm}$ dans l'air, forment un condensateur plan. On applique entre eux, grâce à un générateur une différence de potentiel $\Delta V = V_1 - V_2 = -12 \text{ V}$. On définit l'axe Oz comme étant perpendiculaire aux armatures. L'armature 1 est située dans le plan $z = 0$ et l'armature 2 dans le plan $z = +d$.

Pour toutes les sous-questions de cet exercice, répondre par une expression suivie de son application numérique (A.N.) avec les unités.

(a) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures et son A.N.

(b) Déterminer la densité de charge σ à la surface de l'armature 1 (A.N.).

(c) Écrire l'expression de la capacité du condensateur (avec justification si nécessaire) et donner sa valeur numérique.

(d) Calculer l'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur (A.N.).

(e) Le condensateur est déconnecté du générateur, on insère entre les armatures un diélectrique homogène d'indice de permittivité relative $\epsilon_r = 30$. Les charges sur les armatures restent donc fixées pendant cette opération. Déterminer le champ électrique entre les armatures après l'introduction du diélectrique (A.N.).

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \text{Formulaire : } \quad \vec{\text{grad}} f(r, \theta, \phi) &= \vec{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \text{div } \vec{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 A_r]}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r} A_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \vec{\text{rot}} \vec{A}(r, \theta, \phi) &= \frac{\vec{u}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] + \frac{\vec{u}_\phi}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial (A_r)}{\partial \theta} \right] \\ \Delta f(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

3. Deux charges ponctuelles : champ, énergie et moment dipolaire

Deux charges ponctuelles sont placées sur l'axe Ox : $q_1 = +q$ en $P_1(-d, 0, 0)$ et $q_2 = -q$ en $P_2(+d, 0, 0)$.
(Données numériques : $a = 3 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$ et $q = 20 \text{ nC}$)

On rappelle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$.

- Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$ au point $M(0, a, 0)$ et son A.N.
- Donner l'expression et la valeur numérique de l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_e$ du système.
- Déterminer le moment dipolaire $\vec{p}$ du système (expression et A.N.).
- Donner une expression du potentiel $V(x, 0, 0)$ le long de l'axe Ox , valable pour $-d < x < d$.
- Calculer la différence de potentiel $\Delta V_{AB} = V(A) - V(B)$ entre les points $A(-1, 0, 0)$, cm et $B(+1, 0, 0)$, cm.
- Une particule de masse $m = 4 \mu\text{g}$ et de charge $q_0 = 1.5 \text{ nC}$ est initialement au repos en $A(-1 \text{ cm})$. Quelle sera sa vitesse lorsqu'elle atteint le point $B(+1 \text{ cm})$?

4. Densité de charge et théorème de Gauss :

On considère une distribution de charge à symétrie sphérique dont le potentiel électrique, pour $r \leq a$, est donné par :

$$V_{r \leq a}(r) = -V_1 \frac{r^2}{a^2} + V_0,$$

où V_0 et V_1 sont des constantes positives. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique à la surface $r = a$.

- Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.
- En appliquant le théorème de Gauss sur une sphère de rayon a , déterminer la charge totale Q contenue dans la région $r \leq a$ (en fonction de a et V_1).
- Déduire de (a) la densité volumique de charge $\rho(r)$ pour $r \leq a$. (*Indice : utiliser $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$.*)
- Déterminer le potentiel électrique $V_{r \geq a}(r)$ pour la région extérieure ($r \geq a$), où il n'y a pas de charges (et en prenant $V(\infty) = 0$).
- En imposant la continuité du potentiel à $r = a$, exprimer V_0 en fonction de V_1 .