Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
6 novembre 2024
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (5 pts) **Condensateur et énergie :** Deux disques métalliques de rayon $R = 24\text{cm}$, séparés par une distance de $d = 1\text{mm}$ dans l'air, forment un condensateur plan. On applique une différence de potentiel de $\Delta V = V_1 - V_2 = 10\text{V}$, entre eux.
Pour toutes les sous questions de cet exercice, répondre avec une expression et l'application numérique avec unités.
   (a) Donner l'expression de $\vec{E}$ entre les armatures si on définit l'axe Oz comme étant perpendiculaire aux armatures (et A.N.).
   (b) Donner la densité de charge, σ à la surface de l'armature 1 (A.N.).
   (c) Écrire la capacité du condensateur avec son A.N. (la justification de cette formule n'est pas nécessaire si vous la connaissez déjà).
   (d) Trouver l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur.
   (e) Trouver la capacité du condensateur si l'on remplit l'espace entre les armatures du condensateur par un diélectrique de permittivité relative de $\varepsilon_r = 20$

2. (6 pt) **Calculs en électro-statique :**
   (a) (2 pts) On considère un potentiel électrique : $V(r,\theta,\phi) = \frac{C}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$ où C est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{E}(r,\theta,\phi)$, associé à $V(r,\theta,\phi)$.
   (b) (2 pts) Une surface orientée, $\vec{S} = S\hat{n}$, où $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{u}_x - \sqrt{2}\vec{u}_y + \sqrt{2}\vec{u}_z)$, est immergée dans un champ $\vec{E} = E\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_y - \vec{u}_z\right)$.
      i) Calculer le flux électrique, Φ_e à travers cette surface.
      ii) Spécifier l'unité de Φ_e.
   (c) (2 pts) On considère une région où le champ électrique s'écrit $\vec{E}(x) = 2Cx\vec{u}_x$.
      i) Quelle est la dimension de la constante C ?
      ii) Déterminer le potentiel $V(x)$ dans cette région en prenant $V(x=0) = 0$.
      iii) Déterminer la densité volumique de charge, $\rho_v(x)$ dans cette région.

   Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

Formulaire : $$\overrightarrow{\textbf{grad}} f(r,\theta,\phi) = \vec{u}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\text{div}\,\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

3. (6 pts) **Charges ponctuelles, énergie et moment dipolaire :** Deux charges ponctuelles sont fixées le long de l'axe Ox, l'une de charge $q_1 = q$, située en $P_1 = (x_1 = -d, y = 0, z = 0)$ et l'autre de charge $q_2 = -q$ située en $P_2(x_2 = d, 0, 0)$. Données numériques : $d = 3$cm, $q = 25$nC. *rappel* : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$ SI.

   (a) Donner l'expression du champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ au point $M = (0, y = a, 0)$. (avec A.N. $a = 4$cm)

   (b) Donner l'expression de l'énergie électrostatique, $\mathcal{E}_e$, de ces deux particules et ensuite son A.N. (commenter le signe de $\mathcal{E}_e$).

   (c) Donner l'expression du moment dipolaire électrique, $\vec{\boldsymbol{p}}$ et son A.N.

   (d) Donner l'expression du potentiel $V(x, 0, 0)$ le long de l'axe Ox en fonction de d et q (sans A.N.).

   (e) Donner l'A.N. de la différence de potentiel $\Delta V_{AB} = V(A, 0, 0) - V(B, 0, 0)$ entre un point A (x=-1cm) et un point B (x=+1cm)

   (f) Si une particule de masse m=5μg et charge q_0=2nC se déplace librement le long de l'axe Ox à partir d'un point A (x=-1cm) où elle se trouve au repos ($\vec{\boldsymbol{v}}_A = \vec{\boldsymbol{0}}$), jusqu'au point B (x=1cm). Donner sa vitesse, $\vec{\boldsymbol{v}}_B$, quand elle arrive au point B (Expression et A.N.).

4. (5 pts) **Densité, charge, et théorème de Gauss :** On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique donnée par $V_{r\leq a}(r) = -V_1\frac{r^4}{a^4} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$.

   (a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.

   (b) Quelle est la charge totale, Q, à l'intérieur de la sphère de rayon a ($\forall r \leq a$)) ? (fonction de a et V_1)

   (c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$. *Indice : référer à les formules situées en bas de la première page.*

   (d) En sachant qu'il n'y a pas de charges dans la région $r \geq a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r\geq a}(r)$, dans la région $r \geq a$.

   (e) Exprimer V_0 en fonction de a et Q (On prend $V(\infty) = 0$). (Indice : utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ et l'expression pour V_1 trouvée en (b)).