Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
8 novembre 2023
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (6 pts) Problèmes d'électrostatique
   (a) (1 pts) Une charge ponctuelle q est située à la position $P = (a/2, a/2, a/2)$, à l'intérieur d'un cube de côté $2a$ centré en O. Le flux du champ électrique, $\Phi_e = \oiint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}}$, créé par la charge à travers le cube est :
   i) 0
   ii) $q\epsilon_0$
   iii) $\frac{q}{\epsilon_0}$
   iv) on ne peut pas savoir

   (b) (2 pts) On considère un plan chargé infini de densité surfacique uniforme, σ_0, dans le plan (xOz) (c.-à-d. le plan de $y = 0$ avec normal, $\widehat{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{u}}_y$). Ce plan crée un champ $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ en tout point M de l'espace repéré par coordonnées cartésiennes (x, y, z).
   i) $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ ne dépend pas des coordonnées x et z (vrai/faux).
   ii) La composante $E_y(x, y, z)$ est fonction paire de la coordonnée y (vrai/faux).
   iii) Donner l'expression de $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace.

   (c) (2 pt) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(r, \theta, \phi) = C\frac{\cos\theta}{\epsilon_0 r^2}$ où C est une constante.
   i) Spécifier les dimensions de C.
   ii) Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(r, \theta, \phi)$, associé à $V(r, \theta, \phi)$.
   Rappel : En coordonnées sphériques on a :
$$\overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

   (d) (1 pt) Une surface orientée, $\vec{\boldsymbol{S}} = S\widehat{\boldsymbol{n}}$, où $\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\boldsymbol{u}}_x - \vec{\boldsymbol{u}}_y + \vec{\boldsymbol{u}}_z)$, est immergée dans un champ $\vec{\boldsymbol{E}} = E\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\boldsymbol{u}}_x - \vec{\boldsymbol{u}}_y)$.
   i) Calculer le flux électrique, Φ_e à travers cette surface.
   ii) Spécifier les unités de Φ_e.

2. (6 pts) Potentiel, conducteurs et condensateurs
   (a) (2 pt) On considère une région où le champ électrique s'écrit $\vec{\boldsymbol{E}}(x) = 3Cx^2\vec{\boldsymbol{u}}_x$.
   i) Quelle est la dimension de la constante C ?
   ii) Déterminer le potentiel $V(x)$ dans cette région en prenant $V(x = 0) = 0$.
   iii) Déterminer la densité volumique, $\rho_v(x)$ dans cette région.

   (b) (1 pt) Déterminer la capacité équivalente, C_{eq}, de deux condensateurs de 2μF et 3μF connectés en série.

   (c) (1 pt) On charge un condensateur plan, puis on l'isole électriquement. Ensuite on place un diélectrique entre les deux conducteurs. Sélectionner la bonne réponse pour les trois questions suivantes) :
   i) Les charges sur les plans conducteurs/armatures (diminuent, augmentent, restent inchangées).
   ii) La tension entre les deux conducteurs (diminue, augmente, reste inchangé).
   iii) La capacité du condensateur (diminue, augmente, reste inchangé).

   (d) (2 pt) On considère une distribution de charge linéique sur l'axe Oz entre $z = -a/2$ et $z = a/2$ avec une densité linéique $\lambda(z) = \lambda_0 \cos(\pi z/a)$:
   i) Déterminer la charge totale, Q_{tot}, de la tige.

3. (6 pts) **Charges et champs électrostatiques :**
On considère deux charges ponctuelles : $Q_1 = \frac{400}{3}\mu C$ à la position $P_1 = (2,7,3)$m et $Q_2 = -\frac{400}{3}\mu C$ à la position $P_2 = (8,7,11)$m. **Spécifier les unités et A.N. dans vos réponses**. rappel : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$SI.

   (a) (2 pts) Trouver le champ $\vec{\boldsymbol{E}}_1\,(P_2)$ créé par la particule 1 à la position de la particule 2.

   (b) (1 pts) Calculer la force $\vec{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\,(P_2)$ exercée sur la particule 2.

   (c) (1.5 pts) Trouver le moment dipolaire, $\vec{\boldsymbol{p}}$ de ce système.

   (d) (1.5 pts) Trouver l'énergie électrostatique potentielle, $\mathcal{E}_e$, du système.

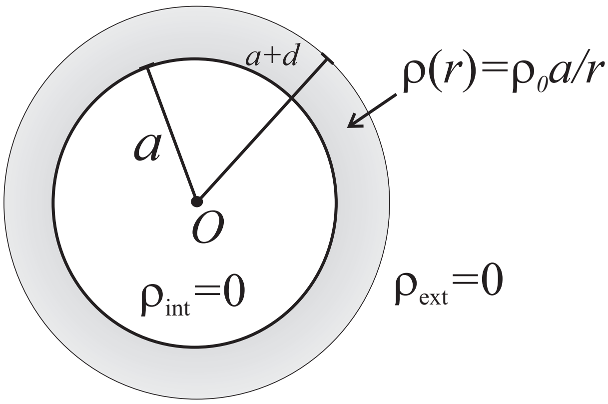

FIGURE 1 – (a) Coque de charge : vide pour $r < a$ et $r > a + d$, $\rho(r) = \rho_0 \frac{a}{r}$ pour $a < r < a + d$.

4. (6 pts) **Densité, charge, et théorème de Gauss :**
On considère une coque sphérique centrée sur O et de rayon intérieur, a (vide à l'intérieur), La densité de charge dans la coque, non-conductrice, dépend uniquement de la coordonnée radiale, r : $\rho(r) = \rho_0 \frac{a}{r}$ sur une épaisseur d (le tout placé dans le vide). Nous identifions tout point M dans l'espace par ses coordonnées sphériques (r,θ,ϕ). On adopte en chaque point le repère $(\vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{u}}_\phi)$.

   (a) (2 pts) Trouver la charge totale, Q_{tot}, de la coque de charge (c.-à-d. toute la charge dans la région $a < r < a + d$).

   (b) (0.5 pts) Justifier à partir de considérations d'invariance et de symétrie de la distribution de charges, que le champ électrostatique crée est de la forme $\vec{\boldsymbol{E}}(M) = E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r$, et donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r < a$.

   (c) (0.5 pt) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r > a + d$.

   (d) (1 pts) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $a < r < a + d$.

   (e) (2 pts) Trouver le potentiel électrique à la surface extérieure de la coque, $V(r = a+d)$, et en son centre, $V(0)$.