Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
6 novembre 2024
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (5 pts) **Condensateur et énergie :** Deux disques métalliques de rayon $R = 24$cm, séparés par une distance de $d = 1$mm dans l'air, forment un condensateur plan. On applique une différence de potentiel de $\Delta V = V_1 - V_2 = 10$V, entre eux.
Pour toutes les sous questions de cet exercice, répondre avec une expression et l'application numérique avec unités.

   (a) Donner l'expression de $\vec{\boldsymbol{E}}$ entre les armatures si on définit l'axe Oz comme étant perpendiculaire aux armatures (et A.N.).
   Solution : Puisque le champ est constant entre les armatures

$$|\vec{\boldsymbol{E}}|d = \Delta V \Longrightarrow |\vec{\boldsymbol{E}}| = \frac{\Delta V}{d} = \frac{10}{10^{-3}} = 10^4 \text{V.m}^{-1}$$

   On sait que le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ est perpendiculaire aux armatures, donc

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \pm \hat{\boldsymbol{u}}_z |\vec{\boldsymbol{E}}| \ .$$

   Nous ne connaissons pas le signe puisque l'énoncé indique seulement la différence de potentiel, sans spécifier quel armature a le plus grand grand potentiel.

   (b) Donner la densité de charge, σ à la surface de l'armature 1 (A.N.).
   Solution : Avec le théorème de Coulomb :

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow \sigma = \epsilon_0 |\vec{\boldsymbol{E}}| = \frac{4\pi\epsilon_0 |\vec{\boldsymbol{E}}|}{4\pi}$$
$$\Longrightarrow \sigma = \frac{10^4}{4\pi \times 9\,10^9} \simeq 8.84 \times 10^{-8} \text{C.m}^{-2}$$

   (c) Écrire la capacité du condensateur avec son A.N. (la justification de cette formule n'est pas nécessaire si vous la connaissez déjà).
   Solution :

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d} = \frac{\pi R^2 \epsilon_0}{d} = \frac{\pi 24^2 \epsilon_0}{10^{-3}} = 144 \times 4\pi\epsilon_0 \times 10^3 = \frac{144}{9 \times 10^9} \times 10^3 = 16 \times 10^{-6}\text{F} = 16\mu\text{F}$$

   (d) Trouver l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur.
   Solution :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{16 \times 10^{-6} \times 10^4}{2} = 8 \times 10^{-2}\text{J}$$

   (e) Trouver la capacité du condensateur si l'on remplit l'espace entre les armatures du condensateur par un diélectrique de permittivité relative de $\varepsilon_r = 20$
   Solution : La capacité est maintenant

$$C = \frac{S\varepsilon_r \epsilon_0}{d} = 320\mu\text{F}$$

2. (6 pt) **Calculs en électro-statique :**

(a) (2 pts) On considère un potentiel électrique : $V(r,\theta,\phi) = \frac{C}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$ où C est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi)$, associé à $V(r,\theta,\phi)$.

Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r,\theta,\phi) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}V(r,\theta,\phi) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\frac{C}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \end{bmatrix} \frac{C}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3C}{r^4}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ -\frac{C}{r^4}\left(6\cos\theta\sin\theta\right) \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3C}{r^4}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\widehat{\boldsymbol{r}} - \frac{C}{r^4}\left(6\cos\theta\sin\theta\right)\widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

(b) (2 pts) Une surface orientée, $\vec{\boldsymbol{S}} = S\widehat{\boldsymbol{n}}$, où $\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{\boldsymbol{u}}_x - \sqrt{2}\vec{\boldsymbol{u}}_y + \sqrt{2}\vec{\boldsymbol{u}}_z)$, est immergée dans un champ $\vec{\boldsymbol{E}} = E\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_y - \vec{\boldsymbol{u}}_z\right)$.

i) Calculer le flux électrique, Φ_e à travers cette surface.

Solution : Pour une surface plane, on a :

$$\Phi_e = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}} = ES \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -\frac{2SE}{\sqrt{5}}$$

ii) Spécifier l'unité de Φ_e.

Solution : Puisque le champ électrique a les dimensions de Vm^{-1} et le flux est obtenu en intégrant sur une surface de dimension m^2, le flux électrique a les dimensions de :

$$[\Phi_e] = \mathrm{V.m}^2.m^2 = \mathrm{V.m}$$

(c) (2 pts) On considère une région où le champ électrique s'écrit $\vec{\boldsymbol{E}}(x) = 2Cx\vec{\boldsymbol{u}}_x$.

i) Quelle est la dimension de la constante C ?

Solution : Puisque $\vec{\boldsymbol{E}}$ a les dimension de Vm^{-1} et x a les dimensions de m, la constante C doit avoir les unités de :

$$[C] = \mathrm{V.m}^{-2}$$

ii) Déterminer le potentiel $V(x)$ dans cette région en prenant $V(x=0) = 0$.

Solution :

$$V(x) - V(0) = \int_x^0 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$$
$$= \int_x^0 2Cx'\widehat{\boldsymbol{x}} \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}dx' = \int_x^0 2Cx'dx' = -Cx^2 \ \mathrm{V} \Longrightarrow V(x) = V(0) - Cx^2$$

iii) Déterminer la densité volumique de charge, $\rho_v(x)$ dans cette région.

Solution : Nous avons le choix d'utiliser soit l'équation de Poisson, $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ou la loi de Gauss, $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Dans les deux cas de figure :

$$\rho = -\epsilon_0\Delta V = \epsilon_0\frac{d^2}{dx^2}Cx^2$$
$$\rho = \epsilon_0\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \epsilon_0\frac{dE_x}{dx} = \epsilon_0\frac{d(2Cx)}{dx} = 2C$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\text{Formulaire :}\qquad \overrightarrow{\mathbf{grad}} f(r,\theta,\phi) = \vec{\boldsymbol{u}}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{\boldsymbol{u}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{A}}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 A_r\right]}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r}A_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\boldsymbol{A}}(r,\theta,\phi) = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta f(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

3. (6 pts) **Charges ponctuelles, énergie et moment dipolaire :** Deux charges ponctuelles sont fixées le long de l'axe Ox, l'une de charge $q_1 = q$, située en $P_1 = (x_1 = -d, y = 0, z = 0)$ et l'autre de charge $q_2 = -q$ située en $P_2(x_2 = d, 0, 0)$. Données numériques : $d = 3$cm, $q = 25$nC. *rappel* : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$ SI.

   (a) Donner l'expression du champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ au point $M = (0, y = a, 0)$. (avec A.N. $a = 4$cm)

   Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1\overrightarrow{\boldsymbol{P_1M}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1M}}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2\overrightarrow{\boldsymbol{P_2M}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{P_2M}}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1(d,a,0)}{(a^2+d^2)^{3/2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2(-d,a,0)}{(a^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{q_1 d}{(a^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q_2 d}{(a^2+d^2)^{3/2}}\\ \frac{q_1 a}{(a^2+d^2)^{3/2}} + \frac{q_2 a}{(a^2+d^2)^{3/2}}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+d^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}2d\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{A.N.}}{=} \frac{25\,10^{-9}}{4\pi\epsilon_0}\frac{0.06}{|0.05|^3}\widehat{\boldsymbol{x}} = \frac{25\,10^{-9}\times 9\,10^9}{10^{-4}}\frac{6}{5^3}\widehat{\boldsymbol{x}} = \frac{54}{5}\times 10^4\widehat{\boldsymbol{x}} = 108\times 10^3\widehat{\boldsymbol{x}}\text{V.m}^{-1}$$

   (b) Donner l'expression de l'énergie électrostatique, $\mathcal{E}_e$, de ces deux particules et ensuite son A.N. (commenter le signe de $\mathcal{E}_e$).

   Solution :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}|} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d} = -9\,10^9\frac{(25\,10^{-9})^2}{6\,10^{-2}} = \frac{3\times 5^4}{2}\times 10^{-7} = -9.375\times 10^{-5}\text{J}$$

   Cette énergie potentielle électrique est négative. Ceci implique que ces deux particules sont électriquement liés. Ceci veut dire qu'il faut fournir l'énergie afin de séparer ces particules.

   (c) Donner l'expression du moment dipolaire électrique, $\vec{\boldsymbol{p}}$ et son A.N.

   Solution :

$$\vec{\boldsymbol{p}} = q_1\overrightarrow{\boldsymbol{OP_1}} + q_2\overrightarrow{\boldsymbol{OP_2}} = q\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_1}} = -25\,10^{-9}\times 6\,10^{-2}\widehat{\boldsymbol{x}} = -1.5\,10^{-9}\widehat{\boldsymbol{x}}\text{C.m}$$

   (d) Donner l'expression du potentiel $V(x,0,0)$ le long de l'axe Ox en fonction de d et q (sans A.N.).

   Solution :

$$V(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i}{P_iM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x+d|} - \frac{1}{|x-d|}\right)$$

   (e) Donner l'A.N. de la différence de potentiel $\Delta V_{AB} = V(A,0,0) - V(B,0,0)$ entre un point A (x=-1cm) et un point B (x=+1cm)

   Solution :

$$V(A,0,0) = \frac{9\,10^9\times 25\,10^{-9}}{10^{-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{225}{4}\times 10^2 = 5625\,\text{V}$$

$$V(B,0,0) = \frac{9\,10^9\times 25\,10^{-9}}{10^{-2}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -5625\,\text{V}$$

$$\Longrightarrow V(A,0,0) - V(B,0,0) = \frac{225}{2}\times 10^2 = 11250\text{V}$$

(f) Si une particule de masse m=5μg et charge q_0=2nC se déplace librement le long de l'axe Ox à partir d'un point A (x=-1cm) où elle se trouve au repos ($\vec{\boldsymbol{v}}_A = \vec{\boldsymbol{0}}$), jusqu'au point B (x=1cm). Donner sa vitesse, $\vec{\boldsymbol{v}}_B$, quand elle arrive au point B (Expression et A.N.).
Solution :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{U} &= q_0\,(V_B - V_A) = -11250 \times 2\,10^{-9}\text{J} = -2.25\,10^{-5}\text{J}\ .\\ \Delta\mathcal{T} &= \mathcal{T}_{\text{fin}} - \mathcal{T}_{\text{init}} = -\Delta\mathcal{U} = 2.25\,10^{-5}\text{J}\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{T}_{\text{fin}} = 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \Delta\mathcal{T} = 2.25\,10^{-5}\text{J}\ .\\ \Longrightarrow v &= \sqrt{\frac{2\Delta\mathcal{T}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 2.25\,10^{-5}}{5\times 10^{-6}}} \simeq 3\,\text{m.s}^{-1}\\ \vec{\boldsymbol{v}} &= 3\hat{\boldsymbol{x}}\text{m.s}^{-1}\end{aligned}$$

4. (5 pts) **Densité, charge, et théorème de Gauss :** On considère un système à symétrie sphérique, avec un potentiel électrique donnée par $V_{r\leq a}(r) = -V_1\frac{r^4}{a^4} + V_0$ dans la région $r \leq a$. On suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique en $r = a$.

(a) Trouver le champ électrique dans la région $r \leq a$.
Solution :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1(M) = -\overrightarrow{\textbf{grad}}V_{r\leq a}(r) = V_1\frac{4r^3}{a^4}\vec{\boldsymbol{u}}_r \equiv E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r\ [\text{V.m}^{-1}] \qquad r \leq a\ .$$

(b) Quelle est la charge totale, Q, à l'intérieur de la sphère de rayon a ($\forall r \leq a$)) ? (fonction de a et V_1)
Solution :

$$\begin{aligned}\oiint_{r=a}\vec{\boldsymbol{E}}_1(M)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} &= \oiint_{r=a} V_1\frac{4a^3}{a^4}\vec{\boldsymbol{u}}_r\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_r dS = V_1\frac{3a^2}{a^3}\oiint_{r=a} dS\\ &= V_1\frac{4a^2}{a^4}4\pi a^2 = V_1 16\pi a = \frac{Q_{r\leq a}}{\epsilon_0} \Longrightarrow Q = Q_{r\leq a} = V_1 16\pi\epsilon_0 a\ [\text{V.m}]\ .\end{aligned}$$

(c) Déterminer la densité de charge électrique $\rho(r)$ dans la région $r \leq a$. *Indice : référer à les formules situées en bas de la première page.*
Solution :

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2E_r\right]}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2V_1\frac{4r^3}{a^4} = \frac{4V_1}{a^4r^2}\frac{d}{dr}r^5 = \frac{20V_1}{a^4}r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \text{ou}\quad \Delta V(r) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}V_1\frac{r^4}{a^4} = -20V_1\frac{r^2}{a^4} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ &\Longrightarrow \rho(r) = \epsilon_0\frac{20V_1}{a^4}r^2\ [\text{C.m}^{-3}]\ .\end{aligned}$$

On peut vérifier la densité, $\rho(r)$, en calculant la charge totale de la région $r \leq a$:

$$Q = \iiint \rho(r)\,d\mathcal{V} = 4\pi\int_0^a \rho(r)r^2dr = 4\pi\epsilon_0\frac{20V_1}{a^4}\int_0^a r^4dr = 4\pi\epsilon_0\frac{20V_1}{a^4}\frac{a^5}{5}\ [\text{C}]\ .$$

(d) En sachant qu'il n'y a pas de charges dans la région $r \geq a$, donner l'expression du potentiel électrique, $V_{r\geq a}(r)$, dans la région $r \geq a$.
Solution : Compte tenue de la théorème de Gauss sur une sphère à rayon $r > a$, on a

$$\oiint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 4\pi r^2E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{E}}(r) = E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Le potentiel dans la région $r \geq a$ est donc :

$$V_{r\geq a}(r) = \int_{r\geq a}^{\infty}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r\geq a}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = V_1\frac{4a}{r}\ [\text{V}]\ .$$

(e) Exprimer V_0 en fonction de a et Q (On prend $V(\infty) = 0$). (Indice : utiliser la continuité du potentiel électrique en $r = a$ et l'expression pour V_1 trouvée en (b)).

Solution : Le résultat de 2(b) exprime V_1 en fonction de Q (et vice versa) :

$$Q = V_1 16\pi\epsilon_0 a \Longrightarrow V_1 = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a} \Longrightarrow Q = V_1 16\pi\epsilon_0 a$$

La continuité du potentiel à la surface de la sphère nous donne :

$$V_{r\leq a}(a) = -V_1 + V_0 = V_{r\geq a}(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = 4V_1$$

$$\Longrightarrow V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a} = \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 a} = 5V_1 \text{ [V]} .$$

Ceci nous permet d'exprimer le potentiel partout (pas demandé dans l'exercice) :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a}\frac{r^4}{a^4} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{5a^4 - r^4}{a^4}\right) = V_1\left(\frac{5a^4 - r^4}{a^4}\right) & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 4V_1\frac{a}{r} & r \geq a \end{cases} .$$