Examen de Électromagnétisme - PEIP 2
22 novembre 2019
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

$$m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}\text{kg} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ F.m}^{-1} \quad , \quad 1\text{D} \simeq 3,336 \times 10^{-30}\text{Cm} \quad , \quad q_e \simeq -1,6 \times 10^{-19}\text{C}.$$

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\left(f\left(r,\theta,\phi\right)\right) = \vec{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{A}\left(r,\theta,\phi\right) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi \sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$

1. **Opérateurs en repérage sphérique et dipôle électrique**
En coordonnées sphériques, calculer :

(a) $\overrightarrow{\textbf{rot}}\left(\vec{u}_\phi\right)$.
On $A_\phi = 1$, et $A_r = A_\theta = 0$.

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{A}\left(r,\theta,\phi\right) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(\sin\theta\right)}{\partial\theta}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[-\frac{\partial\left(r\right)}{\partial r}\right]$$
$$= \frac{\vec{u}_r}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\vec{u}_\theta}{r} = \frac{\vec{u}_r}{r}\cot\theta - \frac{\vec{u}_\theta}{r}$$

(b) $\overrightarrow{\textbf{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

(c) $\overrightarrow{\textbf{grad}}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\theta}{r^2} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}$$
$$= -\vec{u}_r 2\cos\theta \frac{1}{r^3} - \vec{u}_\theta \frac{\sin\theta}{r^3}$$

Vous avez vu encours que le champ électrique d'un dipôle électrique de moment, $\vec{p}$, s'écrit :

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{u}_r\right)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

(d) Trouver l'expression pour la force sur une particule de charge q situé à une distance d sur l'axe du dipôle.
Sur l'axe du dipôle $\left(\vec{p}\cdot\vec{u}_r\right) = p$

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\left(\vec{p}\cdot\vec{u}_r\right)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\vec{p}}{d^3}$$
$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = q\vec{E}\left(\vec{r}\right) \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q\vec{p}}{d^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qp}{d^3}\widehat{\boldsymbol{p}}$$

(e) A.N. Une molécule d'eau avec $p = 1.85$D (Debye), avec q celui d'un ion sodium Na^+, et $d = 10$nm.
Spécifier sous quelles conditions cette force est attractive, soit répulsive.

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qp}{d^3}\widehat{\boldsymbol{p}} = \widehat{\boldsymbol{p}}\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 3,336 \times 10^{-30}}{10^{-24}} \simeq \widehat{\boldsymbol{p}}1.07 \times 10^{-21}\text{N}$$

Préciser les conditions pour lesquelles cette force est attractive (répulsive).
Sur l'axe du dipôle, le champ électrique est toujours dans le sens de $\widehat{\boldsymbol{p}}$. Par conséquent, la force est répulsive si $\widehat{\boldsymbol{p}}$ point vers l'ion de Na^+ et attractive si $\widehat{\boldsymbol{p}}$ point dans le sens opposée de l'ion de Na^+.

2. **Condensateur et énergie :** Deux disques métalliques dans l'air de rayon 12cm et distants de 1mm forment un condensateur plan. On charge l'ensemble sous une tension de 10V. *Pour toutes les sous questions ici, répondre avec une expression et l'application numérique avec unités.*

   (a) Trouver le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ entre les armatures.

   $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{U}{d} = \frac{10}{10^{-3}} = 10^4 \text{V.m}^{-1}$$

   (b) Trouver la capacité du condensateur.

   $$S = \pi R^2 = \pi 12^2 \times 10^{-4} \text{m}^2$$
   $$C = \frac{S\epsilon_0}{d} = \frac{\pi \times 3^2 \times 4 \times 4\pi\epsilon_0 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = \frac{9 \times 4 \times 10^{-4}}{9 \times 10^9 \times 10^{-3}}$$
   $$= 4 \times 10^{-10} \text{F} .$$

   (c) Quel est l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur ?

   $$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} 4 \times 10^{-10} \times 100 = 2 \times 10^{-8} \text{J} .$$

   (d) Trouver la capacité du condensateur si on remplit l'espace entre les condensateurs par un diélectrique de permittivité relative de $\varepsilon_r = 20$.

   $$C = \frac{S\varepsilon_r\epsilon_0}{d} = \varepsilon_r \frac{S\epsilon_0}{d} = 8 \times 10^{-6} \text{F}$$

   (e) Un électron éjecté de l'un des disques est accéléré par le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ du condensateur. Trouver la vitesse approximative de l'électron quand il arrive au disque opposé.

   $$\mathcal{E} = q_e 10V = 10\text{eV} = 1,602 \times 10^{-18} \text{J} = \frac{1}{2} m_e v^2$$
   $$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_e}} = 1.8 \times 10^6 \text{m.s}^{-1}$$

3. **Calcul de flux**. Soit un cylindre de centre O, d'axe $(O, \vec{\boldsymbol{u}}_z)$, de hauteur $2a$ et de rayon a, constituant une surface fermée (Σ).

   (a) En coordonnées cylindriques, exprimer le vecteur $\vec{\boldsymbol{r}}$ et sa module, r, entre l'origine et un élément de surface d'une base, $\vec{dS} = \rho d\rho d\phi \vec{\boldsymbol{n}}$, situé à un distance ρ de l'axe Oz.

   $$\vec{\boldsymbol{r}} = a\vec{\boldsymbol{u}}_z + \rho\vec{\boldsymbol{u}}_\rho$$
   $$r = \sqrt{\rho^2 + a^2} .$$

   (b) Calculer de manière directe le flux, Φ_b, à travers une des bases du cylindre du champ électrostatique, $\vec{\boldsymbol{E}}$, créé par une charge ponctuelle q située en O. Avec le passage de coordonnées sphériques en coordonnées cylindriques :

   $$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{\boldsymbol{r}} \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + a^2)^{3/2}} (a\vec{\boldsymbol{u}}_z + \rho\vec{\boldsymbol{u}}_\rho)$$

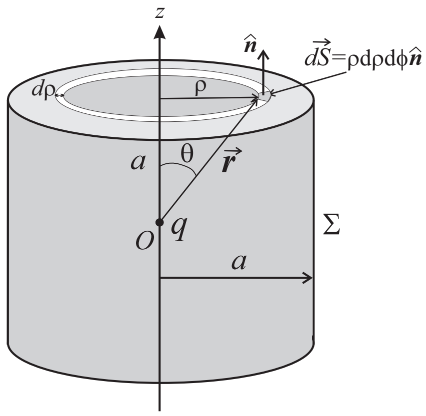
   L'élément de surface, $\vec{d\boldsymbol{S}}$ de la base s'écrit :

   $$\vec{d\boldsymbol{S}} = \widehat{\vec{\boldsymbol{n}}} dS = 2\pi\rho d\rho \vec{\boldsymbol{u}}_z .$$

   $$\Phi_b = \iint_{S_b} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + a^2)^{3/2}} (a\vec{\boldsymbol{u}}_z + \rho\vec{\boldsymbol{u}}_\rho) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_z$$
   $$= \frac{qa}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{qa}{2\epsilon_0} \int_a^{a\sqrt{2}} \frac{udu}{u^3} = \frac{qa}{2\epsilon_0} \int_a^{a\sqrt{2}} u^{-2} du$$
   $$= -\frac{qa}{2\epsilon_0} \left[u^{-1}\right]_a^{a\sqrt{2}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

   où nous avons effectué fait le changement de variable :

   $$u^2 = \rho^2 + a^2 \qquad udu = \rho d\rho$$



(c) A partir du théorème de Gauss (et le flux Φ_b à travers une base calculé en (a)), en déduire le flux électrique à travers la surface latérale du cylindre, Φ_l, en fonction de q. (**n.b.** vous pouvez exprimer Φ_l en fonction de Φ_b même si vous n'avez pas réussi l'exercice 3.(a)).

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\epsilon_0} = \Phi_l + 2\Phi_b \Longrightarrow \Phi_l = \frac{q}{\epsilon_0} - 2\Phi_b$$

Avec le résultat du flux, Φ_b trouvé en (b) on a :

$$\begin{aligned}\Phi_l &= \frac{q}{\epsilon_0} - \frac{q}{\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{q}{\epsilon_0\sqrt{2}} \\ &= \frac{q}{2\epsilon_0}\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

4. **Résistivité :**
Un fil de cuivre de section 2,5mm^2 et de longueur 200m, est parcouru par un courant d'intensité 2A. La conductivité du cuivre est égale à $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 5,8 \times 10^7 \mathrm{S.m}^{-1}$. *Pour toutes les sous questions ici, répondre avec une expression et l'application numérique avec unités.*

(a) Dans 1s, combien d'électrons traverse une section donnée du fil ?
Pour un courant de 1A on a 1C de charge qui traverse une section du fil dans 1s. Le nombre d'électrons est donc :

$$N_e = \frac{1}{q_e} = 1,25 \times 10^{19} \qquad \text{électrons.}$$

(b) Trouver la résistance du fil.

$$R = \frac{L}{\gamma_{\mathrm{Cu}} S} = \frac{200}{5,8 \times 10^7 \times 2,5 \times 10^{-6}} = 1.38\Omega$$

(c) Trouver la différence de potentiel entre les deux bouts du fil.

$$U = IR = 2.76\mathrm{V}$$

(d) Trouver la densité volumique, $j_e = \left|\vec{j}_e\right|$, des électrons dans le fil.

$$j_e = \frac{I}{S} = \frac{2}{2,5 \times 10^{-6}} = 8 \times 10^5 \mathrm{C.m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$

(e) Sachant que la densité volumique d'électrons dans le cuivre est $n_e \simeq 8 \times 10^{28} \mathrm{m}^{-3}$, quelle est la vitesse moyenne des électrons dans le fil.

$$\begin{aligned} j_e &= q_e n_e \langle v_e \rangle \\ \langle v_e \rangle &= \frac{j_e}{q_e n_e} = \frac{8 \times 10^5}{1,6 \times 10^{-19} \times 8 \times 10^{28}} \\ &= \frac{10^6}{4 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^{28}} = \frac{1}{16} \times 10^{-3} \\ &= 0.062 \times 10^{-3} = 6.2 \times 10^{-5} \mathrm{m.s}^{-1}\end{aligned}$$