Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
14 novembre 2016
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

1. **(4pts) Questions courtes :**
   (a) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(x,y,z) = -Cxy^2$ où C est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{E}(x,y,z)$, associé.

$$\vec{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\vec{u}_x\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{u}_y\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{u}_z\frac{\partial V}{\partial z} = Cy^2\vec{u}_x + 2Cxy\vec{u}_y \ .$$

   (b) Si les coordonnées x et y ont les dimensions de mètres, quelle doivent être les dimensions S.I. de la constante C dans l'exercice précédent.

$$[C] = \text{V.m}^{-3} \ .$$

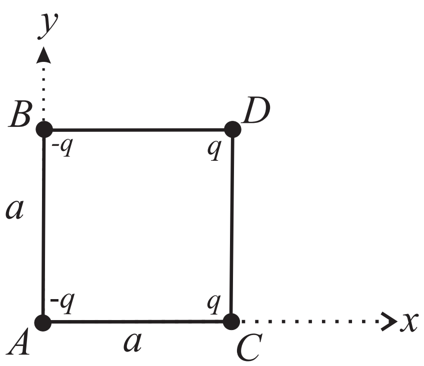
   (c) Un champ électrique dans une région de l'espace est de la forme $\vec{E}(x,y,z) = C_x\vec{u}_x + C_y y\vec{u}_y + C_z z^2\vec{u}_z$, où C_x, C_y et C_z, sont des constantes ayant des unités appropriées. Trouver la distribution de charge associée avec ce champ.

$$\begin{aligned}\rho(x,y,z) = \epsilon_0 \,\text{div}\,\vec{E} &= \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right)\\ &= \epsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}C_x + \frac{\partial}{\partial y}C_y y + \frac{\partial}{\partial z}C_z z^2\right)\\ &= \epsilon_0\left(C_y + C_z 2z\right) \ .\end{aligned}$$

   (d) Considérer un champ électrique constant, $\vec{E} = E_0\vec{u}_x + E_0\vec{u}_y$. Trouver le flux du champ électrique à travers une surface d'aire égale à S et orientée avec une normale à la surface, $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y$.

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \iint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \iint \left(E_0\vec{u}_x + E_0\vec{u}_y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y\right)dS\\ &= E_0\frac{1+\sqrt{3}}{2}\iint dS = E_0\frac{1+\sqrt{3}}{2}S \ .\end{aligned}$$

2. (5pts) On considère un système de 4 charges ponctuelles posées aux sommets (A,B,C,D) d'un carré de côté, a, avec des charges respectives aux sommets $-q$,$-q$, q et q (voir la figure). **Exprimer vos réponses à (a)-(d) ci-dessous en fonction de : q, ϵ_0, et a , et spécifier les unités des réponses.**



   (a) Trouver la force (en coordonnées cartésiennes) sur la charge q au sommet D.

$$\vec{F}_{\to q_D} = \frac{q_B q_D}{4\pi\epsilon_0 BD^3}\overrightarrow{BD} + \frac{q_C q_D}{4\pi\epsilon_0 CD^3}\overrightarrow{CD} + \frac{q_A q_D}{4\pi\epsilon_0 AD^3}\overrightarrow{AD} \ .$$

On prend les distances et vecteurs déduites de la figure :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{BD}} &= BD\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x = a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \\
\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} &= CD\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y = a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y \\
\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} &= a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y = AD\left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}a\left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y}{\sqrt{2}}\right) \ ,
\end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\to q_D} &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2^{3/2}a^2}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right) \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right)\mathrm{N} \ .
\end{aligned}$$

(b) Quel est le potentiel électrique, V_D, à la position D, produit par les charges aux sommets A, B et C ? (n.b. : le potentiel V_D ne tient pas compte de la charge à la position D.)

$$\begin{aligned}
V_D &= \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 AD} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 BD} + \frac{q_C}{4\pi\epsilon_0 CD} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}a} + \frac{-q}{a} + \frac{q}{a}\right) \\
&= \frac{-q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 2a}\mathrm{V} \ .
\end{aligned}$$

(c) Trouver le moment dipolaire du système entier , $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1} q_i\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_i$, en coordonnées cartésiennes. (On se rappelle que $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ ne dépend pas du choix d'origine - puisque la charge totale est nulle).

Si on prend simplement l'origine à la position A, on a

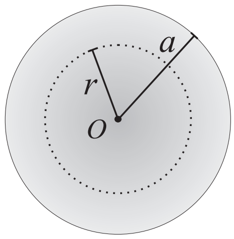
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{p}} &= q_B\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + q_C\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + q_D\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} \\
&= -qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + q\left(a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + a\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y\right) \\
&= -qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x + qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_y \\
&= 2qa\overrightarrow{\boldsymbol{u}}_x \ \mathrm{C.m} \ .
\end{aligned}$$

Bien entendu, on obtient le même résultat avec n'importe quel choix d'origine.

3. (7 pts) **Champ électrostatique**

L'intérieur d'une sphère de rayon a, contient une distribution de charge volumique variable :

$$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \rho_0\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)\right] & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases}$$



où ρ_0 est une constante et r est la coordonnée radiale en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ). **Indice :** on se rappelle que l'élément de volume en coordonnées sphériques s'écrit $d\mathcal{V} = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$.

(a) Déterminer la charge contenue dans une sphére de rayon $r < a$.

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{int}}(r) &= \iiint \rho(r)d\mathcal{V} = 4\pi\rho_0\int_0^r r^2\left(1-\frac{r}{a}\right)dr \\
&= 4\pi\rho_0\int_0^r r^2 dr - 4\pi\rho_0\int_0^r r^2\left(\frac{r}{a}\right)dr \\
&= \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 - \frac{4\pi\rho_0}{a}\int_0^r r^3 dr \\
&= \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 - \frac{4\pi\rho_0}{a}\frac{r^4}{4} \\
&= 4\pi\rho_0 r^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{r}{a}\right] \ .
\end{aligned}$$

(b) Déterminer la charge totale de la sphère de rayon a.

$$Q_{\rm int}\left(a\right) = 4\pi\rho_0 a^3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{\rho_0 a^3\pi}{3}\ .$$

(c) Quelle est la symétrie du système ? Quelles sont les invariances ?

Le sytème a une symétrie sphérique et par conséquent invariant par rapport à translations (rotations) en θ et ϕ. Le champ électrique est dans la direction radiale partout puisque $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$ doit se trouver dans tous les plans de symétrie du système, et ne peut que dépendre de la coordonnée r à cause des invariances, c.-à-d. $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(r,\theta,\phi\right) = E_r\left(r\right)\widehat{\boldsymbol{r}}$.

(d) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace (c.-à-d. quand $r < a$ et quand $r > a$) en faisant appel au théorème de Gauss.

Pour un système à symétrie sphérique, le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(r,\theta,\phi\right) = E_r(r)\widehat{\boldsymbol{r}}$, et le flux électrique à travers une surface sphérique de rayon r (et de normale $\widehat{\boldsymbol{n}} = \widehat{\boldsymbol{r}}$) est :

$$\iint \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}}dS = \iint E_r(r)\widehat{\boldsymbol{r}}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}}dS = E_r(r)\iint dS = E_r(r)4\pi r^2\ .$$

On obtient le champ électrique donc avec le théorème de Gauss :

$$\begin{cases} E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\rm int}(a)}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a^3\pi}{3} & r > a \\ E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\rm int}(r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{r}{a}\right] & r < a \end{cases}\ ,$$

ce qui nous donne pour $E_r(r)$:

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{Q_{\rm int}(a)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r^2} & r > a \\ E_r(r) = \frac{Q_{\rm int}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{r}{a}\right] & r < a \end{cases}\ .$$

(e) Déterminer le potentiel électrostatique, $V(r)$, en tout point de l'espace avec l'état de référence $V(\infty) = 0$.

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{d\boldsymbol{\ell}} = \int_r^\infty E_r(r)dr = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 r}\ , \qquad r > a\ .$$

On peut obtenir le potentiel à la surface de la sphère en prenant la limite à $r \to a^+$

$$V\left(a\right) = V\left(r\to a^+\right) = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}\ .$$

On peut maintenant obtenir le potentiel à l'intérieur de la sphère ($r < a$)

$$\begin{aligned} V(r) - V(a) &= \int_r^a \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\cdot\overrightarrow{d\boldsymbol{\ell}} = \int_r^a \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{r}{a}\right]dr \qquad r < a \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\int_r^a r\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{r}{a}\right]dr \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\int_r^a rdr - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 a}\int_r^a r^2 dr \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(a^2-r^2\right) - \frac{\rho_0}{12\epsilon_0 a}\left(a^3-r^3\right) \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3}\left(\frac{r}{4a}-1\right) + \frac{3}{4}\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\ . \end{aligned}$$

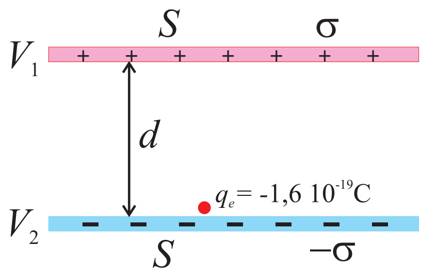
Le potentiel à l'intérieur de la sphère est donc,

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3}\left(\frac{r}{4a}-1\right) + \frac{3}{4}\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0} + V(a) \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3}\left(\frac{r}{4a}-1\right) + \frac{3}{12}\frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^2}{3}\left(\frac{r}{4a}-1\right) + \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0} \qquad r < a\ . \end{aligned}$$

On peut bien vérifier que le potentiel est continu à la surface de la sphère puisque dans la limite à $r \to a^-$:

$$V(a) = V\left(r \to a^-\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{a^2}{3}\frac{3}{4} + \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \; .$$

4. (6 pts) On considère un condensateur plan dans le vide tenu à une différence de potentiel de $U = V_1 - V_2 =$ 100V. La surface de chaque armature est $S = \pi \times 900\text{cm}^2$, et les armatures sont séparées par une distance de $d = 5$mm. (A.N. et unités pour toutes les questions)



(a) Quelle est la capacité de ce condensateur ?

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d} = \frac{\pi \times 900\left(10^{-2}\right)^2}{5\,10^{-3}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \times 9\,10^{-2}}{20}10^3 \simeq \frac{9\,10}{9\,10^9 \times 20} = \frac{1}{2}10^{-9}\text{F} = \frac{1}{2}\text{nF} \; .$$

(b) Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}$, entre les deux armatures.

Si on défini $\widehat{\boldsymbol{z}}$ comme la direction verticale positive, on peut écrire le champ $\vec{\boldsymbol{E}} = -E\widehat{\boldsymbol{z}}$ et déterminer son amplitude avec la relation :

$$U \equiv V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = El \Longrightarrow E = \frac{U}{l} = \frac{10^2}{510^{-3}} = 10\frac{10^4}{5} = 2 \times 10^4\text{V.m}^{-1} \; .$$

(c) Trouver la densité surfacique de charge, σ, sur les armatures et le déplacement électrique $\vec{\boldsymbol{D}}$ entre les deux armatures.

Par le théorème de coulomb, on sait que

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| = E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow \sigma = \epsilon_0 E = \frac{4\pi\epsilon_0 E}{4\pi} = \frac{2}{4\pi}\frac{10^4}{9109} = \frac{10^{-5}}{18\pi}\text{C.m}^{-2} \; .$$

$$\Longrightarrow \sigma \simeq 1,77 \times 10^{-7}\text{C.m}^{-2}$$

Dans le vide, $\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\vec{\boldsymbol{E}}$, et donc,

$$\left|\vec{\boldsymbol{D}}\right| = \sigma = \frac{10^{-5}}{18\pi}\text{C.m}^{-2} \simeq 1,77 \times 10^{-7}\text{C.m}^{-2} \; .$$

(d) On considère un électron ejecté de l'armature à potentiel électrique V_2, avec une vitesse initiale nulle ($\vec{\boldsymbol{v}}_e = \vec{\boldsymbol{0}}$) à l'instant $t = 0$. Ecrire l'équation de mouvement de cet électron et déterminer sa vitesse et énergie cinétique juste avant qu'il entre en contact avec l'armature de potentiel V_1. (on prend $q_e \simeq -1,6\,10^{-19}$C et $m_e \simeq 9\,10^{-31}$kg).

L'équation du mouvement de l'électron est :

$$m_e\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}_e(t) = q_e\vec{\boldsymbol{E}}$$

avec conditions initiales

$$\boldsymbol{v}_e(t=0) = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad\qquad z_e(t=0) = 0 \; ,$$

en prenant $\widehat{\boldsymbol{z}}$ comme la direction perpendiculaire aux armatures avec $z = 0$ sur armature 2.

La vitesse l'électron en fonction du temps est donc :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_e(t) = \frac{q_e}{m_e}\vec{\boldsymbol{E}}t = -\hat{\boldsymbol{z}}\frac{q_e E}{m_e}t = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{eE}{m_e}t \ ,$$

où $e \simeq 1,6\,10^{-19}$ C. L'équation de sa position est :

$$z_e(t) = -\frac{1}{2}\frac{q_e}{m_e}\vec{\boldsymbol{E}}t^2 = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}t^2 \ ,$$

L'électron va entrer en contact avec l'armature 1 à l'instant Δt où

$$\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\Delta t^2 = d$$

$$\Longrightarrow \Delta t^2 = 2d\frac{m_e}{eE} \Longrightarrow \Delta t = \sqrt{2d\frac{m_e}{eE}} \ ,$$

et aura une vitesse finale de

$$v_e = \frac{eE}{m_e}\Delta t = \sqrt{2\frac{eEd}{m_e}} = \sqrt{2\frac{eU}{m_e}} \ .$$

La conservation de l'énergie nous aurait donnée le même résultat bien plus facilement, puisque l'énergie potentielle électrostatique au départ est $q_e(V_2 - V_1) = eU$, et cette énergie sera entièrement transformée en énergie cinétique, $T_e = \frac{1}{2}m_e v_e^2$ juste avant l'impacte. On a donc la relation par conservation d'énergie que la vitesse finale est :

$$q_e(V_2 - V_1) = e(V_1 - V_2) = eU = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \ ,$$

ce qui donne une vitesse finale de l'électron de

$$v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6.10^{-17}}{9\,10^{-31}}} \simeq 6.10^5 \text{m.s}^{-1} = 600 \text{km.s}^{-1} \ .$$

Même si v_e est très élevée, nous sommes en droit d'utiliser la mécanique non-relativiste car la vitesse de l'électron est bien inférieure à la célérité de la lumière, $c \simeq 3000000\,\text{km.s}^{-1}$.

(e) Quelle est l'énergie électrostatique, $\mathcal{E}_e$, stockée dans le condensateur ?

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}10^{-9}\left(10^2\right)^2 = \frac{1}{2}10^{-5}\text{J} \ .$$