Année universitaire 2013/2014

Examen d'Electromagnétisme PEIP Aix-Marseille Université
4 novembre 2013

5 problèmes - recto verso / Durée de l'épreuve 2 heures (24 points total - notée sur 20)
Calculettes standards collèges autorisées / Formulaire A4 manuscrit autorisée

1. On considère deux charges : $Q_1 = 200\mu C$ aux coordonnées P_1 (-1,-2,-1)m et $Q_2 = -200\mu C$ aux coordonnées P_2 (3,-2,2)m.

   (a) (2pts) Déterminer les forces électrostatiques qui s'exercent sur chacune des charges. Faire un schéma.Calculer la force $\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to1}$ de la charge 2 sur la charge 1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{P_2P}}_1 &= \overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{OP}}_2 = (-1,-2,-1) - (3,-2,2) = (-4,0,-3)\text{m} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{P_2P}}_1\right\| &= \sqrt{16+9} = 5\text{m} \\
\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 Q_2 \frac{(-4,0,-3)}{5^3} \\
&= -9\times10^9\times2\times10^{-4}\times2\times10^{-4}\frac{(-4,0,-3)}{5^3} = -\frac{36\times10}{5^3}(-4,0,-3)\text{N} \\
&= \frac{72}{5}\times\frac{(4,0,3)}{5}\text{N} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{F}}_{2\to1}\right\| &= \left\|\overrightarrow{\mathbf{F}}_{1\to2}\right\| = \frac{72}{5}\text{N} = 14.4\text{N}
\end{aligned} \tag{1}$$

   (b) (2pt) Quel est le moment dipolaire du système ?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{p}} &= Q_1\overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 + Q_2\overrightarrow{\mathbf{OP}}_2 = 2\times10^{-4}\left(\overrightarrow{\mathbf{OP}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{OP}}_2\right) \\
&= 2\times10^{-4}(-4,0,-3)\text{Cm} \\
\left\|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right\| &= 10^{-3}\text{Cm}
\end{aligned}$$

   (c) (1pt) Quelle est l'énergie électrostatique du système ?

$$W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = -9\times10^9\frac{2\times10^{-4}\times2\times10^{-4}}{5} = -72\text{J}$$

   (d) (2pts) Exprimer le potentiel électrique, $V_1(x,y,z)$, engendré par la charge Q_1 en coordonnées cartésiennes.

$$V_1(x,y,z) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\left\|\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{OP}}_1\right\|} = \frac{18\times10^5}{\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2}}$$

2. (2pts) On considère une surface de $S = 100\text{cm}^2$ dans le plan $z = 0$. Il y a un champ électrique uniforme sur cette surface donné par :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = 10^3\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{y}}+\widehat{\boldsymbol{z}}}{2}\right) \qquad (\text{V m}^{-1})$$

Calculer le flux électrique à travers cette surface.

$$\Phi_e = \iint \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\mathbf{S}} = \iint \overrightarrow{\boldsymbol{E}} \cdot \widehat{\mathbf{z}} dS = 10^3 \frac{1}{2} \iint dS$$
$$= 10^3 \frac{1}{2} \iint dS = 10^3 \frac{100}{2} \left(10^{-2}\right)^2 = 5\text{V m}$$

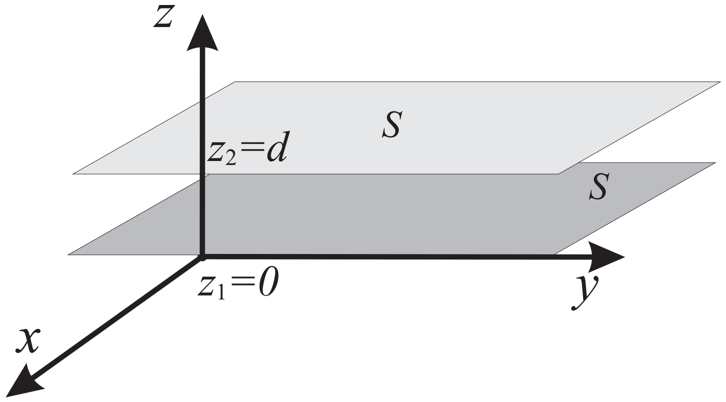
3. Une sphère conductrice creuse, électriquement isolée, de rayon intérieur $a = 0.2$m et de rayon extérieur $b = 0.25$m a une densité de charge surfacique, σ, uniforme de $+5{,}1\times10^{-6}$ C/m^2. Une charge ponctuelle $q = -0.4\mu$C est introduite au centre de la sphère creuse.

   (a) (2pts) Déduire la répartition des charges sur le conducteur.
   Avant l'introduction de la charge q, il y a une charge de $Q'_{\text{ext}} = \sigma 4\pi b^2 \simeq 4 \times \mu$C distribuée de façon uniforme sur la surface extérieure du conducteur.
   Après l'introduction de la charge q, il y a une charge $Q_{\text{int}} = -q = 0.4\mu C$, distribuée de façon uniforme sur la surface intérieure du conducteur, $\sigma_{\text{int}} = \frac{0.4\times10^{-6}}{4\pi a^2} \simeq 0.8\mu\text{Cm}^{-2}$ et $Q_{\text{ext}} = Q' + q = 3.6\mu$C sur la surface extérieure, $\sigma_{\text{ext}} = \frac{3.6\times10^{-6}}{4\pi b^2} \simeq 4.58\mu\text{Cm}^{-2}$.

   (b) (2pts) Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
   – Pour $r < a$
   $$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}} = \frac{0.4\times10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$
   – Pour $a < r < b$
   $$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$
   – Pour $r > b$
   $$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{3,6\times10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{\mathbf{r}}$$

   (c) (1pts) Déterminer le potentiel électrique à l'extérieur de la sphère.
   $$V(r) = \frac{3,6\times10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

4. On considère deux armatures planes parallèles et «infinis», de potentiels respectifs V_1 et V_2 aux positions $z_1 = 0$ et $z_2 = d$.



L'espace entre les armatures a des propriétés telles que le potentiel dans cet espace s'écrit :

$$V(z) = V_1 + z^3(V_2 - V_1)/d^3.$$

(a) (2pts) Trouver le champ électrique, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(z)$ entre les armatures.

$$\mathbf{E}(z) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \widehat{\mathbf{z}}3z^2(V_1 - V_2)/d^3$$

(b) (2pts) Trouver la densité volumique de charge, $\rho(z)$, entre les armatures.

$$\begin{aligned} \text{div}\,\mathbf{E}(z) &= \frac{6z(V_1 - V_2)}{d^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \rho &= \frac{6z(V_1 - V_2)}{d^3}\epsilon_0 \text{Cm}^{-3} \end{aligned}$$

(Attention : il y avait une erreur d'énoncé sur l'examen d'origine (l'indice ne correspondait pas à la question posée) - ici est l'énoncé corrigé et sa solution)

5. On considère un disque de rayon a dans le plan $z = 0$ possédant une charge surfacique $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{\rho^2}{a^2}$ (coordonnées cylindriques et σ_0 est une constante avec les dimensions de charge surfacique).

(a) (2pts) Trouver la charge totale du disque.

$$Q = \iint \sigma(\rho) dS = 2\pi \frac{\sigma_0}{a^2} \int_0^a \rho^3 dS = 2\pi \frac{\sigma_0}{a^2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a = 2\pi \frac{\sigma_0}{a^2}\frac{a^4}{4} = \pi \frac{a^2}{2}\sigma_0 \text{C}$$

$$dS = \rho d\rho d\phi$$

(b) (2pts) Calculer le potentiel électrique le long de l'axe du disque (en fonction de z avec $x = y = z = 0$ le centre du disque) . Formule utile :

$$\int_\alpha^\beta \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} d\rho = \left[\frac{1}{3}\left(\rho^2 - 2z^2\right)\sqrt{z^2 + \rho^2}\right]_\alpha^\beta$$

Le potentiel le long de l'axe est donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\rho)}{PM} dS \\ &= \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} d\rho = \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}\left(\rho^2 - 2z^2\right)\sqrt{z^2 + \rho^2}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\frac{(a^2 - 2z^2)}{3}\left(z^2 + a^2\right)^{1/2} + \frac{2}{3}\left(z^2\right)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

(c) (2pts) Calculer le champ électrique le long de l'axe du disque.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V &= \frac{\widehat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0}\left[\frac{4}{3}z\sqrt{z^2 + a^2} - \frac{z}{3}\frac{(a^2 - 2z^2)}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z\left(z^2\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{\widehat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0}z\left[\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2\left(z^2\right)^{1/2}\right] = \frac{\widehat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0}z\left[\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2|z|\right] \end{aligned}$$