Partiel d'Electromagnétisme - L2 Aix–Marseille 1
le 4 novembre 2010 10h30-12h30

1. (6 pts) Deux charges ponctuelles, $Q_1 = 500\mu$C et $Q_2 = -500\mu$C, sont positionnées respectivement à (5,0,0)m et (0,0,-5)m. (spécifier les unités dans vos réponses)

   (a) Ecrire la force sur Q_2 en coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}}_1 = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 = (5,0,0) \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{P}}_2 = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 = (0,0,-5)$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 = (0,0,-5) - (5,0,0) = -(5,0,5)$$
$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right\| = \sqrt{(5,0,5)\cdot(5,0,5)} = 5\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 Q_2 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right\|^3} =$$
$$= 9\times 10^9 \left(25\times 10^4 \times 10^{-12} \frac{(5,0,5)}{5^3\sqrt{2}^3}\right)$$
$$= 9\times 5\times\left(\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}45\\0\\45\end{bmatrix}\text{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(45\widehat{\boldsymbol{x}} + 45\widehat{\boldsymbol{z}}\right)\text{N}$$
$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}\right\| = 45\text{N}$$

   (b) Quelle est la force sur Q_1.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{2\to 1} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to 2}$$

   (c) Quelle est le moment dipolaire du système (vecteur et amplitude : $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ et p).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = Q_1\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 + Q_2\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 = 5\times 10^{-4}\times(5,0,0) - 5\times 10^{-4}\times(0,0,-5)$$
$$= 25\times 10^{-4}\times(1,0,1)\text{Cm}$$
$$p = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}\right\| = 25\times\sqrt{2}\times 10^{-4}\text{Cm}$$

   (d) Quelle est le champ électrique (vecteur) à l'origine ?

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_1O}}}{\|\boldsymbol{P_1O}\|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_2 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P_2O}}}{\|\boldsymbol{P_2O}\|^3}$$
$$= 9\times 10^9\times\left(5\times 10^{-4}\times\frac{(-5,0,0)}{5^3} - 5\times 10^{-4}\times\frac{(0,0,5)}{5^3}\right)$$
$$= \frac{9\times 10^5}{5}(-1,0,-1) = 18\times 10^4(-1,0,-1)\text{V/m}$$

   (e) Quelle est le potentiel à l'origine ?

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{\|\boldsymbol{P_1O}\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{\|\boldsymbol{P_2O}\|} = 0\text{V}$$

(f) Quelle énergie faut-il afin d'amener une charge de 100μC depuis l'infini à l'origine.

$$W = qV = 0\text{J}$$

2. (4 pts) On considère un potentiel électrique dans le vide de $V(x, y, z) = Ax^2 + By$ (V) où A et B sont des constantes.

(a) Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\widehat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial V}{\partial x} - \widehat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax\widehat{\boldsymbol{x}} - B\widehat{\boldsymbol{y}}$$

(b) Donner l'expression de la densité d'énergie électrique.

$$\epsilon_0 \left\|\vec{\boldsymbol{E}}\right\|^2 = \epsilon_0 \left(4A^2x^2 + B^2\right)$$

(c) Trouver l'énergie stockée dans la région décrite par $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, et $0 \leq z \leq c$.

$$\begin{aligned}
W_e = \iiint \epsilon_0 \left\|\vec{\boldsymbol{E}}\right\|^2 d\mathcal{V} &= \epsilon_0 \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \left(4A^2x^2 + B^2\right) \\
&= \epsilon_0 \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz\, 4A^2x^2 + B^2\epsilon_0 \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \\
&= 4A^2\epsilon_0 bc \int_0^a dx\, x^2 + abcB^2\epsilon_0 \\
&= \epsilon_0 \left(\frac{4}{3}A^2a^3bc + abcB^2\right)
\end{aligned}$$

(d) A.N. $A = 3$, $B = 4$, $a = b = c = 1$m.

$$\begin{aligned}
W_e = \epsilon_0 \left(\frac{4}{3}A^2a^3bc + abcB^2\right) &\overset{\text{A.N.}}{=} \epsilon_0 (12 + 16) = 28\epsilon_0 \\
4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \times 10^9} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{36 \times \pi \times 10^9} &\simeq 8.84 \times 10^{-12}\text{Fm}^{-1} \\
W_e \overset{\text{A.N.}}{=} 28 \times 8.84 \times 10^{-12}\text{J} &= 2.48 \times 10^{-10}\text{J}
\end{aligned}$$

3. (4 pts) On considère une distribution volumique de charge libre, $\rho_l = 5r^2$ (C/m^3), dans une sphère de rayon a placée dans le vide.

(a) Utiliser la loi de Gauss afin de trouver le déplacement électrique, $\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, dans la région $r < a$.

La loi de Gauss pour le champ $\vec{\boldsymbol{D}}$ s'écrit :

$$\int \vec{\boldsymbol{D}}(r) \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = Q_{\text{int}}$$

La symétrie sphérique du problème dicte que $\vec{\boldsymbol{D}}$ est de la forme $\vec{\boldsymbol{D}}(r) = \widehat{\boldsymbol{r}}D_r(r)$, et la loi de Gauss appliqué à une surface sphérique de rayon r donne donc :

$$\int \vec{\boldsymbol{D}}(r) \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = 4\pi r^2 D_r(r) = Q_{\text{int}} = 4\pi \int_0^r 5r^4 dr = 4\pi r^5$$

d'où on obtient :

$$D_r(r) = r^3 \qquad \vec{\boldsymbol{D}}(r) = \widehat{\boldsymbol{r}}r^3$$

(b) Utiliser la loi de Gauss afin de trouver le déplacement électrique, $\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$, dans la région $r > a$.

$$4\pi r^2 D_r(r) = 4\pi \int_0^a 5r^4 dr = 4\pi a^5$$
$$D_r(r) = \frac{a^5}{r^2} \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{D}}(r) = \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{a^5}{r^2}$$

(c) Si la constante diélectrique relative de la sphère est $\varepsilon_r = 5$, donner l'expression pour le champ électrique à l'intérieur de la sphère ?

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r) = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(r)}{\varepsilon_r \epsilon_0} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(r)}{5\epsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r) = \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{r^3}{5\epsilon_0}$$

(d) Trouver le champ de polarisation $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$ de la sphère.

Par définition :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}}(r) = \epsilon_0 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}(r) + \overrightarrow{\boldsymbol{P}}$$

donc

$$\widehat{\boldsymbol{r}}r^3 = \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{r^3}{5} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{P}} = \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{4}{5}r^3$$

(e) Trouver la distribution volumique de la charge de polarisation $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}})$. (Indice : $\mathrm{div}\overrightarrow{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta P_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\phi}{\partial\phi}$).

$$\rho_{\text{pol}} = -\mathrm{div}\overrightarrow{\boldsymbol{P}} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{4}{5}r^5 = -4r^2$$

(f) Trouver la distribution surfacique de la charge de polarisation σ_{pol}.

$$\sigma_{\text{pol}}(\theta,\phi) = \overrightarrow{\boldsymbol{P}} \cdot \widehat{\boldsymbol{r}}\Big|_{r=a} = \widehat{\boldsymbol{r}}\frac{4}{5}a^3$$

Je ne l'a pas demandé, mais il est instructif de remarquer que la charge de polarisation totoale est :

$$Q_{\text{pol}} = \iint\limits_{\text{sphère}} \sigma_{\text{pol}} dS + \iiint\limits_{\text{sphère}} \rho_{\text{pol}} d\mathcal{V} = \frac{4}{5}a^3 \iint_{r=a} dS + \int_0^a -4r^2 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{4}{5}a^3 4\pi a^2 - 16\pi \int_0^a r^4 dr = \pi\frac{16}{5}a^5 - 16\pi\frac{a^5}{5} = 0$$

Ce qui est normale puisque la charge totale de polarisation d'un objet diélectrique est nulle.

4. (3pts) On considère deux condensateurs de capacités C_1 et C_2.

(a) Quelle est la capacité équivalente si les deux condensateurs sont montés en série ?

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(b) Quelle est la capacité équivalente si les deux condensateurs sont montés en parallèle ?

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$$

5. (3pts) On impose une différence de potentiel de 1,5V entre les deux bouts d'un conducteur de section uniforme et 150m de long. La densité de courant $j = \left\| \vec{\boldsymbol{j}} \right\|$ est 5 $\times 10^5 \mathrm{Am}^{-2}$.

   (a) Quelle est le conductivité du matériau du conducteur ?

$$E = \frac{U}{L} = \frac{1,5}{150} = 10^{-2}\mathrm{Vm}^{-1}$$
$$j = \gamma E \Rightarrow \gamma = \frac{j}{E} = \frac{5 \times 10^5}{10^{-2}} \Rightarrow 5 \times 10^7 \mathrm{Sm}^{-1} = 5 \times 10^7 \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

   (b) Quelle est la résistance du conducteur si elle prend la forme d'un fil 1 kilomètre de long et de section $1\mathrm{mm}^2$?

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{10^3}{5 \times 10^7 10^{-6}} = \frac{100}{5} = 20\Omega$$